

數學建模課程

補充二：數、坐標與幾何模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次補充課程結束後，讀者應能夠：

1. 區分有理數、無理數和實數；
2. 將絕對值解釋為距離，並用它來描述容許範圍或誤差；
3. 在實數數線上表示區間；
4. 利用坐標平面來對位置、距離、中點和覆蓋範圍進行建模；
5. 推導並解釋直線和圓的方程；
6. 將斜率、距離和幾何學與數據擬合、路徑規劃、最佳化和建模約束聯繫起來。

1 數字與座標在建模中的重要性

一個數學模型將一個真實情況轉化為可以計算、比較和溝通的對象。在可以使用微積分、最佳化或模擬之前，學生需要一種精確的語言來表達三個簡單的概念：

數量, 位置, 距離.

數字描述數量，座標描述位置，距離公式描述接近程度、誤差、行程或覆蓋範圍。因此，本補充說明不是單獨的代數複習；它是許多建模任務背後的座標語言。

啟動：選擇正確的數字系統

[10分鐘]

對於每一個建模的數量，決定整數、有理數還是實數是最自然的語言。給出一句解釋。

1. 分配給團隊的學生人數。
2. 選擇搭乘巴士的學生的比例。
3. 地圖上兩個位置之間的距離。
4. 觀察到的數值與預測數值之間的誤差。
5. 為學校路線所需的配送機器人的數量。

建模課程：選擇錯誤的數字系統可能會導致錯誤的決策。例如，線性規劃可能輸出 2.7 台機器人，但實際的決策必須是整數。

2 數系：從計數到實數數線

核心詞彙

符號	名稱	建模含義
$\mathbb{N}$	自然數	物體計數：1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	整數	有符計數或淨變化： ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{Q}$	有理數	比率、分數、精確比例： m/n 且 $n \neq 0$
$\mathbb{R}$	實數	連續量：長度、時間、質量、溫度、 誤差

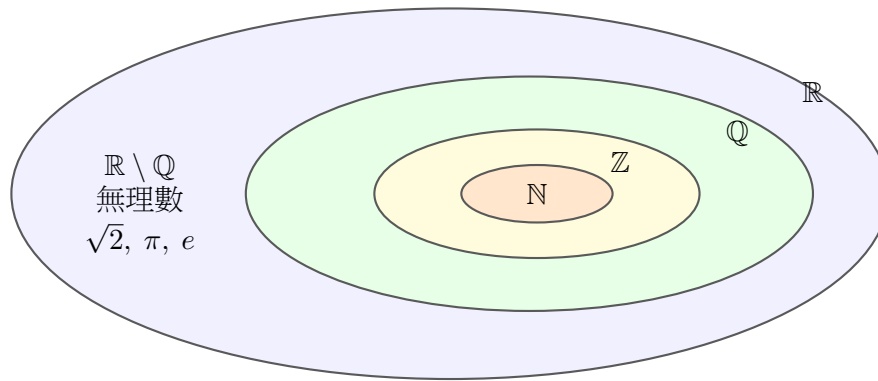


圖 1: 數值系統的層次結構。自然數包含在整數中，整數包含在有理數中，有理數包含在實數中。無理數是那些不屬於有理數的實數。

範例 1：分類建模量

對每種量進行分類。

1. 一所學校需要 7 輛巴士。這屬於 $\mathbb{N}$ ，因為它計數物體。
2. 一個團隊完成了其調查的 $\frac{3}{4}$ 。這屬於 $\mathbb{Q}$ ，因為它是整數的比率。
3. 1×1 平方的對角線是 $\sqrt{2}$ 。這是無理數，因此是實數但不是有理數。
4. 回歸中得到的擬合參數 $k = 0.03716 \dots$ 通常被視為實數。

建模解釋：有些模型是離散決策的連續近似。這是允許的，但報告必須解釋如何將連續結果轉換為可行的決策。

有理數與間隙問題

一個有理數是形如 m/n 的數，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 且 $n \neq 0$ 。有理數適用於精確比例，但它們並不能完全填滿數線。例如，不存在一個有理數的平方是 2。

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

需要實數系統是因為幾何學、距離、極限和微積分自然地產生了無理數值。

範例 2：為甚麼 $\sqrt{2}$ 不是有理數

假設 $\sqrt{2} = m/n$ 且 m, n 互質。那麼

$$m^2 = 2n^2.$$

因此 m^2 是偶數，所以 m 是偶數。寫出 $m = 2k$ 。那麼

$$4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2,$$

所以 n 也必須是偶數。這與 m/n 是最簡分數的假設相矛盾。因此 $\sqrt{2}$ 是無理數。

建模含義：即使是 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 之間的距離也是無理的。因此，座標模型需要實數，而不僅僅是分數。

檢查點：數值系統核查

一條路線規劃模型返回最短距離為 $5\sqrt{5}$ 公里，旅行時間為 11.2 分鐘，以及需要 3.4 輛貨車。哪些量是連續模型的輸出？哪些必須轉換為整數決策？

3 絕對值、距離與區間**絕對值作為距離**

對於一個實數 a ，

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

在幾何上， $|a|$ 是在數線上從 a 到 0 的距離。更一般地說， $|x - a|$ 是 x 和 a 之間的距離。

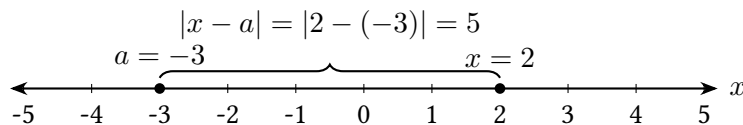


圖 2: 絕對值測量實數上的距離。

範例 3：測量容許度

如果溫度感測器的讀數 x 與真實值 25°C 的差小於 0.4°C ，則該感測器是可接受的。請使用絕對值和區間表示法寫出這個條件。

$$|x - 25| < 0.4.$$

這意味著

$$24.6 < x < 25.4,$$

因此，可接受的區間是 $(24.6, 25.4)$ 。

數學建模解釋：絕對值不等式是表達容許度、誤差界限、殘差閾值和安全邊際的簡潔方式。

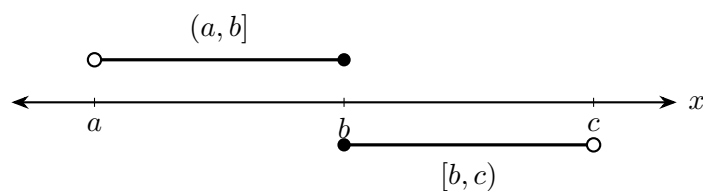


圖 3: 開放端點以空心圓圈表示；閉合端點以實心圓圈表示。

檢查點：區間檢查

將每個條件改寫為區間表示法。

1. $|x - 6| \leq 2$ 。
2. 殘差 r 滿足 $|r| < 0.1$ 。
3. 模型參數 k 是正數，但小於 1。

4 坐標、距離與中點

平面上的一點由有序對 (x, y) 表示。在數學建模中，坐標可能代表物理地圖、特徵空間，或從數據測得的兩個變量。

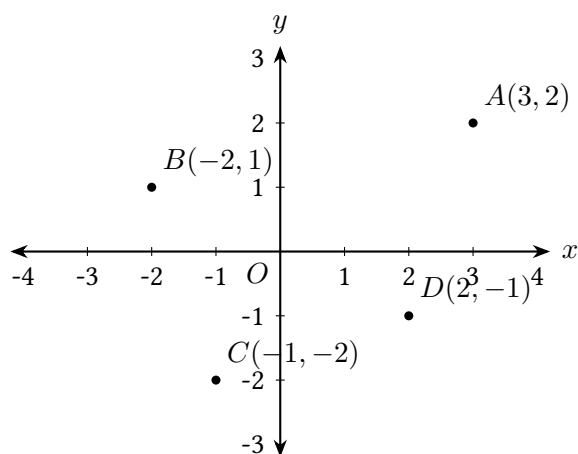


圖 4: 坐標定位點相對於 x 軸和 y 軸。

距離與中點公式

對於 $P_1 = (x_1, y_1)$ 和 $P_2 = (x_2, y_2)$ ，

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

中點為

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

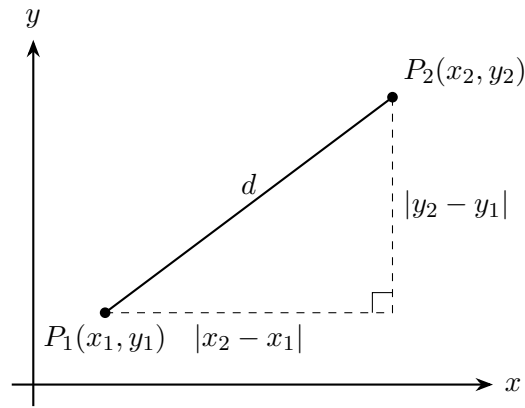


圖 5: 距離公式是應用於坐標差的勾股定理。

例題 4：選擇會合點

兩名學生居住在簡化的公里地圖上的 $A = (1, 2)$ 和 $B = (7, 6)$ 處。他們之間公平的會合點是

$$M = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (4, 4).$$

他們之間的直接距離是

$$d(A, B) = \sqrt{(7-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21 \text{ km}.$$

數學建模解釋：中點在直線距離下是公平的。如果實際的步行路線遵循道路，則歐幾里得中點可能不再公平。

模型檢視：模型批評：歐幾里得距離與實際行程距離

距離公式假設平面為平坦的坐標平面以及直線運動。在路線規劃中，道路網絡、樓梯、坡度、交通燈、河流、門和限制區域可能使歐幾里得距離成為一個不好的近似值。模型制定者應說明歐幾里得距離是合理的近似值，還是僅僅是一個初步估計。

5 直線作為簡單模型

一條直線是變化率恆定的最簡單模型。

$$\text{斜率} = \frac{\text{輸出變化}}{\text{輸入變化}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

在數學建模中，斜率帶有單位。如果 x 是分鐘的時間，而 y 是公尺的距離，那麼斜率就是公尺/分鐘。

直線的形式

形式	方程式	用途
斜截式	$y = mx + b$	已知斜率和起始值
點斜式	$y - y_1 = m(x - x_1)$	已知一點和斜率
兩點式	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	已知兩點的觀察值
一般形式	$Ax + By + C = 0$	有助於計算點到直線的距離

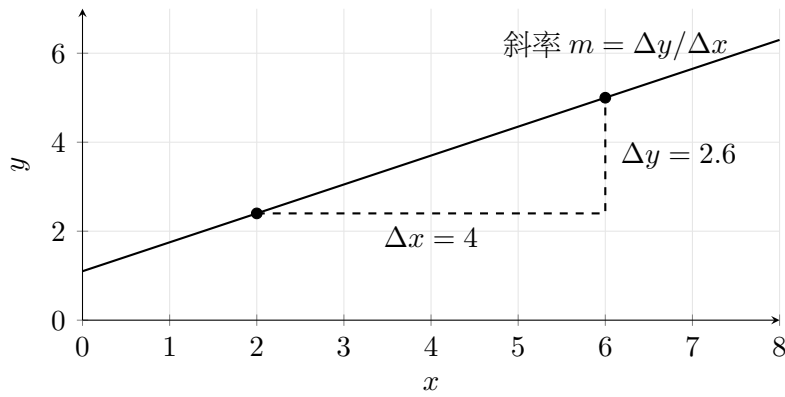


圖 6: 直線的斜率衡量每單位輸入的恆定變化量。

計算範例 5：線性的旅行時間模型

一架送貨機器人在走廊上移動時，移動 120 m 花費 4 分鐘，移動 300 m 花費 10 分鐘。設 x 為距離（單位：米）， y 為旅行時間（單位：分鐘）。假設為線性模型，

$$m = \frac{10 - 4}{300 - 120} = \frac{6}{180} = \frac{1}{30} \text{ min/m.}$$

使用穿過 (120, 4) 的點斜式，

$$y - 4 = \frac{1}{30}(x - 120),$$

因此

$$y = \frac{x}{30}.$$

截距為 0，這表明在這種簡化的情況下，機器人幾乎沒有固定的啟動延遲。

解釋：速度是斜率的倒數：30 m/min。如果後續數據顯示非零截距，那可能代表載貨時間或等待時間。

檢查點：線段檢查

求穿過 (2, 5) 和 (8, 17) 的直線。如果 x 是學習的小時數， y 是考試分數，請解釋斜率。

平行、垂直和點到直線的距離

對於非垂直的直線，平行線具有相同的斜率。垂直線的斜率滿足

$$m_1 m_2 = -1.$$

從點 (x_0, y_0) 到直線 $Ax + By + C = 0$ 的距離是

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

這個公式衡量的是點到線性邊界的最短垂直距離。

計算範例 6：到安全邊界的距離

一個限制區域由直線

$$3x - 4y + 12 = 0.$$

近似。一架無人機位於 $P = (2, 5)$ 。它到邊界的最近距離是

$$d = \frac{|3(2) - 4(5) + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 20 + 12|}{5} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

如果座標是以公里為單位測量，則無人機到邊界的距離是 0.4 km。

6 圓圈作為距離約束

一個圓圈是從一個中心點處保持固定距離的所有點的集合。這使得圓圈在覆蓋範圍、距離、安全性和服務範圍模型中非常有用。

圓的方程

中心為 (h, k) 、半徑為 r 的圓的方程為

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

一般形式

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

可以透過配方完成平方來轉換為標準形式。

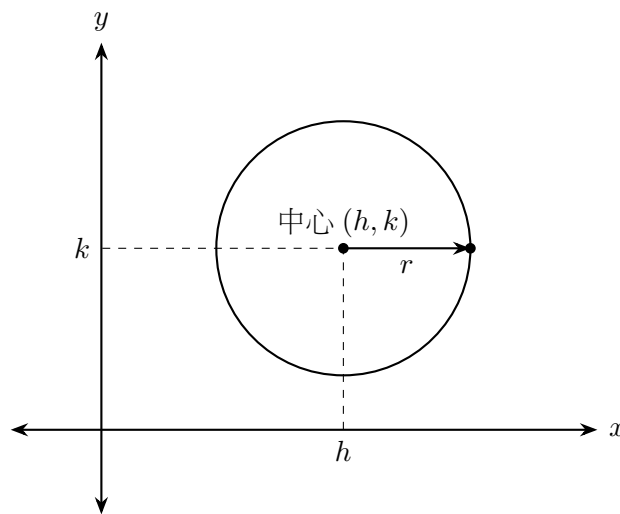


圖 7: 圓圈對應於中心點處固定距離內的所有位置。

例題 7：覆蓋半徑

一個 Wi-Fi 路由器位於 $(3, -2)$ ，有效範圍為 5 米。覆蓋邊界為

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

位於 $(7, 1)$ 的設備的平方距離為

$$(7 - 3)^2 + (1 + 2)^2 = 16 + 9 = 25,$$

因此它正好在邊界上。

模型解釋：在現實生活中，牆壁和干擾會使邊界不呈圓形。圓圈是僅基於距離的初步近似。

例題 8：配方完成

求以下方程的中心和半徑：

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

合併項並完成平方：

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) &= 12, \\(x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= 12 + 9 + 4 = 25.\end{aligned}$$

因此中心是 $(3, -2)$ ，半徑是 5。

差異化幾何建模工作室**[13分鐘]**

選擇一條路線。

1. 核心路線：設施距離。一個服務台位於 $(2, 1)$ 。找出 $A = (5, 5)$ 、 $B = (-1, 3)$ 和 $C = (4, -2)$ 中哪一個最近。
2. 挑戰路線：覆蓋模型。一個位於 $(4, 3)$ 的感測器覆蓋半徑為 3。寫出覆蓋不等式，並測試 $(6, 5)$ 和 $(8, 3)$ 是否被覆蓋。
3. 延伸路線：邊界距離。一條道路由 $2x - y + 1 = 0$ 模型。一所學校位於 $(3, 4)$ ，必須與道路至少有 1 公里的距離。檢查該位置是否可接受，並建議移動的方向。

7 選修附錄：完整性與微積分的原理**單頁完整性**

集合 $S \subset \mathbb{R}$ 若存在一個數 M 使得對於所有 $x \in S$ ，都有 $x \leq M$ ，則稱 S 是有上界。上確界是最小上界。

實數滿足完備公理： $\mathbb{R}$ 中任何非空且有上界的子集都存在一個上確界在 $\mathbb{R}$ 中。

這比普通座標幾何所需要的更深入，但它解釋了為甚麼極限和微積分是可能的。有理數存在間隙；實數填補了這些間隙。

模型檢視：競賽式溝通

在報告中使用座標時，不要僅僅寫公式。請說明：

1. 軸代表甚麼以及使用了甚麼單位；
2. 為甚麼歐幾里得距離是可接受的，或者它忽略了甚麼；
3. 變量是連續的還是必須四捨五入到整數；
4. 距離、斜率或圓圈如何支持最終的建議。

弱陳述：“距離是 5。”

更強的陳述：“使用以公里為單位的座標地圖，站點與建築 A 之間的歐幾里得距離是 5 公里。這是一個下界估計，因為實際的步行路線必須遵循校園道路。”

課程總結

概念	建模含義
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	不同的數系支持計數、比率和連續測量。
無理數	自然幾何量如 $\sqrt{2}$ 無法表示為分數。
絕對值	量度到零的距離或目標的誤差。
區間	描述可接受的範圍、約束和不確定性帶。
座標平面	將位置轉換為可計算的有序對。
距離公式	量度直線上的接近程度、旅行的下界和誤差。
斜率	變化率的常數；單位很重要。
直線	線性關係或邊界的最簡單模型。
圓圈	固定距離的點集；可用於覆蓋和範圍模型。
完備性	支持極限和微積分的 $\mathbb{R}$ 的隱藏性質。

檢查點：出門試卷

一所學校的地圖使用米作為座標。用三句話解釋你將如何對一個新的水站是否覆蓋所有距離水站少於或等於 80 米的教室進行建模。提及中心點、半徑以及模型的其中一個限制。

核心練習

- 將每個數分類為自然數、整數、有理數、無理數或實數： $-4, 0, 7/3, \sqrt{9}, \sqrt{7}, \pi$ 。
- 求解並寫出區間表示法： $|x - 4| < 1.5$ 和 $|2x + 1| \leq 5$ 。
- 找出 $A = (-2, 3)$ 和 $B = (4, -1)$ 之間的距離和中點。
- 找出穿過 $(1, 5)$ 和 $(4, 11)$ 的直線的方程。
- 找出垂直於 $y = 3x + 4$ 的穿過 $(2, -1)$ 的直線。
- 找出方程 $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$ 的中心和半徑。

答案核對：核心練習

採用 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 時，各數的分類可直接依照數系定義判斷。其餘數值答案為

$$(2.5, 5.5), \quad [-3, 2]; \quad d(A, B) = 2\sqrt{13}, \quad M = (1, 1);$$

$$y = 2x + 3; \quad y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 2); \quad \text{圓心}(-1, 4), r = 3.$$

歸納題應先核對基本情況，再證明 $n = k$ 成立可推出 $n = k + 1$ 成立。

建模挑戰

一所校園規劃師希望放置一個臨時資訊亭。建築物由點表示：

$$A = (0, 0), \quad B = (6, 2), \quad C = (3, 7), \quad D = (-2, 4).$$

- 計算 A 和 B 的中點。解釋這可能是一個好還是不好的資訊亭位置。
- 找出提議的資訊亭 $P = (2, 3)$ 到每個建築物的距離。
- 如果資訊亭的覆蓋範圍是半徑 5，寫出覆蓋圓圈並確定哪些建築物被覆蓋。

4. 主要人行道由直線 $x + y = 5$ 近似。找出 P 到人行道的距離。
5. 寫一份簡短的建議。包括使用座標和歐幾里得距離的一個限制。

答案核對：建模挑戰

A 與 B 的中點是 $(3, 1)$ 。由 $P = (2, 3)$ 到四座建築物的距離依次為

$$\sqrt{13}, \quad \sqrt{17}, \quad \sqrt{17}, \quad \sqrt{17}.$$

覆蓋圓盤為 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 25$ ，四座建築物皆在覆蓋範圍內。 P 到 $x + y = 5$ 的距離為 0。合理建議亦應指出，直線距離可能低估沿步行網絡行走的實際距離。

延伸練習

1. 證明一個非零有理數與無理數的乘積是無理數。
2. 利用 $-|a| \leq a \leq |a|$ 的事實，證明三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 。
3. 集合 $S = (0, 1)$ 沒有最大值但有上確界 1。解釋最大值與上確界的區別。
4. 找出所有在 x 軸上且與 $(2, 3)$ 和 $(-1, 4)$ 等距的點。
5. 一個圓透過 $(0, 0)$ 、 $(4, 0)$ 和 $(0, 3)$ 。找出它的方程。

答案核對：延伸練習

「非零有理數乘無理數」可用反證法；三角不等式可由 $-|a| \leq a \leq |a|$ 推導。集合 $(0, 1)$ 的上確界是 1，但因為 $1 \notin (0, 1)$ ，所以沒有最大值。 x 軸上的等距點滿足 $x = -2/3$ 。通過三個指定點的圓為

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《大學預備微積分》第二版（OpenStax）
- 《國際單位制指南》：量值、物理量與量綱（NIST）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。