

數學建模課程

補充 5：導數、變化率與局部線性模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次補充課程結束後，讀者應能夠：

1. 將導數解釋為局部斜率、瞬時變化率及靈敏度係數；
2. 透過差商計算簡單導數；
3. 正確運用幕、乘積、商、三角、指數、對數及鏈式法則；
4. 找出函數不可微的常見原因；
5. 在幾何或物理模型中使用隱式、參數式及相關變化率微分；
6. 使用中值定理連繫平均變化率與瞬時變化率；
7. 在建模報告中解釋導數計算，而不是把它們當成孤立的代數步驟。

1 導數是斜率、變化率與靈敏度

在建模中，導數不只是一項微積分運算。它回答一個實際問題：當輸入稍微改變時，輸出改變得有多快？若 $y = f(x)$ ，則 $f'(a)$ 測量在 $x = a$ 附近， x 每改變一個單位時 y 的局部改變量。

啟動：平均速度與某一瞬間的速度

[12 分鐘]

一部機械人在走廊上移動。它在 t 秒後離起點的距離由下式建模：

$$s(t) = 0.4t^2 + 1.2t \quad (0 \leq t \leq 10),$$

其中 s 以米為單位。

1. 計算由 $t = 3$ 至 $t = 5$ 的平均速度。
2. 計算由 $t = 4$ 至 $t = 4.1$ 的平均速度。
3. 在恰好 $t = 4$ 時，速度計應顯示甚麼數值？

討論重點：較短的時間區間提供較局部的資訊。導數就是這些平均變化率的極限值。

核心定義

對函數 f ，若下列極限存在，則 a 處的導數為

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

這個分數是差商，即通過 $(a, f(a))$ 及 $(a+h, f(a+h))$ 的割線斜率。

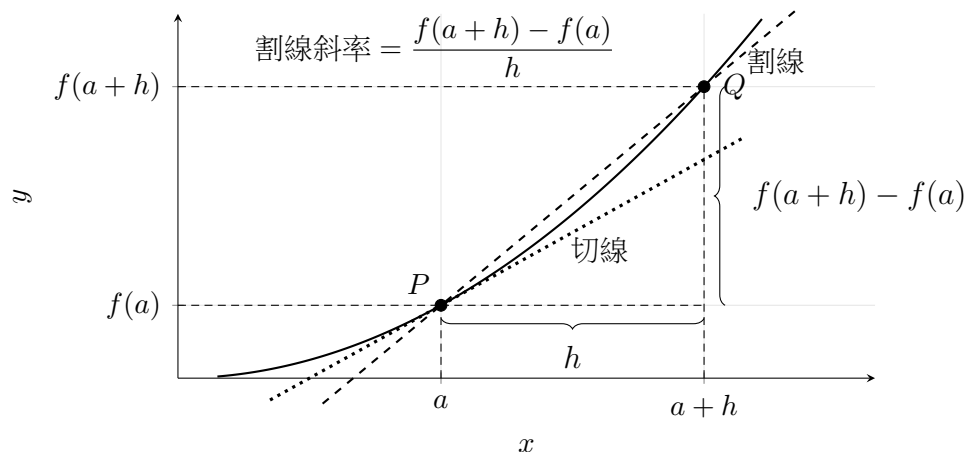


圖 1: a 處的導數是割線斜率的極限： $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 。當 h 變小時，通過 P 與 Q 的割線趨近 P 處的切線。

範例 1：由位置模型求速度

對 $s(t) = 0.4t^2 + 1.2t$ ， $t = 4$ 時的瞬時速度為

$$s'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(4+h) - s(4)}{h}.$$

計算

$$\begin{aligned} s(4+h) &= 0.4(4+h)^2 + 1.2(4+h) \\ &= 0.4(16 + 8h + h^2) + 4.8 + 1.2h \\ &= 11.2 + 4.4h + 0.4h^2, \end{aligned}$$

而 $s(4) = 11.2$ 。因此

$$\frac{s(4+h) - s(4)}{h} = 4.4 + 0.4h \rightarrow 4.4.$$

所以機械人在 $t = 4$ 時的速度為 4.4 m/s 。

檢查點：檢核 1

解釋 $s'(4)$ 的單位。為何它不是以米為單位？

2 由第一原理求導數

在使用規則之前，學生應先體驗這些規則為何成立，避免把導數變成與建模脫節的背誦表格。

範例 2：由定義求 x^2 的導數

令 $f(x) = x^2$ 。則

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

在 $x = 3$ 時，局部斜率為 6。這表示在 $x = 3$ 附近， x 增加 0.01 時， x^2 約增加 0.06。

範例 3： $\sqrt{x}$ 的導數

對 $x > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

導數在 $x = 0$ 附近較大，所以平方根圖像在原點附近陡峭，之後逐漸變平。

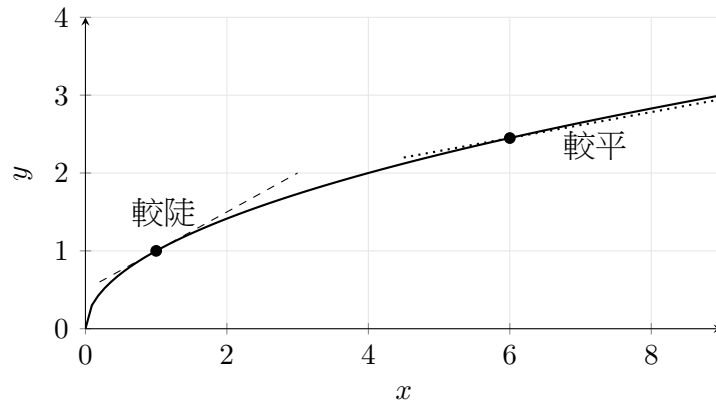


圖 2: $\sqrt{x}$ 的導數隨 x 增加而減小。這是 $1/(2\sqrt{x})$ 一個有用的視覺解釋。

模型檢視：模型批判：導數作為局部線性模型

導數提供局部近似：

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x.$$

它十分有力，但只屬局部。當 Δx 很大或圖像急劇彎曲時，近似可能很差。在建模報告中，務必陳述使用局部近似的區間。

3 高效計算的微分法則

核心導數法則

若 f 及 g 可微，則

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(c) &= 0, & \frac{d}{dx}(x^n) &= nx^{n-1}, & \frac{d}{dx}[cf] &= cf', \\ \frac{d}{dx}(f+g) &= f' + g', & \frac{d}{dx}(fg) &= f'g + fg', & \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{f'g - fg'}{g^2}.\end{aligned}$$

乘積法則不是 $(fg)' = f'g'$ 。商法則也不是分子的導數除以分母的導數。

範例 4：乘積法則與商法則

對

$$F(x) = x^2 \sin x + \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

求導數。對乘積項，

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

對商項，

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right) = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

因此

$$F'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x + \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

範例 5：三角函數與指數函數的導數

對季節性需求模型

$$D(t) = 120 + 30 \sin \left(\frac{2\pi t}{12} \right) + 5e^{0.03t},$$

其中 t 以月為單位，計算瞬時變化率：

$$D'(t) = 30 \cos \left(\frac{2\pi t}{12} \right) \cdot \frac{2\pi}{12} + 5e^{0.03t} \cdot 0.03.$$

故

$$D'(t) = 5\pi \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) + 0.15e^{0.03t}.$$

第一項描述季節性增減；第二項描述長期增長。

檢查點：檢核 2

為何 $\sin(\pi t/6)$ 的導數不只是 $\cos(\pi t/6)$ ？指出所用的法則。

4 鏈式法則作為建模管道

鏈式法則對建模不可或缺，因為許多模型都是管道：輸入影響中間量，而中間量再影響輸出。

鏈式法則

若 $y = f(u)$ 且 $u = g(x)$ ，則

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

以函數記號表示，

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

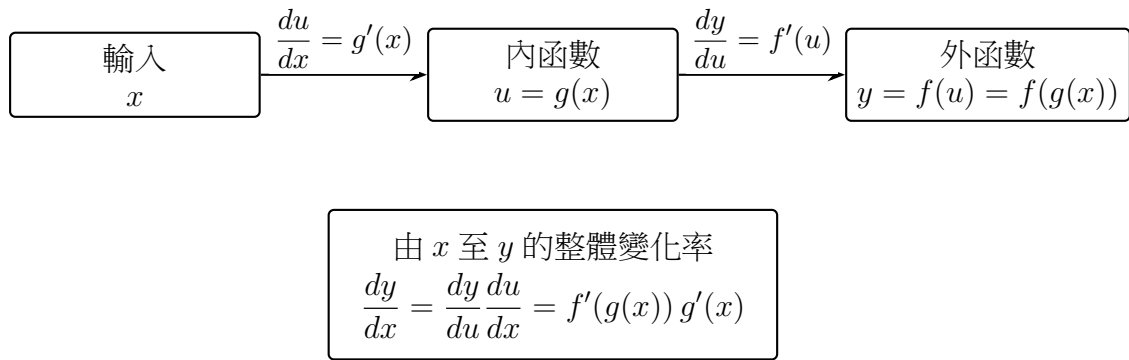


圖 3: 複合函數 $y = f(g(x))$ 的鏈式法則。輸入 x 先改變中間變量 $u = g(x)$ ，再由 u 改變最終輸出 $y = f(u)$ 。因此整體變化率是兩個變化率的乘積。

範例 6：經變換定義的污染濃度指標

一個濃度指標由下式建模：

$$I(t) = \sqrt{1 + 0.4C(t)}, \quad C(t) = 20e^{-0.08t}.$$

求 $I'(t)$ 並解釋其符號。

$$I'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1 + 0.4C(t)}} \cdot 0.4C'(t).$$

由於 $C'(t) = -1.6e^{-0.08t}$ ，

$$I'(t) = \frac{0.2(-1.6e^{-0.08t})}{\sqrt{1 + 8e^{-0.08t}}} < 0.$$

指標正在下降。導數隨時間更接近零，因為指數衰減的絕對幅度逐漸減慢。

範例 7：對數微分

對 $x > 0$ 的 $y = x^x$ 求導數。

$$\ln y = x \ln x.$$

對兩邊微分：

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1.$$

因此

$$y' = x^x (\ln x + 1).$$

當底數及指數都會改變時，這種方法十分有用。

5 導數何時不存在

即使圖像看來簡單，導數仍可能不存在。在模型中，這種失效可以標示切換、閾值、碰撞、容量邊界或政策轉變。

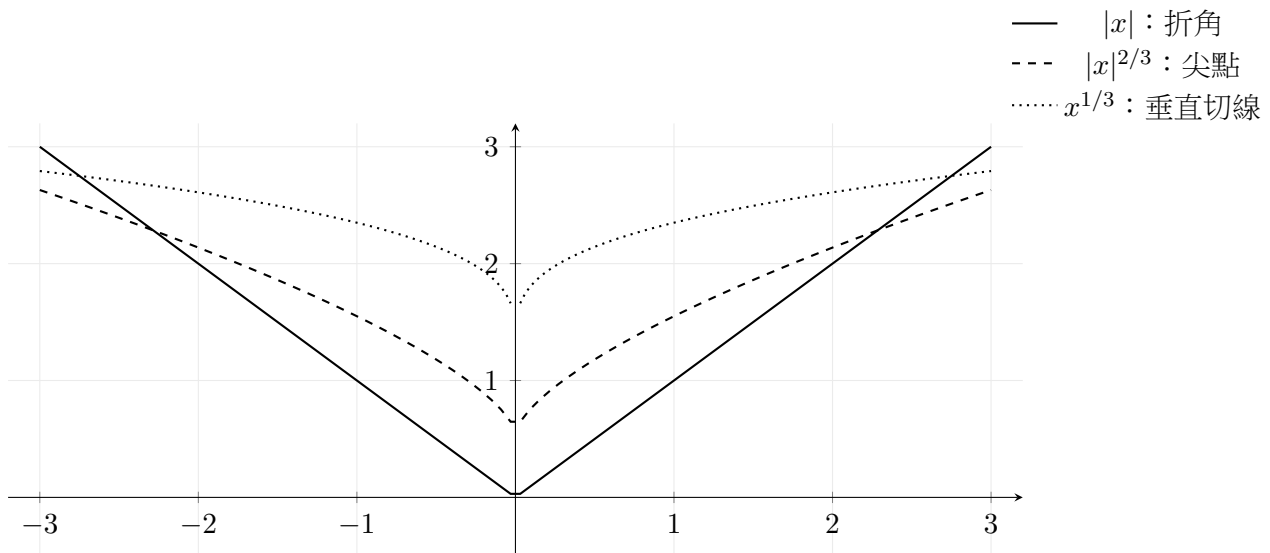


圖 4: 三種常見的不可微行為，每一種都可能有建模上的解釋。

檢查點：檢核 3

對 $f(x) = |x|$ ，計算在 0 的右導數及左導數。為何該處的導數不存在？

模型檢視：模型批判：平滑化還是保留閾值

在應用中，以平滑曲線取代折角可使微積分較容易處理，卻可能抹去真實閾值。例如，罰款可能恰好在需求超出容量時開始。一位良好的建模者應問：這個折角只是數學上的不便，還是我們需要保留的現象？

6 隱式、參數式與相關變化率微分

並非所有模型都自然寫成 $y = f(x)$ 。圓、橢圓、供求均衡及幾何約束，往往以包含多個變量的方程表示。

範例 8：圓上的隱式微分

對圓

$$x^2 + y^2 = 25,$$

我們對等式兩邊關於 x 微分：

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

在 $(3, 4)$ ，切線斜率為 $-3/4$ ，所以切線為

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3).$$

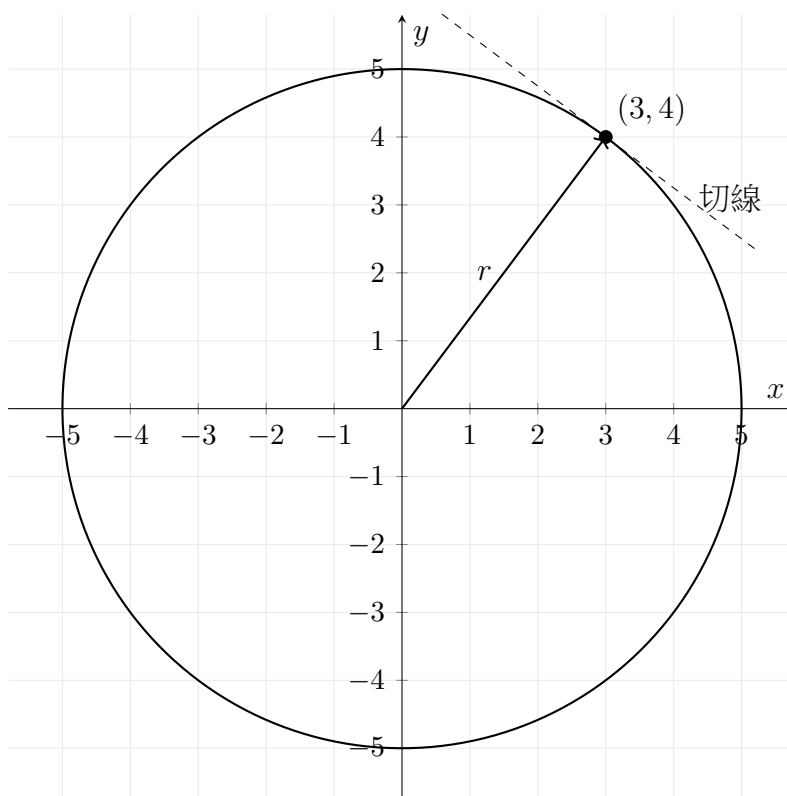


圖 5: 即使曲線整體不能表示成 x 的函數，隱式微分仍可求出切線斜率。

參數式導數

若曲線由 $x = g(t)$ 及 $y = h(t)$ 給出，則

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad dx/dt \neq 0.$$

這對運動模型很有用，因為 t 是自然的自變量。

範例 9：滑梯的相關變化率

一把 10 m 長的梯子靠在牆上，其底部以 0.5 m/s 向外移動。當梯底離牆 6 m 時，梯頂以多快的速度向下移？

令 x 為梯底與牆的距離， y 為梯頂高度。則

$$x^2 + y^2 = 100.$$

關於時間微分：

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0.$$

當 $x = 6$ 時， $y = 8$ 。故

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{6}{8}(0.5) = -0.375 \text{ m/s}.$$

負號表示高度正在下降。

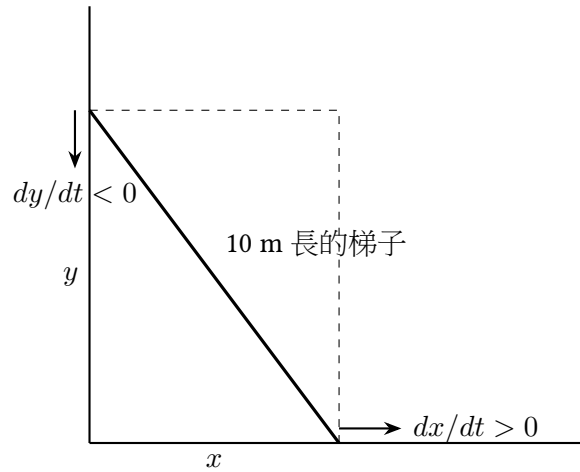


圖 6: 相關變化率把幾何約束轉化成各種變化率之間的關係。

7 中值定理與局部線性思維

中值定理

若 f 在 $[a, b]$ 上連續，並在 (a, b) 上可微，則存在 $c \in (a, b)$ ，使

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

即某處的瞬時變化率等於整個區間的平均變化率。

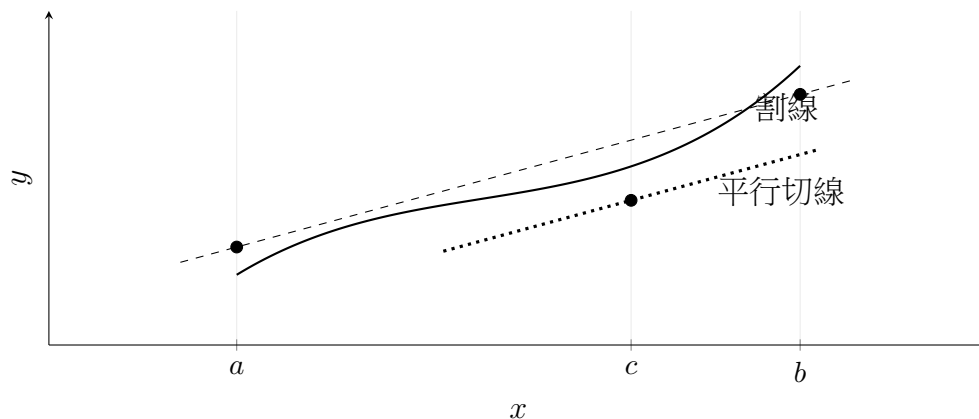


圖 7: 中值定理把平均變化率與至少一個瞬時變化率連繫起來。

範例 10：解釋平均速度的陳述

一部汽車沿直線路線的位置在 1.5 小時內增加了 120 km。若位置函數在該時間區間連續，並在其內部可微，中值定理表示在某一瞬間，其速度恰好是

$$\frac{120}{1.5} = 80 \text{ km/h}.$$

這不表示速度一直都是 80 km/h；它只表示至少有一次瞬時速度等於平均速度。若汽車一直向前行駛，該瞬間的速率也等於 80 km/h。

學生應掌握的重點

- 導數是局部變化率、斜率及靈敏度。
- 差商是從平均變化率過渡至瞬時變化率的橋樑。
- 法則可加快計算，而鏈式法則是複合模型的主要法則。
- 不可微往往具有實際意義，不只是技術上的失效。
- 當模型受幾何約束時，隱式方法與相關變化率方法不可或缺。
- 中值定理連繫局部與平均行為，這正是導數能支持現實解釋的原因。

8 選修延伸：洛必達法則

備用材料

學生理解導數後，才適合學習洛必達法則。若極限有 $0/0$ 或 ∞/∞ 不定式，且相應的導數商極限存在，則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

使用前必須先檢查是否為不定式。

選修範例：指數函數主導多項式

計算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

這是 ∞/∞ 型。使用洛必達法則兩次，得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

因此指數增長最終會主導二次增長。

9 練習

核心練習

1. 使用導數定義求 $f(x) = 3x^2 - 2x$ 的導數。
2. 對下式求導數：

$$f(x) = 5x^4 - 3x^{-2} + 7\sqrt{x} - 9.$$
3. 對 $g(x) = (x^2 + 1)(\sin x + x)$ 求導數。
4. 對 $h(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$ 求導數。
5. 對 $p(x) = \sin(3x^2 + 1)$ 求導數，並解釋哪一部分是內函數。
6. 求 $x^2 + y^2 = 13$ 在 $(2, 3)$ 的切線。

練習檢核與提示

1. 由定義所得的導數為 $6x - 2$ 。
2. 在原本的實數定義域上，結果為 $20x^3 + 6x^{-3} + 7/(2\sqrt{x})$ 。
3. 使用乘積法則得到 $2x(\sin x + x) + (x^2 + 1)(\cos x + 1)$ 。
4. 商法則的結果可簡化為 $(x^2 - 4x - 6)/(x - 2)^2$ 。
5. 內函數為 $3x^2 + 1$ ，而 $p'(x) = 6x \cos(3x^2 + 1)$ 。
6. 切線斜率為 $-2/3$ ： $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$ 。

建模練習

1. 排隊等候時間模型為 $W(\rho) = \frac{4\rho}{1-\rho}$ ，其中 $0 < \rho < 1$ 。計算 $W'(\rho)$ ，並解釋當 $\rho \rightarrow 1^-$ 時會發生甚麼。這對容量規劃為何重要？
2. 污染物濃度遵循 $C(t) = 60e^{-0.12t} + 8$ 。計算 $C'(t)$ ，並求變化率的絕對值首次低於 1 單位／日的時間。
3. 圓形感染前沿的半徑為 $r(t)$ ，面積為 $A(t) = \pi r(t)^2$ 。若 $dr/dt = 0.3 \text{ km/day}$ ，求 $r = 5 \text{ km}$ 時的 dA/dt 。
4. 季節性銷售模型為 $S(t) = 200 + 40 \cos(\pi t/6)$ 。求銷售額增長最快的時間，並解釋答案。

建模檢核

第 1 題， $W'(\rho) = 4/(1-\rho)^2$ ，當 $\rho \rightarrow 1^-$ 時發散。第 2 題， $|C'(t)|$ 在 $t = \ln(7.2)/0.12 \approx 16.45$ 日穿越 1，此後低於 1。第 3 題得到 $dA/dt = 3\pi \text{ km}^2/\text{day}$ 。第 4 題，最快增長發生在 $t = 9 + 12k$ ；在一個 12 個月的週期內取 $t = 9$ 。回答應包括單位、指定定義域及與決策相關的解釋。

挑戰與延伸

1. 證明：若區間內所有 x 均有 $f'(x) = 0$ ，則 f 在該區間為常數。清楚指出在哪一步使用中值定理。
2. 對 $x > 0$ 的 $y = x^x \sin x$ 求導數。
3. 對參數曲線 $x = t^2 + 1$ 、 $y = t^3 - t$ ，求 dy/dx 及 $t = 2$ 時的斜率。
4. 使用洛必達法則計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$
5. 撰寫一段簡短建模文字，解釋為何以導數為基礎的近似可能在折角或閾值附近失效。

挑戰檢核

第 1 題，在指定區間的任何閉子區間上應用中值定理。第 2 題，對 $x > 0$ ， $y' = x^x [(\ln x + 1) \sin x + \cos x]$ 。第 3 題，對 $t \neq 0$ 有 $dy/dx = (3t^2 - 1)/(2t)$ ，而 $t = 2$ 時的斜率為 $11/4$ 。第 4 題的極限是 $1/2$ 。第 5 題應指出折角或閾值、解釋單一局部斜率為何不能跨越它，並建議分段或單側模型。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第一冊（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。