

數學建模課程

補充 4：極限、連續性與漸近思維

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次補充課程結束後，讀者應能夠：

1. 將極限解釋為函數在某點附近趨近的值，而不一定是該點本身的函數值；
2. 透過代入、因式分解、有理化及標準三角極限計算常見極限；
3. 使用單側極限判斷雙側極限是否存在；
4. 解釋無窮極限、無窮遠處的極限及漸近線；
5. 分類可去、跳躍及無窮間斷；
6. 在建模情境中運用連續性、中間值定理及極值定理；
7. 解釋極限的數值與圖像證據，而不把證據誤當成證明。

1 極限描述局部行為

極限描述函數正在趨近甚麼值。它具有局部性：我們觀察某一點附近，而不一定觀察該點本身。這個概念是微積分的核心，同時也是建模概念。感測器可能在某一時刻失靈，公式可能在某個值沒有定義，而一個過程也可能不斷趨近容量上限，卻永遠不會精確到達。

啟動：遺失的感測器讀數

[12分鐘]

一個溫度感測器每分鐘記錄一次讀數。在 $t = 5$ 時感測器失靈，但相鄰讀數顯示曲線應在 23.8°C 附近通過。

1. 我們應否說 $t = 5$ 時的溫度已知？
2. 我們應否說 $t = 5$ 附近的趨勢已知？
3. 甚麼證據可使估計的極限值更可信？

建模要點：極限關心的是趨近行為。即使精確輸入處的數值遺失或不可靠，極限仍然可以具有意義。

非正式表述的核心定義

當選取充分接近 a 、但 $x \neq a$ 的 x 時， $f(x)$ 可以任意接近 L ，我們便寫成

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

函數值 $f(a)$ 可以等於 L 、不同於 L ，或者不存在。

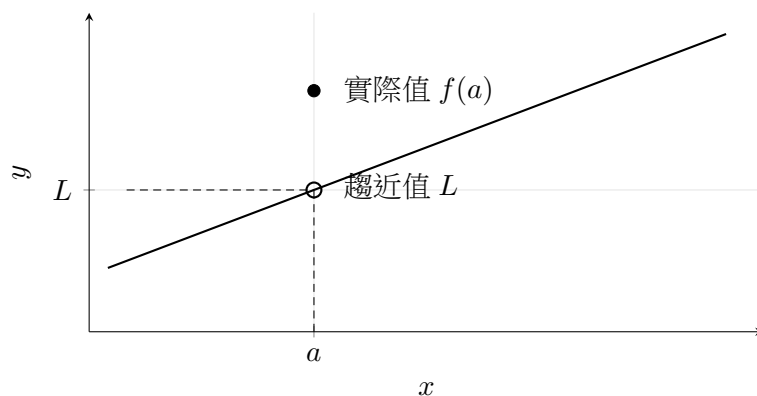


圖 1: 極限描述圖像在 $x = a$ 附近趨近的值。在 a 的實際函數值可以不同。

範例 1：可去空洞

計算

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

當 $x = 1$ 時，原式沒有定義。但當 $x \neq 1$ 時，

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

解釋：原公式在 $x = 1$ 有一個空洞，但附近的趨勢趨近 2。

範例 2：有理化

計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$$

直接代入得到 $0/0$ ，所以我們作有理化：

$$\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}, \quad x \neq 0.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}.$$

檢查點：代數極限檢核

計算：

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$

2. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9};$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$

每題先指出障礙：直接代入、 $0/0$ 、平方根，還是因式分解。

2 從非正式極限走向 ε - δ 語言

在第一門建模課中，學生不必掌握每一種 ε - δ 證明，但應理解定義的意義：輸出容許誤差控制輸入容許誤差。

正式定義

若對每個 $\varepsilon > 0$ ，均存在 $\delta > 0$ ，使得

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

我們便說

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

其中 ε 是輸出的容許誤差，而 δ 是輸入與 a 之間的容許距離。

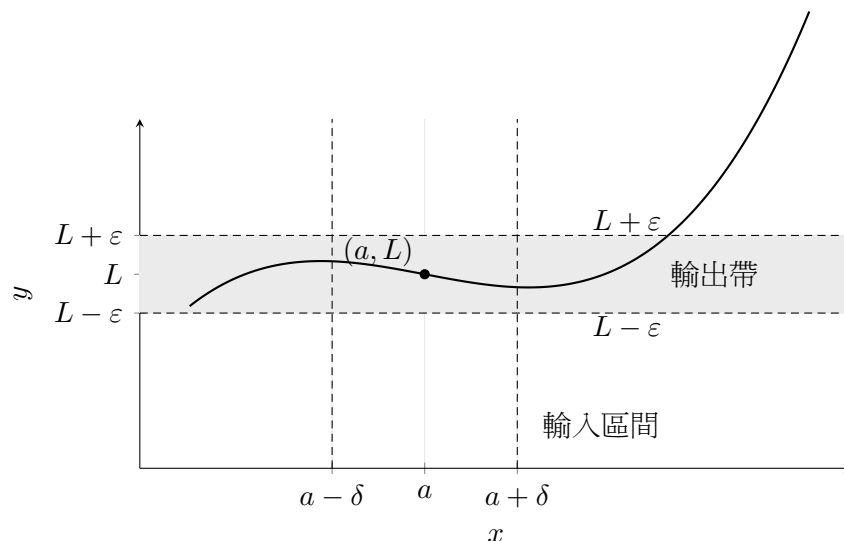


圖 2: 極限的 ε - δ 定義：若 x 充分接近 a ，則 $f(x)$ 與 L 的距離小於 ε 。

範例 3：簡單的 ε - δ 證明

證明 $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ 。

我們希望

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < \varepsilon.$$

所以只須要求 $|x - 3| < \varepsilon/2$ 。令 $\delta = \varepsilon/2$ ，則每當 $0 < |x - 3| < \delta$ 時，

$$|(2x - 1) - 5| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ 。

模型檢視：證明與證據

數值表可以支持對極限的猜測；圖像可以說明極限； ε - δ 證明則確立極限。在數學建模報告中，學生通常需要解釋趨勢並論證計算。若結果將被用作定理，或圖像可能造成誤導，正式證明便尤其有用。

3 單側極限與無窮極限

有些函數從左側及右側趨近不同的值。只有當兩個單側極限相等時，雙側極限才存在。

單側極限

右極限是 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ，即使用 $x > a$ 的值趨近 a ；左極限是 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ，即使用 $x < a$ 的值趨近 a 。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

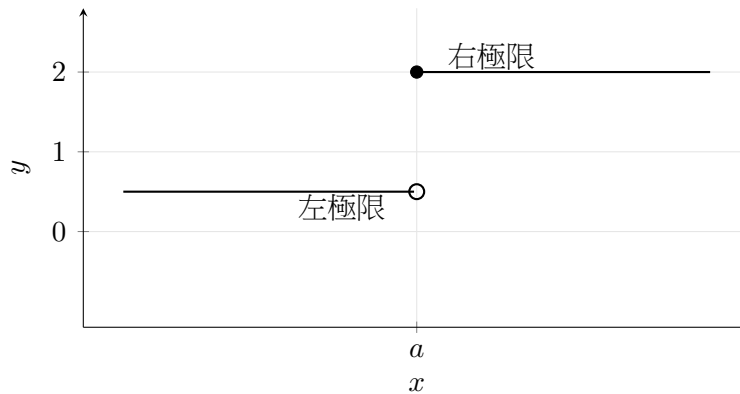


圖 3: 當左極限與右極限不同時，便出現跳躍。

範例 4：絕對值商

計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

若 $x > 0$ ，則 $|x| = x$ ，所以 $|x|/x = 1$ 。若 $x < 0$ ，則 $|x| = -x$ ，所以 $|x|/x = -1$ 。因此

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

兩個單側極限不相等，所以雙側極限不存在。

無窮極限與垂直漸近線

寫成 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ，表示當 x 趨近 a 時， $f(x)$ 無界增長；這並不表示 $+\infty$ 是普通的實數極限。若至少一個單側極限為無窮，直線 $x = a$ 就是一條垂直漸近線。

範例 5：容量引致的發散

一個簡單的擁塞等候時間模型為

$$W(q) = \frac{1}{1-q}, \quad 0 \leq q < 1,$$

其中 q 是需求佔容量的比例。則

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} W(q) = +\infty.$$

解釋：當需求趨近滿負荷容量時，模型預測等候時間極快上升。垂直漸近線 $q = 1$ 警告我們，在接近容量時運作並不穩定。

4 無窮遠處的極限與漸近思維

無窮遠處的極限描述長期行為。在建模中，它可以回答：預測是否趨於穩定？成本是否趨近基線？概率是否趨近一？

範例 6：有理模型的長期行為

計算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + x - 1}.$$

把分子及分母除以 x^2 ：

$$\frac{3 - 5/x + 2/x^2}{2 + 1/x - 1/x^2} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

因此模型的水平漸近線為 $y = 3/2$ 。

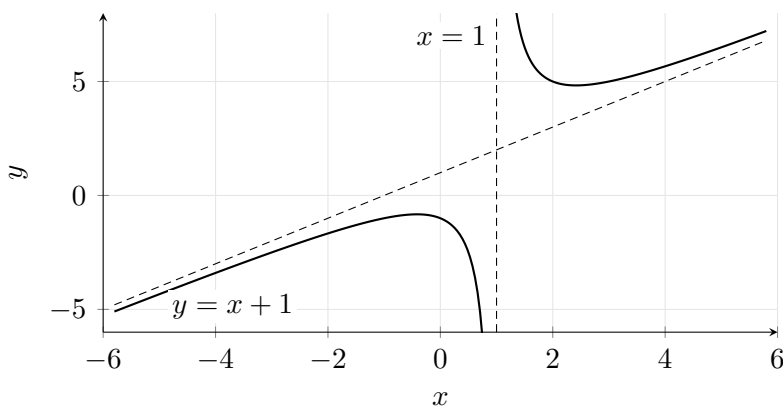


圖 4: 漸近線概括在禁用輸入附近及遠離原點時的行為。

課堂常用的極限技巧

情況	技巧	例子
連續表達式	直接代入	多項式、定義域內的平方根
多項式的 $0/0$	因式分解後約去	$(x^2 - 4)/(x - 2)$
根式的 $0/0$	有理化	$(\sqrt{x+4} - 2)/x$
有界振盪因子	夾擠定理	$x^2 \sin(1/x)$
分段函數或絕對值	檢查單側極限	$ x /x$
無窮遠處的可理函數	除以最高次冪	首項係數之比
垂直發散	單側無窮極限	$1/(x - a)$ 或 $1/(x - a)^2$

5 連續性：沒有跳躍、空洞或發散

連續性表示函數值與極限趨勢吻合。

在一點連續

若以下三個條件全部成立，函數 f 在 $x = a$ 連續：

1. $f(a)$ 有定義；
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在；
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

若任何一個條件不成立，函數在 a 不連續。

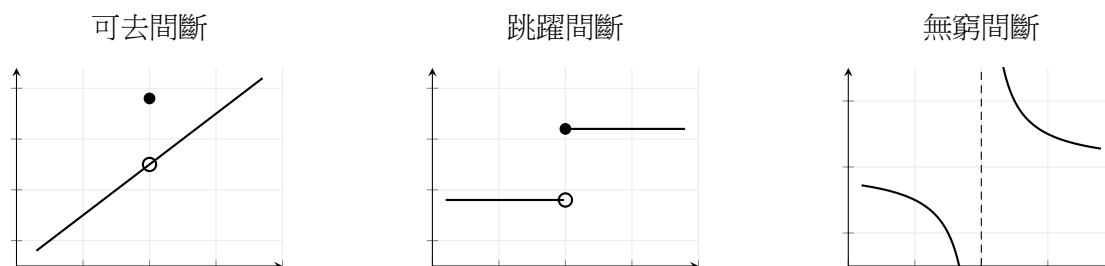


圖 5: 三種常見間斷：空洞、跳躍及垂直發散。

範例 7：使分段模型連續

求 k ，使

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 1, & x < 2, \\ 3x + k, & x \geq 2 \end{cases}$$

在 $x = 2$ 連續。

左極限：

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4k - 1.$$

右側函數值及極限：

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 6 + k.$$

令兩者相等：

$$4k - 1 = 6 + k \quad \Rightarrow \quad 3k = 7 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{7}{3}.$$

模型檢視：連續性的建模解釋

連續性是一項假設。物理溫度曲線通常連續；收費制度、學校評級界線或交通燈規則則可能有跳躍。在採用連續模型前，應先問真實系統是平滑變化，還是按閾值轉變。

6 存在性定理：IVT 與 EVT

中間值定理與極值定理之所以重要，是因為即使我們不能精確求解，它們仍可保證某些值存在。

中間值定理

若 f 在 $[a, b]$ 上連續，且 N 介乎 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間，則存在 $c \in (a, b)$ ，使 $f(c) = N$ 。
特別地，若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號，則 f 在 (a, b) 內有一個根。

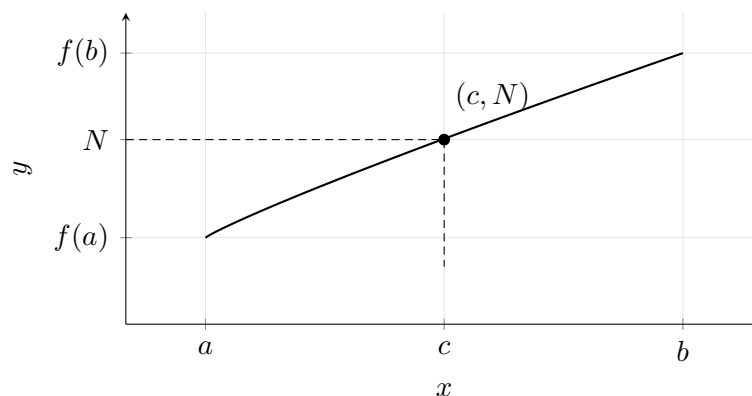


圖 6: 連續圖像由 $f(a)$ 移至 $f(b)$ 時，不可能略過其中任何中間值。

範例 8：解的存在性

證明

$$x^3 - x - 1 = 0$$

在 1 與 2 之間有一個解。

令 $f(x) = x^3 - x - 1$ 。由於 f 是多項式，所以它連續。計算

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0.$$

根據中間值定理，存在 $c \in (1, 2)$ ，使 $f(c) = 0$ 。

極值定理

若 f 在閉有界區間 $[a, b]$ 上連續，則 f 在 $[a, b]$ 上必定取得絕對最大值及絕對最小值。

在建模中，這條定理讓我們在嘗試尋找最優值之前，已有理據說「存在一個最優值」。各項條件都很重要：函數連續、區間封閉、區間有界。

7 夾擠定理與三角極限

夾擠定理處理被兩個較簡單函數夾住的函數。

夾擠定理

若在 a 附近

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

且

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

範例 9：以趨零因子控制振盪

計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

由於對 $x \neq 0$ 有 $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ ，

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

外側兩個函數都趨近 0，所以根據夾擠定理，

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

兩個標準三角極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

它們是推導三角函數導數的基礎，也說明了為何弧度而非角度制是微積分中的自然角度單位。

範例 10：運用標準三角極限

計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}.$$

改寫為：

$$\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}.$$

當 $x \rightarrow 0$ 時， $3x \rightarrow 0$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

8 分層極限工作坊

分層工作坊

[10 分鐘]

選擇一條路線。

1. 核心路線：代數極限。計算

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}.$$

2. 挑戰路線：單側極限與連續性。對於

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x < 1, \\ x^2 + a, & x \geq 1, \end{cases}$$

求 a ，使 f 在 $x = 1$ 連續。

3. 延伸路線：漸近模型。成本模型為

$$C(n) = \frac{5n^2 + 30n}{2n^2 + 1}.$$

求長期成本，並解釋水平漸近線的意義。

模型檢視：競賽式溝通

在建模報告中使用極限時，必須在情境中表述。

較弱的陳述：「極限是無窮。」

較強的陳述：「當需求從下方趨近滿負荷容量時，等候時間模型 $W(q) = 1/(1 - q)$ 無界增長。這顯示在接近 $q = 1$ 時運作並不安全：需求的細小增幅可能造成很大的等候時間。這個結論取決於模型假設服務容量維持不變。」

課堂總結

概念	建模意義
極限	描述某點附近的趨近行為。
空洞	公式可能在一個輸入沒有定義，但趨勢仍然清晰。
單側極限	偵測閾值、跳躍及有方向性的行為。
無窮極限	表示發散或容量失效。
無窮遠處的極限	描述長期行為及水平漸近線。
連續性	假設平滑變化；在閾值系統中可能失效。
IVT	保證在兩個異號值或兩個數值之間存在解。
EVT	在連續性及閉區間成立時，保證存在最大值／最小值。
夾擠定理	把複雜函數控制在較簡單的函數之間。

檢查點：離堂檢核

用三句話解釋 $f(a)$ 與 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 的分別，然後舉出一個建模情境，說明即使 $f(a)$ 遺失，極限仍然有用。

核心練習

1. 使用直接代入計算 $\lim_{x \rightarrow 4} (5x - 3)$ 。
2. 計算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ 。
3. 計算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ 。
4. 計算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ 。
5. 求 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 在 $x = 3$ 的單側極限。
6. 分類 $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ 在 $x = 3$ 的間斷類型。

練習檢核與提示

1. 直接代入得到 17。
2. 對 $x \neq 2$ 因式分解並約去 $x - 2$ ；極限為 3。
3. 有理化後得到極限 $1/2$ 。
4. 寫成 $\tan x/x = (\sin x/x)/\cos x$ ；極限為 1。
5. 左極限與右極限分別為 2 及 3，所以雙側極限不存在。

6. 間斷是可去的；在 $x = 3$ 的極限值為 6。

建模挑戰

一所學校的食堂使用

$$W(q) = \frac{4q}{1-q}, \quad 0 \leq q < 1,$$

估計以分鐘計的平均等候時間，其中 q 是需求除以服務容量。

1. 求 $\lim_{q \rightarrow 0^+} W(q)$ 並解釋。
2. 求 $\lim_{q \rightarrow 1^-} W(q)$ 並解釋。
3. 求模型預測 $W = 12$ 分鐘時的 q 值。
4. 指出這個模型的一項限制。
5. 根據極限行為，為食堂管理人員撰寫一項簡短建議。

建模檢核

首三項數值檢核分別為 0、 $+\infty$ 及 $q = 3/4$ 。回答最後兩部分時，應陳述容量與定義域假設、區分漸近警告與實證效度驗證、指出至少一個被省略的機制，並提出與極限行為一致的建議。

延伸練習

1. 使用 ε - δ 定義證明 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$ 。
2. 使用序列準則證明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ 不存在。
3. 計算 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)$ 。
4. 求 $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4}$ 的所有垂直及水平漸近線。
5. 使用中間值定理證明 $e^x = 3 - 2x$ 至少有一個實數解。

延伸提示

第 1 題可取 $\delta = \varepsilon/3$ 。第 2 題使用兩個趨近 0、但正弦值分別為 1 及 -1 的序列。第 3 題有理化後得到極限 1。第 4 題的垂直漸近線是 $x = \pm 2$ ，水平漸近線是 $y = 3$ 。第 5 題把中間值定理應用於 $h(x) = e^x + 2x - 3$ ： $h(0) = -2$ 且 $h(1) = e - 1 > 0$ 。

選修附錄：洛必達法則預覽

有些極限產生 $0/0$ 或 ∞/∞ 等不定式。引入導數後，一項有力工具是洛必達法則：在合適條件下，

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

這項法則不應取代代數思維。因式分解、有理化及標準三角極限仍然重要，因為它們揭示表達式的結構。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第一冊（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。