

數學建模課程

補充 3：圖像、變換與週期模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次補充課程結束後，讀者應能夠：

1. 將圖形視為兩個量之間的關係模型；
2. 透過垂直線測試區分關係與函數；
3. 從公式和圖形中確定定義域、值域、截距、對稱性及關鍵特徵；
4. 使用圖形變換來繪製相關函數，而無需從頭重新繪圖；
5. 解釋基本圖形族作為模型形狀的意義：線性、二次、反比、絕對值、平方根和正弦波；
6. 透過振幅、週期、相位偏移和垂直平移建立一個簡單的週期模型；
7. 解釋圖形揭示了甚麼、隱藏了甚麼，以及在對其進行預測之前需要哪些假設。

1 圖形作為建模語言

一個圖形不僅僅是公式的圖像。在數學建模中，圖形是一種溝通關係的簡潔方式：增加、減少、飽和、閾值、週期性、異常值以及假設的崩潰，往往可以在計算之前就得以觀察到。

啟動：圖形能說些甚麼？

[12 分鐘]

一所學校記錄了食堂的等候時間，時間從 12:00 到 12:40。曲線迅速上升，達到峰值，然後緩慢地回落至接近零。

1. 在此情境中，峰值意味著甚麼？
2. 如果曲線更平坦，會意味著甚麼？
3. 如果我們只知道曲線的形狀而不知道單位，會缺少哪些資訊？
4. 甚麼干預措施可以使峰值向下或提前？

建模課程：圖形應該被視為對系統的陳述，而不僅僅是繪圖。

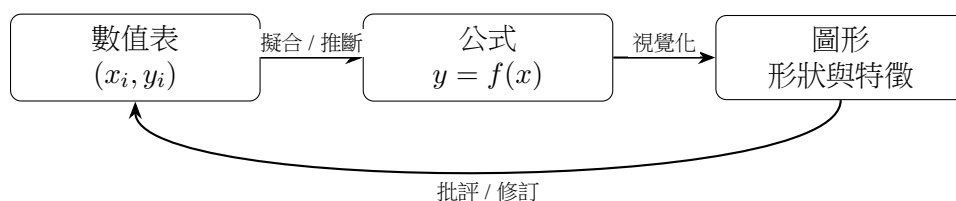


圖 1: 在建模中，數據、公式和圖形應相互支持。

核心詞彙

一個關係是有序對 (x, y) 的集合。一個函數是一種特殊的關係，其中每個輸入 x 對應著且僅有一個輸出 y 。定義域是允許的輸入的集合；值域是產生的輸出的集合。 $y = f(x)$ 的圖形是所有點 $(x, f(x))$ 的集合。

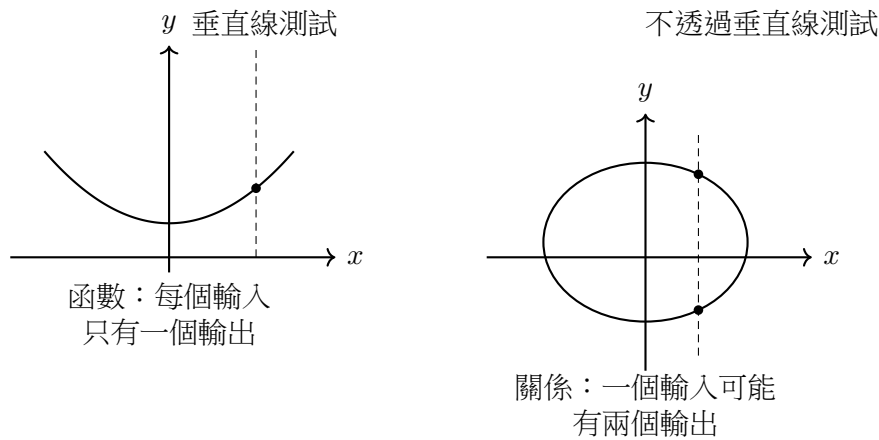


圖 2: 垂直線測試用於檢查一個關係能否表示為函數形式。

2 定義域、值域、截距與對稱性

在擬合或解釋圖形之前，建模者必須決定哪些數值是重要的。在學校數學中，一個公式可能具有自然的代數定義域。在建模中，現實的定義域可能更小。

範例計算 1：自然定義域與建模定義域

一個簡化的停止距離模型是

$$D(v) = 0.75v + 0.006v^2$$

其中 v 是時速， D 是米。

代數定義域：此公式接受所有實數 v 。建模定義域：速度不能為負，且模型僅針對普通道路速度進行校準，例如 $0 \leq v \leq 120$ 。

y 截距是 $D(0) = 0$ ，意味著當速度為零時停止距離為零。即使代數公式可於負值代入，負速度分支亦沒有實際意義。因此，圖形應僅在建模定義域上繪製。

範例計算 2：從公式中求定義域與值域

求

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

的自然定義域和值域。平方根要求 $4 - x^2 \geq 0$ ，所以 $-2 \leq x \leq 2$ 。因此

$$\text{Dom}(f) = [-2, 2].$$

由於 $f(x)$ 是圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的上半部分，輸出滿足 $0 \leq y \leq 2$ ：

$$\text{Range}(f) = [0, 2].$$

這是一個函數，因為 $[-2, 2]$ 中的每個 x 都對應著一個非負的 y 值。

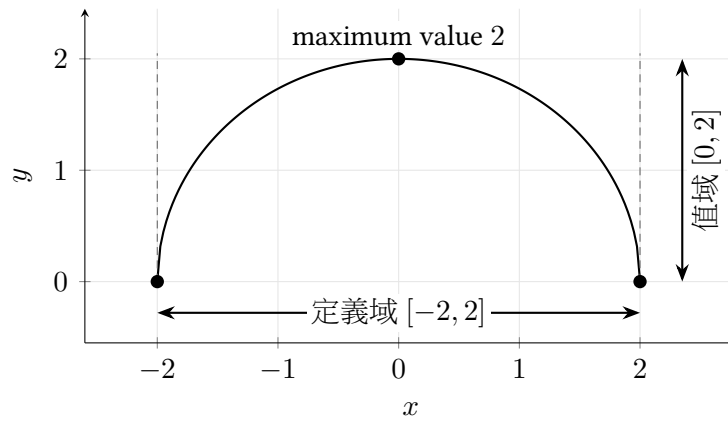


圖 3: 函數 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 的圖形是半徑為 2 的上半圓，因此其定義域和值域是可見的。

檢查點：特徵核查

對於每個函數，請說明其自然定義域、一個截距，以及圖形是奇函數、偶函數還是兩者都不是。

1. $f(x) = x^4 - 3x^2$

2. $g(x) = \frac{1}{x - 2}$

3. $h(x) = \sqrt{x + 1}$

3 圖形變換與標準形狀

圖形變換使我們能夠快速繪製相關的函數。在數學建模中，這非常重要，因為擬合或理論曲線通常僅因縮放或平移而與標準圖形有所不同。

$y = f(x)$ 的變換

新函數	對圖形的影響
$y = f(x) + c$	向上平移 c 個單位
$y = f(x - c)$	向右平移 c 個單位
$y = af(x)$	垂直拉伸因子為 $ a $ ；若 $a < 0$ ，則在 x 軸上反射
$y = f(bx)$	若 $b > 1$ ，則水平壓縮因子為 b
$y = -f(x)$	在 x 軸上反射
$y = f(-x)$	在 y 軸上反射

範例 3：圖形的變換

描述以下函數的圖形：

$$y = -2\sqrt{x + 3} + 4.$$

從 $y = \sqrt{x}$ 開始。

- $\sqrt{x + 3}$ 使圖形向左平移 3 個單位。
- $-2\sqrt{x + 3}$ 使其在 x 軸上反射並垂直拉伸因子為 2。

3. $-2\sqrt{x+3}+4$ 使圖形向上平移 4 個單位。

起點從 $(0,0)$ 移動到 $(-3,4)$ 。定義域是 $[-3, \infty)$ ，值域是 $(-\infty, 4]$ 。

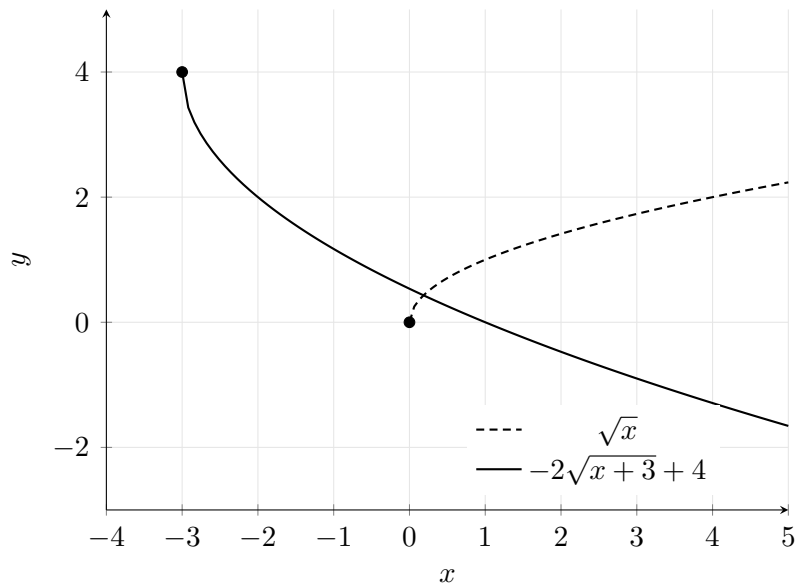


圖 4：變換使我們能從熟悉的母圖形繪製出新的模型。

用於建模的標準圖形族

族群	典型公式	建模含義
線性	$mx + b$	恆定的變化率；校準線
二次	$ax^2 + bx + c$	加速變化，拋物線形狀，成本曲線
絕對值	$a x - h + k$	距離目標的距離，目標值周圍的懲罰
平方根	$a\sqrt{x - h} + k$	快速初始增長後減緩；收益遞減
倒數	$a/(x - h) + k$	反向關係，漸近線，容量或擁堵效應
正弦	$A \sin(B(t - C)) + D$	週期性或季節性行為

模型檢視：選擇圖形族是一種假設

如果學生僅僅因為它很好地適配了六個點而選擇二次圖形，該模型可能會過度外推。圖形族應由一個機制來證明：恆定速率、飽和、反向依賴、週期性驅動或幾何約束。競爭報告應說明所選形狀的意義所在，而不僅僅是它適配了數據。

4 三角函數圖形作為週期模型

在數學建模中，三角函數最有用之處不在於記憶恆等式；而在於識別重複的行為。許多系統都具有重複的模式：日光、潮汐、交通週期、溫度、電力需求和學校出勤率。

正弦模型

基本的週期模型的形式為

$$y = A \sin(B(t - C)) + D.$$

在此， $|A|$ 是振幅， $2\pi/|B|$ 是週期， C 是相位偏移量，而 D 是中線。對於餘弦模型也適用相同的解釋。

範例 4：季節性出勤率模型

假設學校的平均缺席學生人數遵循年度週期。九月份的最小值約為 8 名學生，三月份的最高值約為 28 名學生，週期為一年。令 t 為從九月以月計算的時間。

中線為

$$D = \frac{28 + 8}{2} = 18,$$

振幅為

$$A = \frac{28 - 8}{2} = 10.$$

由於最小值發生在 $t = 0$ 時，一個方便的餘弦模型是

$$A(t) = 18 - 10 \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right).$$

在 $t = 6$ 時，該模型給出 $A(6) = 28$ ，代表三月早春的峰值。在用於人員配置決策之前，此模型應與數年的記錄進行模型效度驗證。

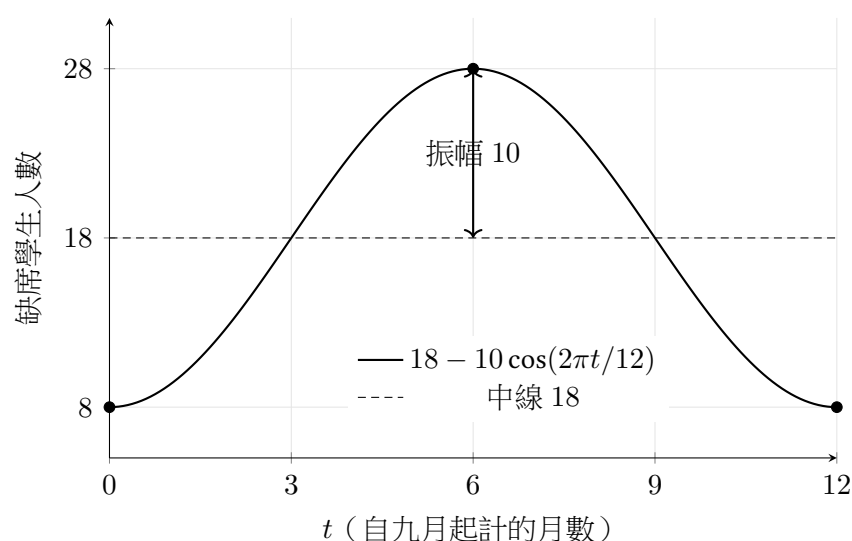


圖 5: 正弦圖形將重複的模式轉化為可解釋的參數。

檢查點：週期模型核證

潮汐高度範圍從 1.2 米到 3.8 米，每 12 小時重複一次。在 $t = 0$ 時，潮水處於最大值。

1. 求振幅和中線。
2. 寫出一個餘弦模型。
3. 解釋該模型的其中一個限制。

5 以漸近線與圓錐曲線表達模型結構

有些圖形的價值，在於它們揭示邊界，而非一般的轉折點。漸近線描述曲線逐漸趨近的值；圓錐曲線則能描述固定距離、距離之和或距離之差等幾何約束。

範例 5：在擁塞模型中讀取漸近線

假設一個簡單的旅行時間模型為

$$T(q) = 12 + \frac{40}{100 - q}, \quad 0 \leq q < 100,$$

其中 q 是每分鐘進入一段道路的車輛數量。該圖形在 $q = 100$ 處有一個垂直漸近線。當 q 趨近於容量時，預測的旅行時間會迅速增加。這個漸近線是一個警告：操作接近容量是不穩定的，小的需求變化會導致大的延誤。

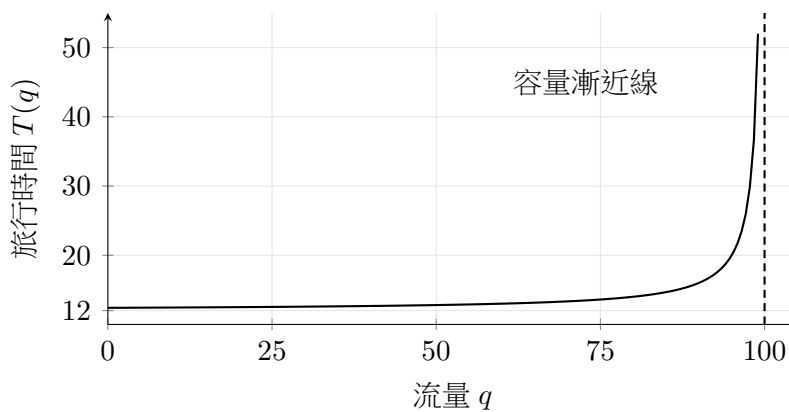


圖 6: 漸近線可以代表實際的容量邊界。

圓錐曲線摘要

圓錐曲線	定義思想	模型應用
圓周	相對於中心有固定的距離	覆蓋範圍、安全半徑、感測器範圍
拋物線	相對於焦點與正交線的距離相等	拋物線形狀、反射器幾何
橢圓	到兩個焦點的距離之和固定	軌道狀形狀、服務區域
雙曲線	到兩個焦點的距離之差固定	從時間差信號進行定位

6 撰寫基於圖表的建模結論

模型檢視：競賽式溝通

基於圖表的結論應包含四個部分：

1. 特徵 (Feature): 哪個圖形屬性是重要的？例如：峰值、截距、斜率、漸近線、週期。
2. 意義 (Meaning): 這個特徵在實際系統中代表甚麼？

3. 決策 (**Decision**): 從這個解釋中會產生甚麼行動？

4. 限制 (**Limitation**): 甚麼會使圖形不可靠？

薄弱的結論: “圖形上升然後下降。”

更強的結論: “等待時間曲線在約 12:18 達到峰值，因此食堂的瓶頸集中在午餐的前半段。應該在峰值之前而不是之後打開第二個服務櫃檯。這個結論假設記錄的日期是典型的，並且等待時間是持續測量的。”

差異化圖形建模工作室

[14分鐘]

選擇一條路徑。

1. 核心路徑 (**Core route**): 給出二次成本模型的圖形，找出截距、頂點和有意義的定義域。
2. 挑戰路徑 (**Challenge route**): 從最大值、最小值和週期擬合一個正弦模型；然後解釋相位偏移。
3. 延伸路徑: 對於擁堵或學習曲線數據，在反比模型和平方根模型之間選擇。透過機制和殘差模式進行論證。

課程總結

概念 (Concept)	建模意義 (Modeling meaning)
圖形 (Graph)	關係或函數的視覺表徵；揭示定性結構。
垂直線檢驗 (Vertical-line test)	檢查每個輸入是否只有一個輸出。
定義域與值域 (Domain and range)	指定實際的輸入和可能的輸出。
截距 (Intercepts)	描述起始值、閾值或損益平衡點。
對稱性 (Symmetry)	減少工作並揭示結構假設。
變換 (Transformation)	透過平移、拉伸和反射重用已知的圖形形狀。
正弦模型 (Sinusoidal model)	透過振幅、週期、相位和中線表示週期性行為。
漸近線 (Asymptote)	表示極限值或實際邊界。
拋物線 (Conic)	編碼距離、距離之和或覆蓋範圍等幾何約束。

檢查點：出門考題

從今天的課程中選擇一個圖形特徵，並解釋它如何可能影響建模問題中的實際決策。你的答案必須包括該特徵、其上下文意義和一個限制。

核心練習

1. 找出 $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ 的自然定義域。
2. 確定以下函數是偶函數、奇函數還是兩者都不是： $x^5 - x$ 、 $x^4 + 2x^2$ 、 $x^2 + x$ 。
3. 描述從 $y = x^2$ 到 $y = -3(x+2)^2 + 5$ 的變換。
4. 找出 $y = 4 \sin(2t - \pi) + 3$ 的振幅、週期、相位偏移和中線。

5. 找出 $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ 的垂直和水平漸近線。

答案核對：核心練習

答案為

$[-3, 1) \cup (1, 3]$; 奇函數、偶函數、兩者皆非;

向左平移 2 個單位、關於 x 軸反射、沿垂直方向拉伸 3 倍，再向上平移 5 個單位；振幅 4、週期 π 、相位偏移 $\pi/2$ 、中線 $y = 3$ ；垂直漸近線 $x = 3$ 、水平漸近線 $y = 2$ 。

建模挑戰

一個小型主題公園記錄了從 9:00 到 18:00 每小時進入的遊客數量。數據在早晨緩慢上升，在 14:00 左右達到峰值，然後下降。一位學生提出了一個二次模型。

1. 定義一個時間變量和一個遊客數函數。
2. 解釋為甚麼二次圖形在一天內可能是合理的。
3. 說明建模的定義域，並解釋為甚麼外推到該範圍之外可能具有誤導性。
4. 建議一個有助於人員配置決策的圖形特徵。
5. 寫一個帶有一個限制的簡短基於圖表的結論。

答案核對：建模挑戰

完整答案應以 9:00 為基準定義時間與遊客數函數，說明單日二次模型只是「上升—峰值—下降」的局部近似，把定義域限制在觀察到的營業時段，並以峰值時間或峰值高度支持人手安排。結論必須提醒讀者：此模型並不支持外推至 9:00–18:00 以外的時段。

延伸練習

1. 證明 $x^2 + y^2 = 4$ 的圖形不是 x 的函數，但可以被分成兩個函數。
2. 信號由 $S(t) = 2.5 \cos(\pi t/6) + 7$ 建模。找出其最大值、最小值、週期以及 $t = 3$ 時的值。
3. 解釋如果道路容量從每分鐘 100 輛車增加到 130 輛車，則在 $T(q) = 12 + 40/(100 - q)$ 中的漸近線會如何變化。
4. 使用一個圓及其內部來對 (20, 15) 處 Wi-Fi 路由器周圍 50 米內的覆蓋點進行建模。寫出相應的不等式。

答案核對：延伸練習

圓可拆成 $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ 。信號的最大值是 9.5、最小值是 4.5、週期是 12，且 $S(3) = 7$ 。把道路容量提高至 130 後，相應修訂模型的垂直漸近線會由 $q = 100$ 移至 $q = 130$ 。Wi-Fi 覆蓋圓盤為

$$(x - 20)^2 + (y - 15)^2 \leq 2500.$$

可選附錄：三角恆等式

以下恆等式對代數和微積分很有用，但不必在兩小時的核心課程中全部教授。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《大學預備微積分》第二版（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。