

數學建模講義

補充課 10：多變量微積分與拉格朗日乘數

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成這節兩小時的補充課後，學生應能：

- 透過公式、等值曲線及建模情境詮釋多變量函數；
- 計算並詮釋偏導數，理解其為每次只改變一個變量時的敏感度；
- 運用梯度找出最陡變化方向及各方向的變化率；
- 建立局部線性近似，並說明每個敏感度係數的單位；
- 找出臨界點，並以海森矩陣分類；
- 運用拉格朗日乘數求解單一約束的最優化問題；
- 將乘數詮釋為局部影子價格；
- 交代假設、運算／程式核證及限制，清楚傳達最優化結果。

1 多個變量如何改變建模問題

單變量模型探討一個輸入改變時，輸出如何隨之變化。多變量模型則要問：是哪一個輸入改變、沿哪個方向改變，以及改變受到哪些約束。例如，飯堂管理人員可選擇員工配置 x 、服務櫃檯數目 y 及備餐水平 z 。等候時間、成本與服務質素都取決於向量 (x, y, z) ，而非單一數值。

引入活動：哪些量可受控制？

某學校活動的預期淨效益為

$$B(x, y) = 80x + 60y - 2x^2 - y^2,$$

其中 x 和 y 是活動水平。總員工工時約束為 $x + y = 20$ 。

1. 哪個表達式是目標？哪個表達式是約束？
2. 為甚麼不能只考察 x 來最大化 B ？
3. 增加 x 而「保持 y 不變」是甚麼意思？

本課將建立有系統地回答這些問題所需的工具。

函數與等值曲線

二變量函數是一條規則

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

等值曲線是集合 $f(x, y) = c$ 。同一條等值曲線上的點給出相同輸出。等高線圖運用多條等值曲線描述曲面，毋須繪製容易失真的三維圖像。

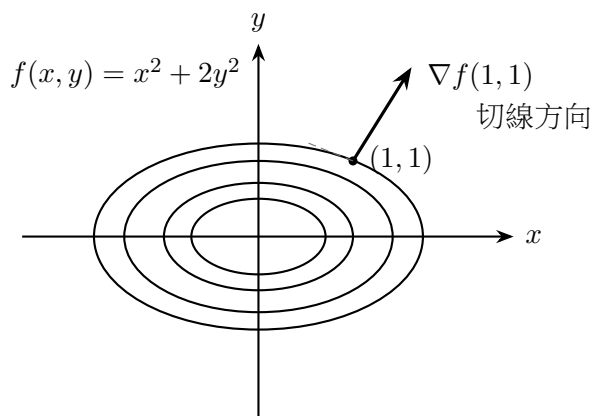


圖 1: 梯度與等值曲線正交。沿曲線移動會改變方向，卻不會改變函數值。

2 偏導數與局部敏感度

偏導數

對函數 $f(x, y)$ ，

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

計算 f_x 時，保持 y 不變並對 x 微分；計算 f_y 時，則保持 x 不變。在建模語言中，這些量稱為邊際效應。

示例 1：詮釋單位

假設飯堂的每日營運成本為

$$C(x, y) = 400 + 30x + 45y + 0.8x^2 + 0.5xy,$$

其中 x 是員工工時， y 是已準備的餐膳批次數目。那麼

$$C_x = 30 + 1.6x + 0.5y, \quad C_y = 45 + 0.5x.$$

在 $(x, y) = (10, 8)$ ，

$$C_x(10, 8) = 50, \quad C_y(10, 8) = 50.$$

詮釋：在這個營運點附近，增加一個員工工時會令每日成本增加約 50 個貨幣單位；多準備一批餐膳亦會增加約 50。兩個數值在此相等，但單位不同：前者是每員工工時的成本，後者是每批次的成本。

局部線性近似

對小變化 Δx 和 Δy ，

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y.$$

因此變化可近似為

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

這是切線近似的多變量版本，亦常是建模報告中的第一項敏感度計算。

示例 2：敏感度估算

運用飯堂成本模型在 $(10, 8)$ 的結果，估算員工工時增加 0.5 小時、餐膳批次減少 1 時的成本變化：

$$\Delta C \approx C_x(0.5) + C_y(-1) = 50(0.5) - 50 = -25.$$

模型預測成本減少約 25 個貨幣單位。這是局部估算；除非先檢查曲率，否則不應把結果外推至大幅變化。

檢查點：檢查點

若 $f_x(a, b) = 0$ ，但 $f_y(a, b) > 0$ ， (a, b) 是否必然為局部最小值？請從幾何角度解釋。

3 梯度與方向變化

梯度與方向導數

梯度把所有一階偏導數集合起來：

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

對單位向量 $\mathbf{u}$ ，方向導數為

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

梯度指向函數增加得最快的方向， $-\nabla f$ 指向減少得最快的方向，而 $\|\nabla f\|$ 是最大瞬時增加率。

示例 3：在溫度場中移動

設

$$T(x, y) = 30 - 0.5x^2 - y^2 + 2x$$

表示溫度（單位為 $^{\circ}\text{C}$ ），而 x, y 以公里為單位。在 $(1, 1)$ ，

$$\nabla T = (-x + 2, -2y) = (1, -2).$$

升溫最快的方向是

$$\frac{(1, -2)}{\sqrt{5}},$$

最大升溫率為每公里 $\sqrt{5}^{\circ}\text{C}$ 。若學生向東步行， $\mathbf{u} = (1, 0)$ ，則 $D_{\mathbf{u}}T = 1^{\circ}\text{C}/\text{km}$ 。

模型檢視：模型批判：梯度是局部量

梯度由模型在某一點計算而得，並不保證遠離該點後同一方向仍然最佳。若路線較長，應沿途更新梯度，或求解路徑規劃問題，而非一直沿著一支固定箭頭前進。

沿路徑的鏈式法則

若移動點沿 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ 行進，則

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{r}'(t).$$

這條公式把場的敏感度 ∇f 與移動 $\mathbf{r}'(t)$ 分開。

4 無約束最優化與海森矩陣

臨界點

在可微函數的內部局部最大值或最小值處，

$$\nabla f = \mathbf{0}.$$

這些點稱為臨界點。與單變量情況一樣，方程是必要條件，但並非充分條件：臨界點可能是最小值、最大值或鞍點。

二變量的海森判別法

海森矩陣為

$$\mathbf{H}f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

在臨界點令 $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ 。

條件	分類
$D > 0$ and $f_{xx} > 0$	局部最小值
$D > 0$ and $f_{xx} < 0$	局部最大值
$D < 0$	鞍點
$D = 0$	無法判定

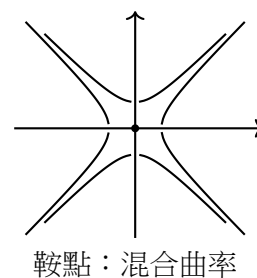
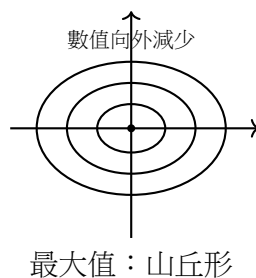
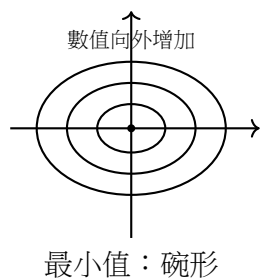


圖 2: 等值線的形態可區分局部最小值、局部最大值與鞍點；海森矩陣以代數方式記錄這種局部曲率。

示例 4：分類臨界點

對

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5,$$

$$\nabla f = (2x - 2, 4y - 8) = \mathbf{0} \Rightarrow (x, y) = (1, 2).$$

海森矩陣為

$$\mathbf{H}f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

故 $D = 8 > 0$ 且 $f_{xx} = 2 > 0$ 。因此 $(1, 2)$ 是局部最小值。配方可進一步顯示它也是全域最小值：

$$f = (x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 - 4.$$

示例 5：鞍點

對 $g(x, y) = x^2 - y^2$ ， $\nabla g = (2x, -2y)$ ，因此唯一的臨界點是 $(0, 0)$ 。海森矩陣為 $\text{diag}(2, -2)$ ，且 $D = -4 < 0$ ，所以原點是鞍點：沿 x 軸移動會令 g 增加，沿 y 軸移動則令它減少。

5 拉格朗日乘數：在約束上最優化

幾何原理

假設要在約束 $g(x, y) = c$ 下最優化 $f(x, y)$ 。在正則的受約束極值處， f 的等值曲線與約束相切，兩者的法向量互相平行：

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y) = c.$$

純量 λ 稱為拉格朗日乘數。

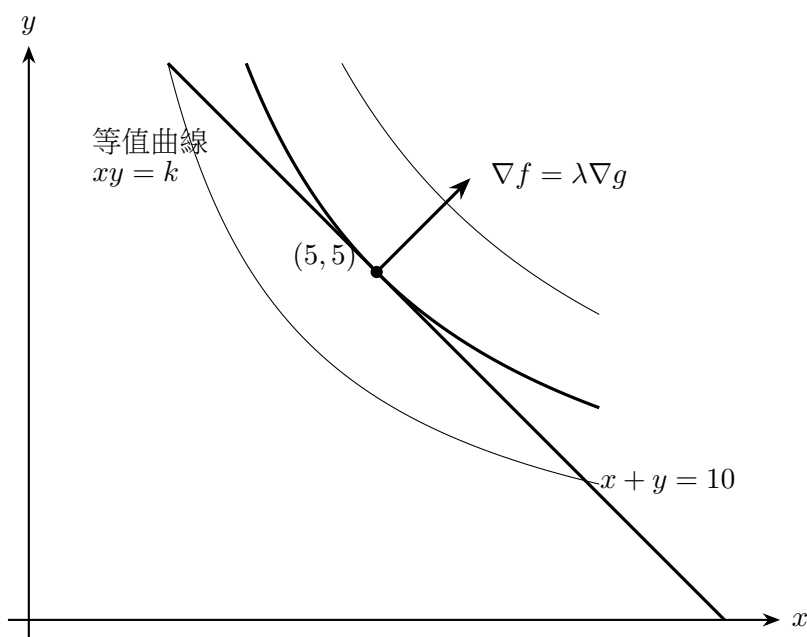


圖 3: 在 $x + y = 10$ 的約束下， $f(x, y) = xy$ 的最大值出現在可達的最高等值曲線與約束相切之處，即 $(5, 5)$ 。

拉格朗日方法

在約束 $g(x, y) = c$ 下最優化 $f(x, y)$ ：

1. 計算 ∇f 與 ∇g ；
2. 聯立求解 $\nabla f = \lambda \nabla g$ 與 $g = c$ ；
3. 在所有候選點計算 f ；
4. 檢查定義域邊界、正值限制，以及約束是否正則；

5. 結合情境詮釋結果，包括單位與敏感度。

示例 6：固定周界下的最大面積

設矩形邊長為 $x, y > 0$ ，周界為 20。最大化

$$f(x, y) = xy \quad \text{並受約束} \quad g(x, y) = x + y = 10.$$

由於

$$\nabla f = (y, x), \quad \nabla g = (1, 1),$$

拉格朗日方程為

$$y = \lambda, \quad x = \lambda, \quad x + y = 10.$$

故 $x = y = 5$ ，最大面積為 25。當趨近正值範圍的邊界時，面積趨近 0，證實內部候選點是受約束最大值。

檢查點：檢查點

為甚麼對矩形問題求解 $\nabla f = 0$ 並不恰當？這樣做會忽略可行集的甚麼特徵？

6 影子價格與生產配置模型

示例 7：配置有限資源

某工場選擇生產水平 x 和 y 。每週效益為

$$P(x, y) = 60x + 40y - 2x^2 - y^2,$$

並受資源限制

$$x + y = 20, \quad x, y \geq 0.$$

令 $g(x, y) = x + y$ 。則

$$\nabla P = (60 - 4x, 40 - 2y), \quad \nabla g = (1, 1).$$

方程

$$60 - 4x = \lambda, \quad 40 - 2y = \lambda, \quad x + y = 20$$

給出 $x = 10$ 、 $y = 10$ 及 $\lambda = 20$ 。最優效益為

$$P(10, 10) = 700.$$

由於目標函數是凹函數（海森矩陣為 $\text{diag}(-4, -2)$ ），這是全域受約束最大值。

乘數作為影子價格

把資源約束寫成 $x + y = c$ ，並以 $P^*(c)$ 表示最優值。在 $c = 20$ 附近，

$$\frac{dP^*}{dc} = \lambda \approx 20.$$

因此，局部而言，每增加一個資源單位約值 20 個效益單位。這不代表每個額外單位永遠都值 20；隨著營運點改變，乘數也會改變。

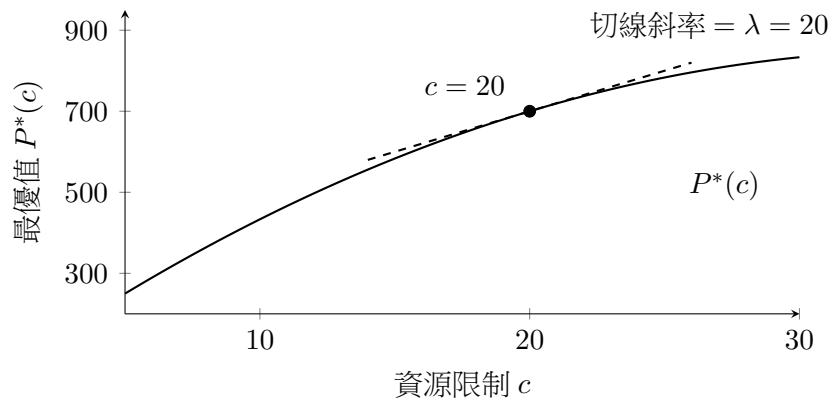


圖 4: 影子價格是最優值曲線相對於資源限制的斜率。它是局部敏感度，而非固定不變的價格。

模型檢視：最優化尚未證明的事情

在建議 $(x, y) = (10, 10)$ 前，應檢查：

- x 和 y 是否可以分割，還是必須為整數？
- 資源關係是否恰好為 $x + y = 20$ ，還是只有 $x + y \leq 20$ ？
- 效益係數是否由數據估計？其不確定性有多大？
- 二次模型在建議解附近是否仍然合理？
- 是否遺漏最低服務水平或員工容量等約束？

若模型不完整，數學上的最優點仍可能是欠佳的現實建議。

7 分層最優化工作坊

核心路線：梯度與海森矩陣

對

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 10,$$

找出臨界點，以海森矩陣分類，再把 f 寫成配方形式，核證該分類。

挑戰路線：受約束幾何

求

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

在圓 $x^2 + y^2 = 25$ 上的最大值與最小值。分別以拉格朗日乘數及點積幾何解釋答案。

延伸路線：建模與敏感度

某農場把土地 x 分配予作物 A，把土地 y 分配予作物 B。利潤為

$$\Pi(x, y) = 100x + 80y - x^2 - 2y^2,$$

其中 $x + y = 50$ 且 $x, y \geq 0$ 。

1. 求連續最優解及乘數。
2. 連同單位詮釋乘數。
3. 檢驗土地限制由 50 改為 51 時會發生甚麼變化。

4. 指出一項可能令數學最優解難以實行的假設。

8 傳達結果

競賽式結論範本

有力的結論應說明：

1. 決策：建議的變量值及目標值；
2. 可行性：建議所滿足的約束；
3. 運算 / 程式核證：海森矩陣、凹性、邊界比較或數值確認；
4. 敏感度：乘數的意義或小幅擾動測試；
5. 限制：至少一項可能影響實施的假設。

例：「在連續二次模型及具約束力的 20 單位資源限制下，建議配置為 (10, 10)，效益為 700。負定海森矩陣證實目標函數全域凹。乘數 20 表示局部而言，每增加一個資源單位約值 20 個效益單位。實施前仍須檢查整數限制與參數不確定性。」

檢查點：離堂短問

以兩句話解釋 $\nabla f = \mathbf{0}$ 與 $\nabla f = \lambda \nabla g$ 的分別，再指出一個拉格朗日候選點未必能成為有效最終建議的原因。

9 練習題

練習 1：偏導數與局部變化

1. 對 $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$ ，計算 f_x 與 f_y 。
2. 對 $T(x, y) = 25 - 0.2x^2 - 0.5y^2$ ，求在 (2, 1) 的梯度，以及朝向 (5, 5) 的方向導數。
3. 當 (x, y) 由 (3, 4) 變為 (3.03, 3.98) 時，運用局部線性化估算 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 。
4. 對以工時及材料公斤數為輸入的成本函數，解釋 f_x 與 f_y 的單位。

偏導數檢查

第 1 題有

$$f_x = 2xy + ye^{xy}, \quad f_y = x^2 + xe^{xy}.$$

在 (2, 1)， $\nabla T = (-0.8, -1)$ ；朝向 (5, 5) 的單位方向為 (3/5, 4/5)，所得方向導數為 -1.28。在 (3, 4) 附近線性化 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 得 5.002。最後一題應分別為兩個偏導數附上每工時的成本及每公斤的成本單位。

練習 2：無約束最優化

找出並分類所有臨界點：

1. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4x + 6y$ ；
2. $g(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ ；

3. $h(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

4. $q(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ 。

對每一題，解釋海森判別法能否得出確定結論。

臨界點檢查

臨界點及分類依次為： $(2, -1)$ ，最小值； $(-1, 0)$ ，鞍點；對 h ， $(0, 0)$ 是鞍點， $(1, 1)$ 是局部最小值；對 q ， $(0, 0)$ 是鞍點，而 $(1, 1)$ 及 $(-1, -1)$ 是局部最小值。在列出的每個臨界點，海森行列式均不為零，因此判別法皆能得出確定結論。

練習 3：拉格朗日乘數

運用拉格朗日乘數並核證結果：

1. 在約束 $x^2 + 4y^2 = 8$ 下最大化 xy ；
2. 求平面 $x + 2y + 3z = 6$ 上最接近原點的點；
3. 在 $x + y + z = 12$ 且 $x, y, z > 0$ 下最大化 xyz ；
4. 在 $2x + y = 12$ 且 $x, y \geq 0$ 下最大化 $5x + 8y - x^2 - y^2$ 。

拉格朗日乘數檢查

第 1 題的最大值點為 $(2, 1)$ 及 $(-2, -1)$ ，函數值為 2。第 2 題最近的點為 $(3/7, 6/7, 9/7)$ 。第 3 題有 $(x, y, z) = (4, 4, 4)$ ，最大值為 64。第 4 題有 $(x, y) = (37/10, 23/5)$ ，最大值為 $409/20$ ；核證時應與可行端點比較。

練習 4：建模挑戰

某製造商選擇兩個連續生產水平。利潤為

$$\Pi(x, y) = 90x + 70y - 1.5x^2 - y^2 - 0.5xy,$$

並受約束 $2x + y \leq 60$ 及 $x, y \geq 0$ 。

1. 求無約束最優點，並檢驗它是否可行。
2. 若資源約束具約束力，求解等式約束問題。
3. 比較所有相關候選點及邊界的目標值。
4. 詮釋乘數，並討論整數生產要求會否改變建議。
5. 運用上面的範本，撰寫五句建模結論。

建模檢查

無約束點 $(580/23, 660/23)$ 違反 $2x + y \leq 60$ 。在具約束力的直線上，連續最優解為

$$(x, y) = \left(\frac{160}{9}, \frac{220}{9} \right), \quad \Pi = \frac{18200}{9} \approx 2022.22.$$

此值高於兩條坐標軸上的最佳候選點： $(0, 35)$ 的函數值為 1225， $(30, 0)$ 的函數值為 1350。採用 $\nabla \Pi = \lambda \nabla(2x + y)$ 的約定時， $\lambda = 110/9$ 是多一個資源單位的局部價值。若生產量必須為整數，檢查附近可行點後會選出 $(18, 24)$ ，利潤為 2022。完整結論須交代連續變量假設、邊界比較、乘數的局部性、整數檢查，以及一項模型效度驗證或不確定性限制。

選修延伸 A：多個約束

對約束 $g_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, g_k(\mathbf{x}) = c_k$ ，必要條件變為

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \dots + \lambda_k \nabla g_k.$$

在候選點，各約束的梯度必須線性獨立。在正則性條件成立時，每個乘數量度目標對相應約束水平的局部敏感度。

選修延伸 B：不等式約束

若可行集包含 $g(\mathbf{x}) \leq c$ 等不等式，約束可能是活躍或非活躍的。約束活躍時，通常可令 $g = c$ ，再以拉格朗日乘數研究解。更有系統的方法採用卡魯什-庫恩-塔克條件，已超出本補充課的範圍。在報告中，應明確檢查不等式是否具約束力，而非一開始便假定等式成立。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第三冊（OpenStax）
- 非線性限制最佳化指南（NEOS Guide）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。