

# 數學建模課程

## 補充 6：導數的應用與最佳化

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

### 學習目標

在本次兩小時的補充課程結束後，學生應能夠：

- 使用  $f'$  的符號判斷遞增 / 遞減行為；
- 找出並分類臨界點；
- 使用  $f''$  討論凹凸性及拐點；
- 根據定義域、漸近線、導數符號及凹凸性繪製曲線草圖；
- 建構並求解一元最佳化模型；
- 把以導數為基礎的結論表述為建模證據，而不只是計算結果。

## 1 導數作為最佳化與模型設計的證據

在建模報告中，導數本身甚少是終點；它通常支持以下一類陳述：

「等候時間起初緩慢上升，接近容量時則急劇增加。」

一階導數告訴我們變化的方向及速率；二階導數則告訴我們變化正在加速還是減速。這些概念把微積分變成實際的決策語言：何時停止生產、最大值在何處、政策是否有邊際效益遞減，以及模型是否在邊界附近變得不穩定。

### 啟動活動：不作計算也能解讀導數

一個機械人配送系統的行程時間函數為  $T(q)$ ，其中  $q$  是每小時訂單數。假設在  $q = 40$  時， $T'(40) > 0$  且  $T''(40) > 0$ 。

你可以用文字說明甚麼？良好的答案不只是「導數為正」，而應說：

在每小時 40 張訂單時，增加需求會延長行程時間，而且增加幅度本身也正在加速。系統正走向擁塞。

## 2 極值與臨界點

### 極值

設  $f$  定義於定義域  $D$ 。

- 若對所有  $x \in D$  均有  $f(c) \geq f(x)$ ，則  $f(c)$  是絕對最大值。
- 若對所有  $x \in D$  均有  $f(c) \leq f(x)$ ，則  $f(c)$  是絕對最小值。
- 若比較只需在  $c$  附近成立，則  $f(c)$  是局部最大值或局部最小值。

若  $f'(c) = 0$  或  $f'(c)$  不存在，則點  $c$  是臨界點。

### 閉區間方法

若  $f$  在  $[a, b]$  上連續，極值定理保證絕對最大值及絕對最小值存在。求取方法如下：

1. 找出  $(a, b)$  內所有臨界點；
2. 計算  $f$  在各臨界點及端點的值；
3. 比較各數值。

### 範例 1：閉區間上的絕對極值

求

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \quad \text{在 } [-2, 3] \text{ 上}$$

的絕對最大值及最小值。首先，

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1).$$

在  $(-2, 3)$  內的臨界點為  $x = -1$  及  $x = 2$ 。比較候選值：

| $x$    | -2 | -1 | 2   | 3  |
|--------|----|----|-----|----|
| $f(x)$ | 1  | 12 | -15 | -4 |

因此絕對最大值為  $x = -1$  時的 12，絕對最小值為  $x = 2$  時的 -15。

### 檢查點：檢核

端點為何重要？因為閉區間上的絕對最大值或最小值可以出現在邊界，即使該處  $f'(x) \neq 0$ 。

## 3 一階導數判別法：變化方向

### 由 $f'$ 的符號判斷單調性

若在一個區間上  $f'(x) > 0$ ，則  $f$  在該區間遞增。若  $f'(x) < 0$ ，則  $f$  遞減。這是中值定理的結果。

### 一階導數判別法

設  $c$  是  $f$  連續的一個臨界點。

- 若  $f'$  在  $c$  從 + 變為 -，則  $f(c)$  是局部最大值。
- 若  $f'$  在  $c$  從 - 變為 +，則  $f(c)$  是局部最小值。
- 若  $f'$  不改變符號，則  $c$  不是局部極值點。

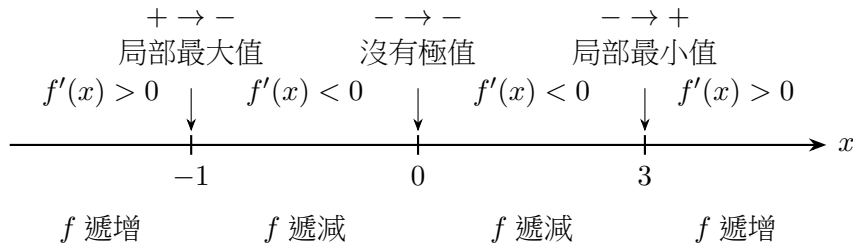


圖 1: 一階導數符號圖。由於  $f'(x) > 0$  表示  $f$  遞增， $f'(x) < 0$  表示  $f$  遞減，所以從  $+$  變為  $-$  產生局部最大值，而從  $-$  變為  $+$  產生局部最小值。在  $x = 0$ ， $f'$  的符號沒有改變，因此沒有極值。

### 範例 2：一階導數判別法

分析

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

的局部極值。我們計算

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

臨界點為  $x = 0$  及  $x = 3$ 。由於  $4x^2 \geq 0$ ，在 0 以外， $f'(x)$  的符號由  $x - 3$  決定：

| $x$     | $(-\infty, 0)$ | $0$ | $(0, 3)$   | $3$ | $(3, \infty)$ |
|---------|----------------|-----|------------|-----|---------------|
| $f'(x)$ | $-$            | $0$ | $-$        | $0$ | $+$           |
| $f$     | $\searrow$     |     | $\searrow$ |     | $\nearrow$    |

在  $x = 0$ ， $f'$  沒有改變符號，所以沒有極值。在  $x = 3$ ， $f'$  由負變正，所以  $f$  有局部最小值，且  $f(3) = -27$ 。

## 4 凹凸性與二階導數

### 凹凸性與拐點

二階導數測量斜率如何改變。

- 若  $f''(x) > 0$ ，則  $f'$  遞增，圖像凹向上。
- 若  $f''(x) < 0$ ，則  $f'$  遞減，圖像凹向下。
- 拐點出現在凹凸性改變之處。

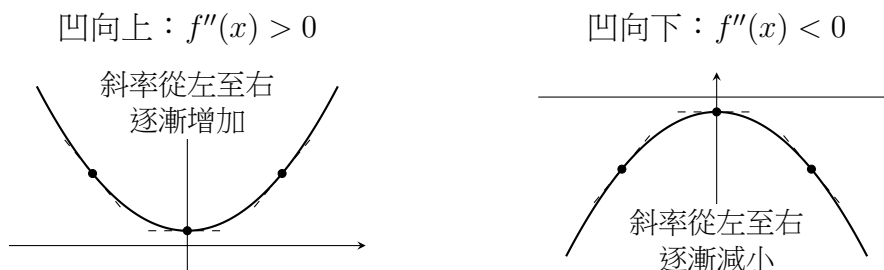


圖 2: 凹凸性描述切線斜率如何改變。凹向上的圖像有  $f''(x) > 0$ ，切線斜率從左至右增加；凹向下的圖像有  $f''(x) < 0$ ，切線斜率從左至右減小。

## 二階導數判別法

假設  $f'(c) = 0$ ，而  $f''$  在  $c$  附近連續。

- 若  $f''(c) > 0$ ，則  $f$  在  $c$  有局部最小值。
- 若  $f''(c) < 0$ ，則  $f$  在  $c$  有局部最大值。
- 若  $f''(c) = 0$ ，判別結果不確定；應使用一階導數判別法。

## 範例 3：凹凸性與拐點

求

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$$

的拐點。我們有

$$f'(x) = 4x^3 - 12x, \quad f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1).$$

可能的拐點為  $x = -1$  及  $x = 1$ 。檢查  $f''$  的符號：

| $x$      | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|----------|-----------------|-----------|---------------|
| $f''(x)$ | +               | -         | +             |
| 凹凸性      | 向上              | 向下        | 向上            |

凹凸性在  $x = -1$  及  $x = 1$  都有改變。由於  $f(-1) = f(1) = -4$ ，拐點為  $(-1, -4)$  及  $(1, -4)$ 。

## 5 以曲線草圖診斷模型

繪製曲線草圖不只是繪圖練習。在建模中，它可以診斷公式在哪些區域有效、何處出現不現實的發散、何處反應飽和，以及模型預測何處有轉折點。

## 曲線草圖檢核表

對  $y = f(x)$ ，分析：

1. 定義域及排除值；
2. 截距及對稱性；
3. 垂直、水平或斜漸近線；
4.  $f'$  的符號圖及局部極值；
5.  $f''$  的符號圖及拐點；
6. 原情境中的解釋。

## 範例 4：有理函數曲線草圖

繪製並解釋

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

定義域為  $x \neq \pm 1$ 。函數是偶函數，在  $x = -1$  及  $x = 1$  有垂直漸近線，而且

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1,$$

所以  $y = 1$  是水平漸近線。另外，

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2},$$

因此在每個定義域區間內， $f$  對  $x < 0$  遞增，對  $x > 0$  遞減。點  $(0, 0)$  是中間分支上的局部最大值。

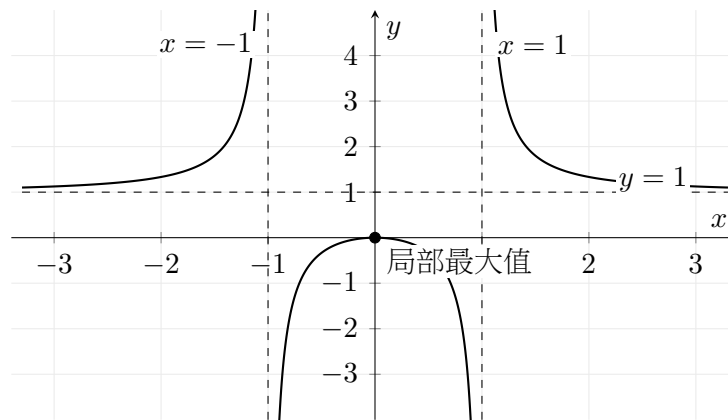


圖 3:  $f(x) = x^2 / (x^2 - 1)$  的清晰曲線草圖。標籤放在密集區域以外，並以白色背景框住，避免與分支及漸近線重疊。

模型解釋。若這個公式代表反應比率，則  $x = \pm 1$  是危險閾值：模型預測該處出現無界行為。水平漸近線  $y = 1$  則顯示遠離閾值時反應趨於穩定。

#### 模型檢視：模型批判：導數證據

以導數繪製的草圖是否有意義，取決於公式及定義域。在建模報告中使用微積分時，應陳述：

- 實際問題所用的定義域；
- 被排除的點是物理邊界還是數學假象；
- 最大值／最小值在可行範圍內部還是邊界上出現；
- 垂直漸近線表示真實危險、容量失效，還是模型失效。

## 6 應用最佳化

### 最佳化工作流程

一個良好的最佳化解答有四個層次：

1. 定義變量及其單位；
  2. 寫出目標與約束；
  3. 化為現實定義域上的一元函數；
  4. 核證最優解，並在情境中解釋。
- 忽略定義域是最常見的建模錯誤之一。

## 範例 5：河邊圍欄

一位農夫有 200 m 圍欄，想在一條直河旁圍出一個長方形田地。沿河的一邊毋須圍欄。求使面積最大的長及闊。

令  $x$  為平行於河流的一邊， $y$  為闊。則

$$x + 2y = 200, \quad A = xy.$$

使用  $x = 200 - 2y$ ,

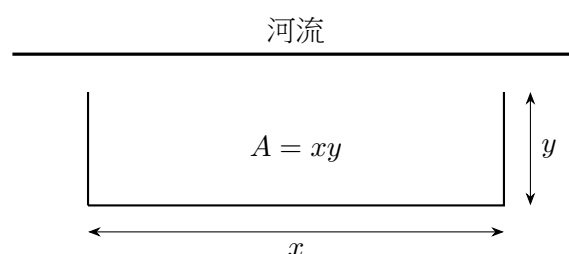
$$A(y) = (200 - 2y)y = 200y - 2y^2, \quad 0 < y < 100.$$

現在

$$A'(y) = 200 - 4y,$$

所以  $A'(y) = 0$  得  $y = 50$ 。由於  $A''(y) = -4 < 0$ ，這給出最大值。因此

$$y = 50 \text{ m}, \quad x = 100 \text{ m}, \quad A_{\max} = 5000 \text{ m}^2.$$



$$\text{已用圍欄} = x + 2y$$

圖 4: 長方形田地建於河旁，只有三邊需要圍欄。因此  $A = xy$ ，圍欄約束為  $x + 2y = 200$ 。

## 範例 6：使利潤最大的生產量

一間製造商每週售出  $q$  件產品。成本為

$$C(q) = 0.01q^2 + 10q + 400,$$

而價格需求方程為

$$p(q) = 50 - 0.02q.$$

求使每週利潤最大的生產量。

收入為

$$R(q) = qp(q) = 50q - 0.02q^2.$$

利潤為

$$P(q) = R(q) - C(q) = (50q - 0.02q^2) - (0.01q^2 + 10q + 400) = 40q - 0.03q^2 - 400.$$

則

$$P'(q) = 40 - 0.06q.$$

令  $P'(q) = 0$ ：

$$q = \frac{40}{0.06} \approx 666.7.$$

由於  $P''(q) = -0.06 < 0$ ，這是連續模型的最大值。實務上應選擇  $q = 666$  或  $q = 667$ ，並比較整數生產量的利潤。

## 檢查點：檢核

為何連續最優值可能不適合表示生產量？因為實際生產可能要求產品數量為整數，亦可能受批量、機器容量或需求不確定性限制。微積分結果是一項指引，不能自動成為最終決策。

## 7 局部近似與牛頓法

對可微函數，切線給出局部線性近似：

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

當精確計算困難，或模型需要快速估計靈敏度時，這種方法十分有用。

## 範例 7：局部線性近似

使用  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $a = 4$  附近的資料近似  $\sqrt{4.1}$ 。

$$f(4) = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(4) = \frac{1}{4}.$$

因此

$$\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

在  $x = 4.1$ ，

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + \frac{1}{4}(0.1) = 2.025.$$

這與實際值 2.0248... 很接近。

## 牛頓法

要解  $f(x) = 0$ ，從猜測值  $x_0$  開始，反覆計算

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

在幾何上， $x_{n+1}$  是  $x_n$  處切線的  $x$  截距。

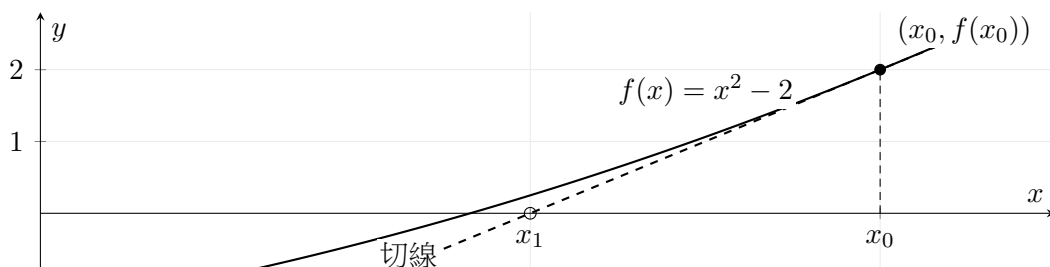


圖 5: 牛頓法對  $f(x) = x^2 - 2$  的一步迭代。從  $x_0$  開始，切線在  $x$  軸的交點就是下一個近似  $x_1$ 。

範例 8：近似  $\sqrt{2}$ 

以  $x_0 = 1$  解  $f(x) = x^2 - 2 = 0$ 。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

| $n$ | $x_n$    |
|-----|----------|
| 0   | 1.000000 |
| 1   | 1.500000 |
| 2   | 1.416667 |
| 3   | 1.414216 |
| 4   | 1.414214 |

牛頓法在這裏收斂得非常快，因為初始猜測合理，而且根是單根。

## 8 分層最佳化工作坊

### 15 分鐘工作坊

選擇一條路線。

核心路線。一個有正方形底、無頂蓋的箱子，體積必須為  $32 \text{ m}^3$ 。求使表面積最小的尺寸。

挑戰路線。求可內接於橢圓

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的最大長方形。

延伸路線。從  $x_0 = 0.7$  開始，使用牛頓法近似  $\cos x = x$  的正解，並解釋迭代為何可信。

### 模型檢視：如何撰寫建模結論

以導數為基礎的優良結論應包含：

1. 正在最佳化的目標；
2. 可行定義域；
3. 臨界點或邊界比較；
4. 核證方法；
5. 實際解釋及限制。

例如：

在連續生產模型內，因為  $P''(q) < 0$ ，利潤函數是凹的，所以臨界點給出全局最大值。最優的連續生產量約為每週 667 件。在營運計劃中，只有在檢查整數利潤及容量約束後才應四捨五入。

## 總結

## 重點整理

## 導數資訊

## 建模解釋

$$f'(x) > 0$$

輸入增加時，輸出增加。

$$f'(x) < 0$$

輸入增加時，輸出減少。

$$f' \text{ 從 } + \rightarrow -$$

局部最大值。

$$f' \text{ 從 } - \rightarrow +$$

局部最小值。

$$f''(x) > 0$$

斜率遞增；反應加速；凹向上。

$$f''(x) < 0$$

斜率遞減；邊際效益遞減或凹向下。

垂直漸近線

可能的容量上限、奇點或模型失效。

閉區間比較

絕對最優值可能在邊界出現。

牛頓迭代

以切線數值求解方程的方法。

## 練習

## 核心練習

- 求  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  在  $[-1/2, 4]$  上的絕對最大值及最小值。
- 對  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$ ，求臨界點、遞增／遞減區間及局部極值。
- 求  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$  的所有拐點。
- 使用曲線草圖檢核表繪製  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ 。
- 一間製造商的成本為  $C(q) = 0.01q^2 + 10q + 400$ ，價格為  $p = 50 - 0.02q$ 。重新完成利潤範例，並比較整數選擇  $q = 666$  及  $q = 667$ 。

## 核心練習檢核

第 1 題，把端點與臨界點  $x = 0, 2$  比較：絕對最小值是在  $x = 2$  的  $-3$ ，絕對最大值是在  $x = 4$  的  $17$ 。第 2 題的臨界點為  $x = -3, 2$ ，分別給出局部最大值  $86$  及局部最小值  $-39$ 。第 3 題，在由  $x = 0$  及  $x = (3 \pm \sqrt{3})/2$  分割出的四個區間上檢查凹凸性。第 4 題，多項式除法得到  $f(x) = x - 2 - 1/(x - 2)$ ；使用此式辨認兩條漸近線。第 5 題，在所述貨幣單位下，整數利潤為  $P(666) = 12933.32$  及  $P(667) = 12933.33$ 。

## 建模挑戰

一個食堂櫃位每分鐘最多可服務 60 名學生。平均等候時間的一個簡單擁塞模型是

$$W(q) = \frac{q}{60 - q}, \quad 0 < q < 60,$$

其中  $q$  是到達率。

- 求  $W'(q)$  及  $W''(q)$ 。
- 解釋  $W'$  及  $W''$  的符號。
- 當  $q \rightarrow 60^-$  時發生甚麼？
- 撰寫一項簡短建議，解釋為何接近容量運作具有風險。

## 建模挑戰檢核

你應得到

$$W'(q) = \frac{60}{(60-q)^2} > 0, \quad W''(q) = \frac{120}{(60-q)^3} > 0, \quad \lim_{q \rightarrow 60^-} W(q) = +\infty.$$

一項站得住腳的建議會指出可行定義域，解釋延誤既在增加、增幅亦在加速，並把發散視為容量問題或模型失效的警告，而不是字面上的無限預測。

## 延伸練習

1. 從  $x_0 = 1$  開始，使用牛頓法求  $x^3 + 2x - 5 = 0$  的正根。
2. 求  $\cos x$  的麥克勞林多項式  $P_4(x)$ ，並用它近似  $\cos(0.2)$ 。
3. 求半圓  $x^2 + y^2 = R^2$ 、 $y \geq 0$  下方內接長方形的最大尺寸。

## 延伸提示

第 1 題使用  $x_{n+1} = x_n - (x_n^3 + 2x_n - 5)/(3x_n^2 + 2)$ ；正根約為 1.32827。第 2 題， $P_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$ ，所以  $P_4(0.2) \approx 0.9800667$ 。第 3 題，把長方形面積寫成  $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$ ：最大化尺寸為  $\sqrt{2}R$  乘  $R/\sqrt{2}$ 。

## 模型審核卡

### 在信任或傳達模型之前先作審核

|           |                         |        |                    |
|-----------|-------------------------|--------|--------------------|
| 目的        | 模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？       | 資料     | 哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？   |
| 假設        | 哪些簡化可能改變答案？             | 單位     | 量綱與尺度是否一致？         |
| 運算 / 程式核證 | 方程、程式、限制與極限情況是否已核對？     | 模型效度驗證 | 是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？ |
| 不確定性      | 測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？ | 倫理     | 誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？ |
| 可重現性      | 是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？      | 溝通     | 主張是否有條件、可追溯且與決策相關？ |

## 延伸閱讀

- 《微積分》第一冊（OpenStax）
- 非線性限制最佳化指南（NEOS Guide）

## 來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

### 學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。