

數學建模講義

補充課 8：建模與模擬的概率基礎

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成這節兩小時的補充課後，學生應能：

- 利用樣本空間、事件與概率模型描述隨機試驗；
- 運用計數、補事件及容斥原理計算簡單概率；
- 區分條件概率、獨立性與互斥；
- 運用貝葉斯定理根據證據更新概率；
- 利用隨機變量、PMF / PDF、CDF、期望值及方差為不確定性建模；
- 識別二項、泊松、指數、正態或馬爾可夫鏈模型的適用情況；
- 解釋大數定律與中心極限定理如何為蒙地卡羅模擬提供理據。

1 概率為何屬於數學建模的一部分

當輸入固定時，確定性模型會給出一個輸出。真實系統卻經常需要另一套描述語言：顧客不會恰好每五分鐘到達一次；感測器讀數帶有雜訊；生產線偶爾產生次品；天氣亦會逐日改變。因此，建模報告不應只說「會發生甚麼」，還應回答「發生的可能性有多大」、「變異程度如何」及「我們有多大信心」。

引入活動：確定性還是隨機性？

把下列情境分類為主要屬於確定性、隨機性或兩者混合。

1. 一部機械人以固定速度 1.5 m/s 行駛 120 m。
2. 午膳時間有顧客進入飯堂。
3. 一個零件在一個月內有 2% 的故障概率。
4. 送貨路線已經規劃，但行車時間取決於天氣及擠塞情況。

有力的建模答案通常會把可預測的結構與隨機變異分開處理。

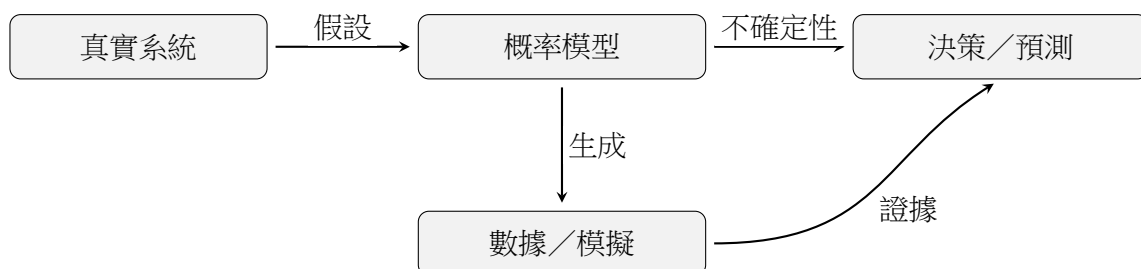


圖 1: 當假設需要描述不確定性、變異與證據，而非單一固定結果時，便須在建模中引入概率。

2 樣本空間、事件與計數

樣本空間與事件

隨機試驗是一個結果不確定、但可以描述所有可能結果的程序。樣本空間 Ω 是所有可能結果的集合；事件則是其子集 $A \subseteq \Omega$ 。

例題 1：兩顆骰子

擲兩顆公平骰子時，

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}, \quad |\Omega| = 36.$$

「點數和為 7」的事件是

$$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

所以 $\mathbb{P}(\text{點數和} = 7) = 6/36 = 1/6$ 。

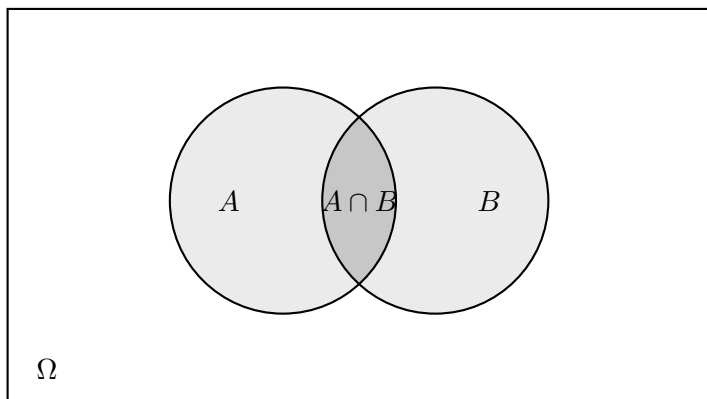
概率規則

對事件 A 與 B ，

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

若所有結果等可能且 Ω 是有限集，則

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

圖 2: 容斥原理把交集減去一次，因為它原先在 A 與 B 中各被計算了一次。

例題 2：生日問題

假設生日均勻分佈於 365 日。對 $n = 23$ 人，計算至少兩人同生日的概率。使用補事件較為容易。所有人生日均不同的概率為

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - 22)}{365^{23}} \approx 0.4927.$$

因此

$$\mathbb{P}(\text{至少有一對生日相同}) \approx 1 - 0.4927 = 0.5073.$$

只需 23 人，概率便已略高於一半。

檢查點：檢查點

一個袋內有 5 個紅球及 3 個藍球。不放回地抽取兩球。「第一球為紅球」與「第二球為紅球」是否獨立？利用條件概率解釋。

3 條件概率、獨立性與貝葉斯定理

條件概率

對滿足 $\mathbb{P}(B) > 0$ 的事件 A 與 B ,

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

這表示先把樣本空間限制為 B ，再重新正規化。

獨立性

若

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

則事件 A 與 B 互相獨立。當 $\mathbb{P}(B) > 0$ 時，這等價於 $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$ 。獨立不等同於互斥：若兩個正概率事件互斥，知道其中一個發生便表示另一個不可能發生，因此兩者並不獨立。

全概率公式與貝葉斯定理

若 $B_1, \dots, B_n$ 構成 Ω 的一個劃分，則

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | B_i) \mathbb{P}(B_i).$$

貝葉斯定理根據觀察所得的證據，更新某個原因的機率：

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_k) \mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | B_i) \mathbb{P}(B_i)}.$$

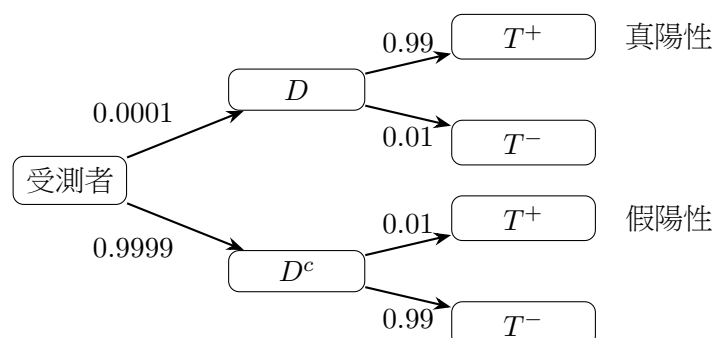


圖 3: 概率樹把先驗概率與檢測可靠度分開。當基準率極低時，假陽性分支可能佔主導。

例題 3：醫學檢測與基準率

某疾病每 10,000 人中有 1 人患上。某項檢測的靈敏度為 99%，特異度亦為 99%。一名隨機選出的受測者得到陽性結果。他患病的概率是多少？

令 D 表示「患病」， T^+ 表示「檢測呈陽性」。則

$$\mathbb{P}(D) = 10^{-4}, \quad \mathbb{P}(T^+ | D) = 0.99, \quad \mathbb{P}(T^+ | D^c) = 0.01.$$

因此

$$\mathbb{P}(D | T^+) = \frac{0.99(10^{-4})}{0.99(10^{-4}) + 0.01(0.9999)} \approx 0.0098.$$

即使檢測呈陽性，患病概率仍低於 1%。這並非表示檢測毫無用處，而是因為疾病罕見。

模型檢視：模型批判：報告中的貝葉斯定理

運用貝葉斯定理時，報告應說明先驗概率、證據可靠度，以及觀察證據後哪些數值有所改變。許多錯誤結論源於忽略基準率。

4 隨機變量、分佈、期望值與方差

隨機變量

隨機變量是函數 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ，把每個結果對應至一個數值。若其可能取值有限或可數，便稱為離散隨機變量；若概率以區間及積分描述，便稱為連續隨機變量。

PMF、PDF 與 CDF

對離散隨機變量，概率質量函數為

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad \sum_x p_X(x) = 1.$$

對連續隨機變量，概率密度函數滿足

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

對任何隨機變量，累積分佈函數為

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

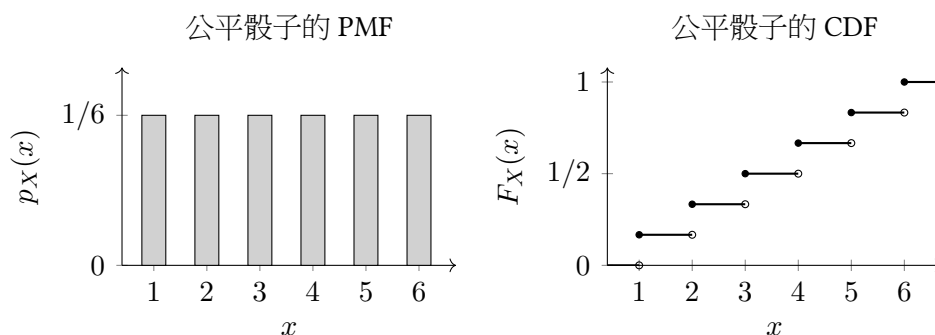


圖 4: 離散分佈的概率質量集中於若干點，而其 CDF 以跳躍方式增加。

期望值與方差

期望值是長期平均值：

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x p_X(x) \quad (\text{離散}), \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (\text{連續}).$$

方差衡量離散程度：

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

標準差為 $\text{SD}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ 。

例題 4：擲骰子的平均值與方差

令 X 為擲一顆公平六面骰子所得的點數。則

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3.5,$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6},$$

所以

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.917.$$

標準差約為 1.708。

例題 5：期望利潤

一間保險公司以 \$1,500 的保費售出一份一年期保單。若受保人死亡，索償額為 \$200,000，而該年內的死亡概率為 $p = 0.01$ 。保險公司的期望利潤為

$$0.99(1500) + 0.01(1500 - 200000) = 1485 - 1985 = -500.$$

在此保費下，每份保單的期望虧損為 \$500。這與決策理論及風險建模直接相關。

5 建模常用的具名分佈

何時使用哪一種分佈

分佈	建模問題	主要數值
伯努利 (p)	一次成功／失敗試驗	平均值 p ，方差 $p(1-p)$
二項 (n, p)	n 次獨立試驗中的成功次數	平均值 np ，方差 $np(1-p)$
泊松 (λ)	固定區間內隨機到達的次數	平均值 λ ，方差 λ
指數 (λ)	泊松到達之間的等候時間	平均值 $1/\lambda$ ，無記憶性
正態 (μ, σ^2)	測量誤差、平均值、自然變異	平均值 μ ，方差 σ^2

例題 6：二項品質控制

一間工廠的次品率為 $p = 0.02$ 。在一批 $n = 100$ 件產品中，令 X 為次品數目。則 $X \sim \text{Bin}(100, 0.02)$ ，且

$$\mathbb{E}[X] = 100(0.02) = 2.$$

次品不多於 2 件的概率為

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 \binom{100}{k} (0.02)^k (0.98)^{100-k} \approx 0.677.$$

例題 7：泊松到達與指數等候時間

顧客以平均每小時 12 人的速率到達服務窗口。若以泊松模型描述到達過程，則一小時內的到達人數為 $X \sim \text{Pois}(12)$ ：

$$\mathbb{P}(X = 10) = e^{-12} \frac{12^{10}}{10!} \approx 0.105.$$

直至下一名顧客到達的等候時間為 $T \sim \text{Exp}(12)$ 小時，故

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{12} \text{ 小時} = 5 \text{ 分鐘}.$$

這是隊列模擬的概率基礎。

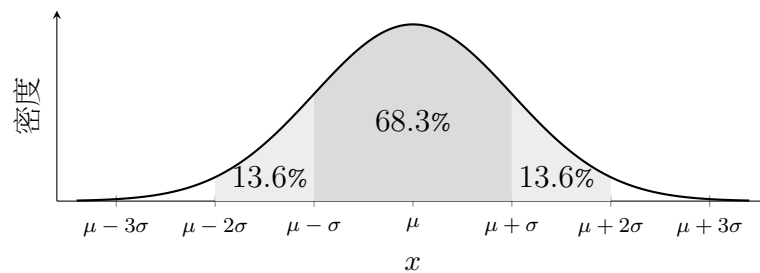


圖 5: 正態分佈常用於描述測量誤差、自然變異與抽樣分佈。約 68.3% 的數值位於平均值的一個標準差範圍內。

檢查點：檢查點

下列各情況應使用哪一種分佈？

1. 未來 10 分鐘內到達的學生人數。
2. 隨機選出的零件是否有缺陷。
3. 直至下一名顧客到達的等候時間。
4. 感測器重複讀數的測量誤差。

6 蒙地卡羅、大數定律與中心極限定理

概率與模擬之間的連繫很簡單：若無法精確計算某個量，有時可透過反覆進行隨機試驗作出估計，而相關理論則解釋估計為何會逐漸改善。

大數定律

令 $X_1, X_2, \dots$ 為平均值等於 μ 的獨立同分佈隨機變量。樣本平均值

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

依概率收斂至 μ 。以建模語言來說，反覆模擬所得的平均值會趨近期望值。

中心極限定理

若 $X_1, \dots, X_n$ 獨立同分佈，平均值為 μ 、方差為 σ^2 ，則當 n 足夠大時，

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

因此， μ 的近似 95% 置信區間為

$$\bar{X}_n \pm 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}},$$

其中 s 為樣本標準差。

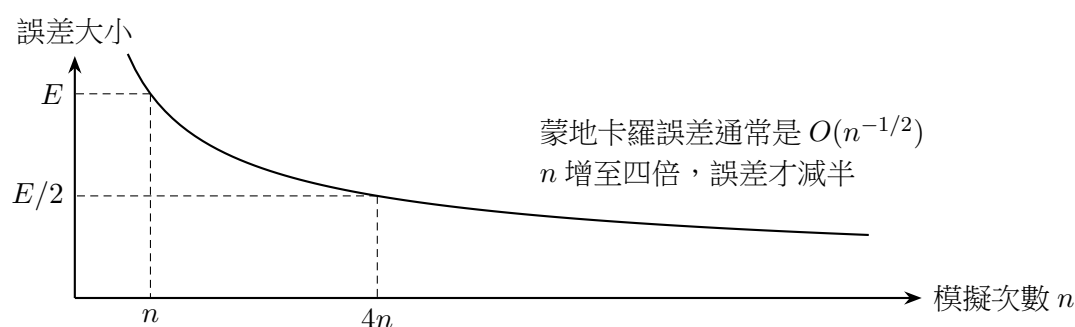


圖 6: $1/\sqrt{n}$ 收斂速率解釋了蒙地卡羅方法為何靈活，卻往往收斂緩慢。

例題 8：蒙地卡羅的樣本數目

假設某個蒙地卡羅估計量是伯努利指標的平均值，所以其標準差最多為 $1/2$ 。要令正態近似的 95% 置信區間半寬最多為 0.005， n 至少應為多少？

$$1.96 \frac{1/2}{\sqrt{n}} \leq 0.005 \implies \sqrt{n} \geq 196 \implies n \geq 38416.$$

因此，在這個最壞情況的方差上界下，正態近似設計至少需要 38416 個樣本。當所估計的概率接近 0 或 1 時，仍須另行核查有限樣本的覆蓋率。

模型檢視：報告模擬不確定性

競賽報告不應只列出模擬估計值，還應交代重複次數、標準誤、置信區間，以及在合理擾動參數後結論會否改變。

7 第一個馬爾可夫鏈模型

離散時間馬爾可夫鏈

若有限狀態空間上的序列 $X_0, X_1, X_2, \dots$ 之下一個狀態只取決於目前狀態，而不取決於完整歷史，便稱為馬爾可夫鏈：

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \dots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}.$$

矩陣 $P = (P_{ij})$ 是轉移矩陣；其每一行的總和均為 1。

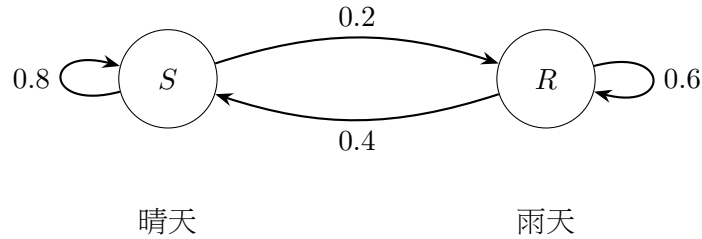


圖 7: 描述天氣的二狀態馬爾可夫鏈。由每個狀態離開的概率總和為 1。

例題 9：兩日後的天氣預測

狀態 S 表示晴天， R 表示雨天。假設

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix},$$

其中各行表示今日天氣，各列表示明日天氣。若今日是晴天，兩日後的分佈為

$$(1, 0)P^2 = (1, 0) \begin{pmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{pmatrix} = (0.72, 0.28).$$

因此，兩日後下雨的概率為 0.28。

例題 10：平穩分佈

平穩分佈 $\pi = (\pi_S, \pi_R)$ 滿足 $\pi P = \pi$ 及 $\pi_S + \pi_R = 1$ 。由天氣轉移矩陣可得

$$\pi_S = 0.8\pi_S + 0.4\pi_R \implies 0.2\pi_S = 0.4\pi_R \implies \pi_S = 2\pi_R.$$

再結合 $\pi_S + \pi_R = 1$ ，得

$$\pi = (2/3, 1/3).$$

長期而言，約三分之二的日子是晴天。

8 分層建模工作坊

工作坊任務：飯堂隊列的不確定性

某飯堂平均每 10 分鐘有 18 名學生到達。繁忙時段的到達過程以泊松模型描述。

1. 計算未來 10 分鐘恰好有 20 人到達的概率。
2. 計算或近似計算多於 24 人到達的概率。
3. 若一名服務人員每 10 分鐘可服務 20 名學生，這會產生甚麼風險？
4. 撰寫一段文字，解釋泊松假設是否合理。

競賽式報告段落

我們把每個 10 分鐘時段的到達人數建模為 $X \sim \text{Pois}(18)$ ，並假設在短暫繁忙時段內，各次到達互相獨立且速率大致固定。由此可得 $\mathbb{E}[X] = 18$ 及 $\text{Var}(X) = 18$ ，所以典型波動約為 $\sqrt{18} \approx 4.24$ 人。由於每名服務人員每 10 分鐘只能服務 20 名學生，系統可能在不可忽略的時段比例中超出負荷。因此，我們建議評估服務容量時，不應只考慮平均到達率，還應考慮上尾概率 $\mathbb{P}(X > 20)$ 及結果對估計速率的敏感度。

模型檢視：模型批判

概率模型是假設而非事實。泊松到達模型假設各次到達互相獨立，而且速率大致固定。若學生在鐘聲響起後成群到達，獨立性假設便很薄弱；若午膳期間的速率急劇改變，固定速率假設亦很薄弱。模型效度驗證應把實際到達人數的平均值與變異程度同模型比較。

9 核心練習與延伸問題

核心練習

1. 擲兩顆公平骰子。求 $\mathbb{P}(\text{點數和} = 8)$ 及 $\mathbb{P}(\text{點數和} \geq 10)$ 。
2. 一個袋內有 5 個紅球及 3 個藍球。不放回地抽取兩球，求兩球均為紅球的概率。
3. 一間工廠有兩部機器。機器 A 生產 70% 的產品，次品率為 1%；機器 B 生產 30% 的產品，次品率為 4%。隨機選出的產品是次品，求它來自 B 的概率。
4. 令 X 為擲公平硬幣 4 次所得的正面次數。寫出其分佈，並計算 $\mathbb{E}[X]$ 。
5. 若 $X \sim \text{Pois}(5)$ ，計算 $\mathbb{P}(X = 3)$ 及 $\mathbb{P}(X = 0)$ 。
6. 若 $T \sim \text{Exp}(6)$ 小時，求 $\mathbb{E}[T]$ 及 $\mathbb{P}(T > 0.5)$ 。

練習核查與提示

1. 兩個概率分別為 $5/36$ 及 $1/6$ 。
2. 概率為 $\binom{5}{2}/\binom{8}{2} = 5/14$ 。
3. 貝葉斯公式給出 $0.30(0.04)/[0.70(0.01) + 0.30(0.04)] = 12/19$ 。
4. $X \sim \text{Bin}(4, 1/2)$ ，所以 $\mathbb{P}(X = k) = \binom{4}{k}/16$ 且 $\mathbb{E}[X] = 2$ 。
5. 兩個概率分別為 $e^{-5}5^3/3! \approx 0.14037$ 及 $e^{-5} \approx 0.006738$ 。

6. $\mathbb{E}[T] = 1/6$ 小時 = 10 分鐘，而 $\mathbb{P}(T > 0.5) = e^{-3} \approx 0.0498$ 。

建模挑戰

一個小型支援中心接收請求的過程為泊松過程，速率是每小時 $\lambda = 10$ 個。服務時間近似服從平均值為 5 分鐘的指數分佈。

1. 把平均服務時間轉換為每小時的服務速率 μ 。
2. 計算使用率 $\rho = \lambda/\mu$ 。
3. 解釋 ρ 接近 1 的含意。
4. 提出一項可用於驗證到達率假設的數據來源，以及一項可用於驗證服務時間假設的數據來源。

建模核查

服務速率為每小時 $\mu = 12$ 個，而 $\rho = 10/12 = 5/6 \approx 0.833$ 。應把它解釋為擬合所得的負荷指標，而非泊松到達或指數服務時間成立的證明。完整的模型效度驗證計劃應指定帶時間戳的到達數據、實際服務時長、時間變化與相依性的診斷，以及留出數據比較。

延伸練習

1. 證明：若 A 與 B 互相獨立，則 A 與 B^c 亦互相獨立。
2. 令 $X \sim U(0, 1)$ 及 $Y = -\ln X$ 。推導 Y 的 CDF，並識別其分佈。
3. 令 $X_1, \dots, X_n$ 為獨立伯努利 (p) 隨機變量。利用期望值的線性性質證明 $\mathbb{E}[\sum X_i] = np$ 。
4. 在天氣馬爾可夫鏈中，若今日是雨天，計算三日後為晴天的概率。
5. 舉出一個 $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ，但 X 與 Y 並不獨立的例子。

延伸提示

第 1 題使用 $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ 。在第 2 題，當 $y \geq 0$ 時， $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ ，故 $Y \sim \text{Exp}(1)$ 。第 3 題可把各期望值相加。第 4 題中，三日後為晴天的概率是 0.624。第 5 題的一個例子是 $X \sim U(-1, 1)$ 、 $Y = X^2$ ：兩者的協方差為 0，但變量並不獨立。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《基礎統計學》第二版（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。