

數學建模課程

補充 7：定積分、累積與數值積分

Kenneth Sok Kin Cheng

2026 年 8 月 20 日修訂

學習目標

在這節兩小時補充課結束時，學生應能：

- 解釋定積分作為有符號面積、累積變化和平均值；
- 使用左矩形、右矩形和中點矩形建構並解讀黎曼和；
- 利用微積分基本定理來計算基本定積分；
- 在簡單的建模案例中應用換元積分法和分部積分法；
- 識別積分是否為反常積分，以及它是否收斂；
- 比較矩形法、梯形法、辛普森法與蒙地卡羅方法作為數值積分工具。

1 從面積到累積變化

定積分不僅僅是一種計算幾何面積的方法。在建模中，它通常代表一個累積的量：水進入水箱的總量、時間上的總成本、平均庫存、概率質量或總污染物負載。相同的符號

$$\int_a^b f(x) dx$$

可能表示面積、總變化或平均效應，視乎 f 代表甚麼。

啟動活動：積分量度甚麼？

假設 $r(t)$ 是學生到達食堂的到達速率，單位是每分鐘的學生數。那麼

$$\int_0^{20} r(t) dt$$

代表甚麼？它不是速率，而是首 20 分鐘內到達的學生總人數。

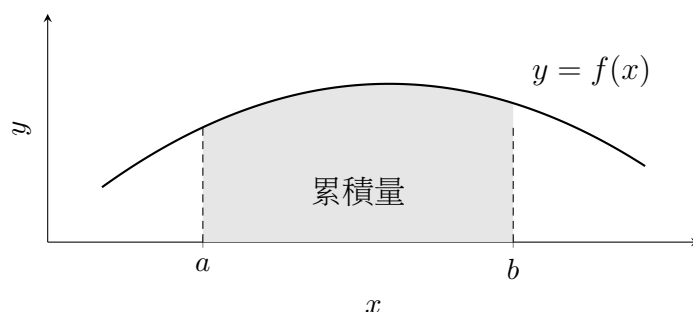


圖 1: 定積分在一個區間上累積垂直量 $f(x)$ 。如果 f 是速率，則積分是總變化。如果 f 是密度，則積分是總質量。

2 黎曼和：構建積分

區間劃分與黎曼和

$[a, b]$ 的一個區間劃分是以下分點數列

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

第 k 個子區間的寬度是 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 。如果 x_k^* 是子區間中的一個樣本點，對應的黎曼和是

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

對於一個等距劃分， $\Delta x = (b - a)/n$ 。常見的選擇是左端點、右端點和中點。

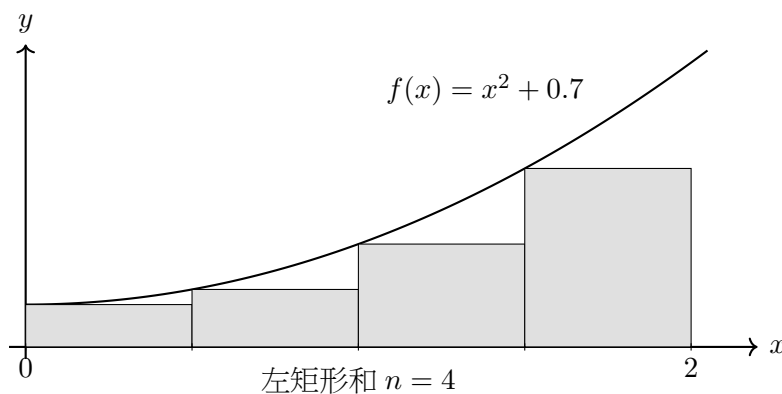


圖 2: 左黎曼和使用每個子區間左端點的高度。對於增函數，它會低估面積。

計算範例 1：左黎曼和

使用 $n = 4$ 個等寬子區間的左黎曼和近似

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx$$

這裡 $\Delta x = 0.5$ ，左樣本點為 $0, 0.5, 1, 1.5$ 。因此

$$S_L = 0.5 [f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5)] = 0.5(1 + 1.25 + 2 + 3.25) = 3.75.$$

精確值稍後為 $14/3 \approx 4.667$ ，因此左和低估了。

定積分

如果區間劃分的網格趨近於零時，黎曼和收斂於一個唯一的數，我們定義

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

當 $f \geq 0$ 時，這代表面積。當 f 改變符號時，它代表有符號面積：在 x 軸上方的面積貢獻為正，在下方的面積貢獻為負。

檢查點：檢查點

對於 $[a, b]$ 上的增正函數，左和或右和會更大？使用矩形而非公式來解釋。

3 微積分基本定理

微積分基本定理連接了補充章節 5 和本課程中的兩個概念：導數與積分。

微積分基本定理

設 f 在 $[a, b]$ 上連續。

- 第一部分：如果 $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ ，則 $A'(x) = f(x)$ 。
- 第二部分：如果 $F'(x) = f(x)$ ，則

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

第一部分說明累積量的變化率是 $f(x)$ ；第二部分說明定積分可以透過原函數求值。

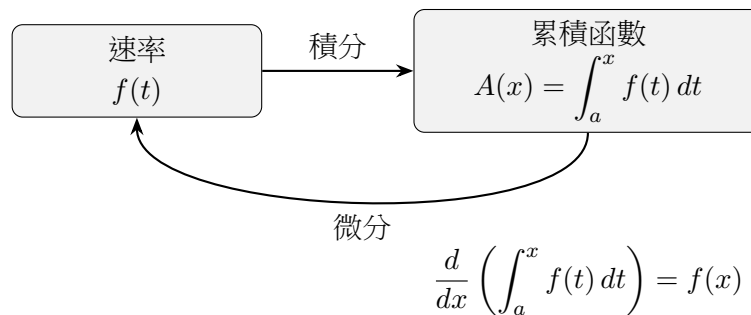


圖 3: 微積分基本定理第一部分說明，在累積函數的設定下，積分與微分互相抵消。

例題 2：利用微積分基本定理求值

求

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx.$$

原函數為 $F(x) = x^3/3 + x$ 。因此

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

這解釋了為甚麼 $n = 4$ 的左端點和 3.75 只是近似值。

例題 3：對積分求導

計算

$$\frac{d}{dx} \left(\int_2^{x^2} \sin(t^2) dt \right).$$

令 $u = x^2$ 。根據微積分基本定理第一部分和鏈式法則，

$$\frac{d}{dx} \int_2^u \sin(t^2) dt = \sin(u^2) \frac{du}{dx} = 2x \sin(x^4).$$

被積函數不一定有初等原函數；導數仍然很容易求得。

4 換元積分法與分部積分法

換元積分法作為反向鏈式法則

如果 $u = g(x)$ 且 $du = g'(x) dx$ ，則

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

對於定積分，改變極限： $x = a \mapsto u = g(a)$ 和 $x = b \mapsto u = g(b)$ 。

計算範例 4：帶有定積分的換元法

求

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx.$$

令 $u = x^2$ ，則 $du = 2x dx$ 且 $x dx = \frac{1}{2} du$ 。極限變為 $0 \mapsto 0$ 和 $2 \mapsto 4$ 。因此

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

分部積分法作為乘積法則的逆用

從 $(uv)' = u'v + uv'$ ，我們得到

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

一個有用的選擇規則是 **LIATE**：對數、反三角、代數、三角、指數。列表中較早出現的函數通常是 u 的一個好選擇。

計算範例 5：分部積分法

求

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

選擇 $u = x$ 和 $dv = e^x dx$ 。則 $du = dx$ 且 $v = e^x$ 。因此

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$$

檢查點：檢查點

使用換元積分法時，首要問題是：「哪個內函數的導數亦出現在被積函數中？」使用分部積分法時，首要問題是：「哪一部分在微分後會變得更簡單？」

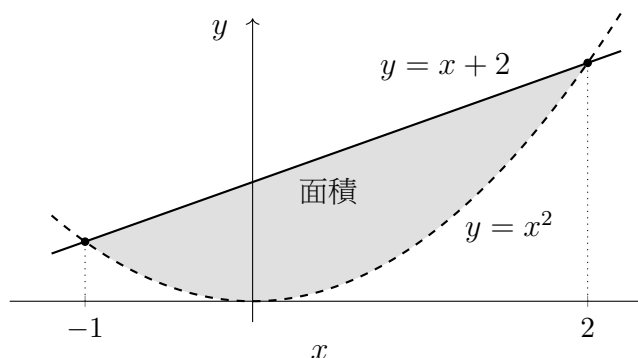
5 定積分的應用

兩曲線之間的面積

如果 $f(x) \geq g(x)$ 在 $[a, b]$ 上成立，則兩曲線之間的面積為

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

順序很重要：上曲線減去下曲線。



$$\text{面積} = \int_{-1}^2 [(x + 2) - x^2] dx$$

圖 4: 計算兩曲線之間的面積，積分上曲線減去下曲線。陰影區域由 $y = x + 2$ 和 $y = x^2$ 在 $x = -1$ 到 $x = 2$ 之間所界定。

計算範例 6：兩曲線之間的面積

求 $y = x^2$ 和 $y = x + 2$ 所圍成的面積。

交點滿足 $x^2 = x + 2$ ，即 $x = -1$ 或 $x = 2$ 。在此區間上， $x + 2 \geq x^2$ 。因此

$$A = \int_{-1}^2 [(x + 2) - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

平均值與累積變化量

連續函數 f 在 $[a, b]$ 上的平均值為

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

如果 $Q'(t) = r(t)$ ，則

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b r(t) dt.$$

這是流動、污染、人口、庫存和能源模型中使用的形式。

計算範例 7：平均庫存

在 EOQ 模型中，假設庫存在週期長度為 T 的過程中從 Q 線性減少到 0：

$$I(t) = Q \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

平均庫存為

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T Q \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = \frac{Q}{T} \left[t - \frac{t^2}{2T}\right]_0^T = \frac{Q}{2}.$$

這個熟悉的結果是一個積分陳述，而不僅僅是幾何三角形的論證。

模型檢視：模型批判：單位與符號

在報告積分之前，請檢查其單位。如果 $r(t)$ 是升/小時，而 t 以小時衡量，則 $\int r(t) dt$ 是升。同時檢查有符號的面積是否合理：負值可能代表流出、損失或修正，而不僅僅是幾何上的負面積。

6 反常積分與收斂性

有些建模積分延伸至無限區間或包含無界被積函數。這些是反常積分。它們必須使用極限來定義。

兩種常見的反常積分

對於無限區間，

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

對於在 a 處的無界奇點，

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

如果極限存在，則積分收斂。否則它發散。

計算範例 8：收斂與發散的比較

比較

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \quad \text{與} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x} dx.$$

對於前者，

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1,$$

因此它收斂。對於後者，

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty,$$

因此它發散。無限區間並不自動意味著無限面積。

檢查點：檢查點

為甚麼計算 $\int_{-1}^1 1/x^2 dx = [-1/x]_{-1}^1$ 並不成立？請找出隱藏的不連續點。

7 數值積分

許多建模中的積分沒有初等原函數。例如， $\int e^{-x^2} dx$ 出現在統計學中，但不能用初等函數表示。我們因此採用數值近似。

梯形法與辛普森法

對於 $[a, b]$ 的正則劃分，有 n 個子區間和 $h = (b - a)/n$ ：

$$T_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

如果 n 是偶數，辛普森法是

$$S_n = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

梯形法使用直線面板；辛普森法使用二次面板。

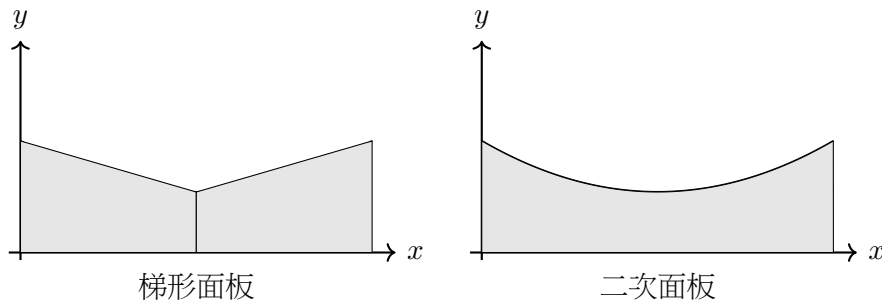


圖 5: 梯形面板由直線段近似曲線。辛普森法以二次曲線近似相鄰兩個子區間。

計算範例 9：比較數值規則

使用 $n = 4$ 個子區間估計

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

當 $h = 0.25$ 時，函數值約為

x_k	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$e^{-x_k^2}$	1.00000	0.93941	0.77880	0.56978	0.36788

因此

$$T_4 = 0.74298, \quad S_4 = 0.74685.$$

精確值約為 0.746824，因此辛普森法在此例更準確。

模型檢視：建模報告中的數值積分

一份好的報告不應只寫「我們使用了辛普森法」，還應交代區間、步長、停止準則和運算核查。例如：

我們以步長 $h = 0.01$ 的辛普森法估計積分。把子區間數目加倍後，所得數值的變化小於 10^{-4} ，因此數值誤差相對於資料不確定性很小。

8 總結與練習

關鍵觀念

- 黎曼和透過有限的區間來近似積分。
- 定積分是累積運算符：面積、總變化量、平均值、概率或質量。
- 微積分基本定理連接了累積的變化量與瞬時速率。
- 換元積分法是反向鏈式法則；分部積分法是反向乘法法則。
- 反常積分需要極限，並且可能收斂或發散。
- 數值積分是一種建模選擇；必須交代精度與運算成本的理據。

核心練習

1. 對 $\int_0^2 x^2 dx$ 在 $n = 4$ 時計算左端點和、右端點和與中點和，並與精確值比較。
2. 使用微積分基本定理求 $\int_1^4 (3x^2 - 2x + 5) dx$ 的值。
3. 使用換元積分法求 $\int_0^1 2x(1 + x^2)^5 dx$ 的值。
4. 使用分部積分法求 $\int_1^e \ln x dx$ 的值。
5. 判斷 $\int_1^\infty x^{-3/2} dx$ 是否收斂。
6. 找出函數 $f(x) = x^2$ 在區間 $[0, 3]$ 上的平均值。

練習核對與提示

1. 左端點和、右端點和與中點和分別為 $7/4$ 、 $15/4$ 與 $21/8$ ；精確值為 $8/3$ 。
2. 由微積分基本定理可得 63。
3. 令 $u = 1 + x^2$ ，積分值為 $21/2$ 。
4. 分部積分法給出 1。
5. 此反常積分收斂至 2。
6. 平均值為 3。

建模挑戰：食堂流入量

在午餐的前 30 分鐘內，學生到達速率採用下式建模：

$$r(t) = 18 + 0.9t - 0.03t^2, \quad 0 \leq t \leq 30,$$

其中 t 以分鐘計量， $r(t)$ 以每分鐘學生的數量表示。

1. 計算前 30 分鐘內到達的學生總數。
2. 求平均到達速率。
3. 解釋使用平滑的速率函數來表示學生到達的其中一個假設。
4. 建議一種利用觀測所得的排隊資料進行模型效度驗證的方法。

建模核對

模型預測共有 675 人到達，平均到達速率為每分鐘 22.5 名學生。完整答案亦須區分平滑的期望速率與離散到達事件，說明資料收集區間及量度規則，並提出樣本外比較：把速率積分所得的預測人數與觀測人數比較。

延伸練習

1. 證明：若 f 是奇函數且在 $[-a, a]$ 上可積分，則 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 。
2. 使用 $n = 4$ 的辛普森法近似 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ，並與 $\pi/4$ 比較。
3. 核證當 $\lambda > 0$ 時， $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ ，並解釋這對概率密度模型的意義。

延伸提示

第 1 題可在其中一半區間令 $u = -x$ 。第 2 題的辛普森法結果為 $8011/10200 \approx 0.785392$ ，接近 $\pi/4 \approx 0.785398$ 。第 3 題應先計算截斷後的積分，再令其上限趨向無窮；所得值為 1，符合概率密度的規範化要求。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第一冊（OpenStax）
- 《微積分》第二冊（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。