

數學建模補充筆記

補充 1：集合、函數與數學語言

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在完成本補充課程後，讀者應能夠：

1. 使用集合、元素、子集、聯集、交集和補集的語言；
2. 透過檢查每個輸入是否恰好有一個輸出，來判斷一個關係是否為函數；
3. 確定常見實數函數的定義域和值域；
4. 使用垂直線檢驗法來解釋圖形；
5. 在注意定義域限制的情況下，計算函數的和、積、商和複合；
6. 解釋精確的數學語言在數學建模中的重要性。

1 此補充對建模的重要性

數學模型在任何方程式寫下之前就已經開始了。我們必須決定討論的對象是甚麼、允許哪些數值、甚麼算作輸入，以及產生甚麼輸出。這些決定是使用集合和函數的語言來表達的。

啟動：定義建模宇宙

[10分鐘]

一所學校希望對學生的午餐等待時間進行建模。討論：

1. 討論對象的全集是甚麼：所有學生、所有用餐者，還是校園內的每一個人？
2. 甚麼可以定義一個函數作為輸入：到達時間、隊列長度、餐點類型，還是支付方式？
3. 函數應該返回甚麼輸出：等待時間、服務時間、總時間，還是等待超過 10 分鐘的概率？

建模教訓：模糊的集合會產生模糊的模型。一個好的模型會明確說明族群、變量和有效的輸入。

2 集合作為建模類別

核心定義

一個集合是若干物件組成的整體。這些物件稱為元素。如果 x 是 A 的元素，則寫 $x \in A$ ；否則，寫 $x \notin A$ 。

如果 A 的每一個元素也在 B 中，則稱 A 是 B 的子集，寫成 $A \subseteq B$ 。如果 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$ ，則稱 A 是 B 的真子集，寫成 $A \subsetneq B$ 。

空集寫成 $\emptyset$ 。它不包含任何元素。

實例 1：使用集合對學生進行分類

令 U 是建模俱樂部中的學生集合。定義

$$A = \{\text{會 Python 的學生}\}, \quad B = \{\text{參加過建模競賽的學生}\}.$$

那麼：

- $A \cap B$ 是同時會 Python 且有競賽經驗的學生的集合。
- $A \cup B$ 是會 Python 或有競賽經驗（或兩者皆有）的學生的集合。
- A^c 是 U 中不會 Python 的學生的集合。
- $B - A$ 是有競賽經驗但沒有 Python 經驗的學生的集合。

這些並非抽象符號；它們是老師可以使用的類別，用以組成平衡的團隊。

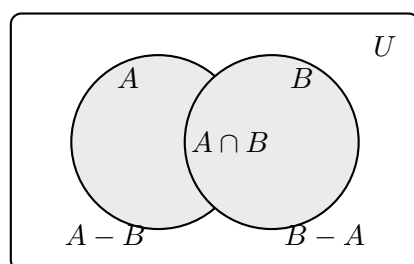


圖 1: 維恩圖是關於類別、重疊和排除的簡潔推理方式。

集合運算

給定在全集 U 中的集合 A 和 B ,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ 且 } x \notin A\}, \quad A^c = U - A.$$

數學中的「或」通常是包含的： $x \in A \cup B$ 允許 x 同時在兩個集合中。

檢查點：集合語言檢查

令 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, 且 $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ 。求 $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ 和 A^c 。然後寫一句話解釋每個集合，如果 A 代表「偶數學生」，而 B 代表「被選中的試點測試學生」。

3 關係與函數

從 X 到 Y 的一個關係是任意有序對 (x, y) 的集合，其中 $x \in X$ 且 $y \in Y$ 。一個函數是一種特殊的關係：每個輸入都與至多一個輸出配對。在大多數微積分的語境中，我們要求所給定的定義域中的每一個輸入都恰好有一個輸出。

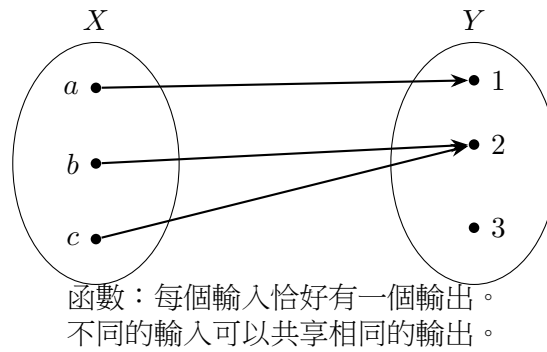


圖 2: 多對一的關係仍然可以是一個函數。禁止的模式是單個輸入產生兩個不同的輸出。

範例 2：它是一個函數嗎？

令 $X = \{1, 2, 3\}$ 且 $Y = \{a, b, c\}$ 。

1. $R_1 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ 是從 X 到 Y 的一個函數，因為每個輸入都有且僅有一個輸出。
2. $R_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c)\}$ 不是一個函數，因為輸入 1 有兩個不同的輸出。
3. $R_3 = \{(1, a), (2, b)\}$ 是定義域為 $\{1, 2\}$ 上的函數，但如果要求使用 X 中的每一個元素，則它不是定義域為 X 的函數。

建模解釋：如果輸入是「學生編號」，那麼「班級水平」的模型就不應為同一個學生輸出兩個不同的班級水平。

定義域、共域與值域

對於函數 $f: X \rightarrow Y$ ，

- 定義域是函數定義的輸入集合；
- 共域是宣告的輸出宇宙 Y ；
- 值域是實際發生的輸出集合。

在符號上，

$$\text{Dom}(f) = \{x \mid f(x) \text{ 已定義}\}, \quad \text{Range}(f) = \{f(x) \mid x \in \text{Dom}(f)\}.$$

4 實數函數、定義域與圖形

在微積分與數學建模中，一個常見的情況是實數函數，其中輸入與輸出皆為實數。如果給出一個公式而未說明定義域，則其隱含的定義域是該公式有意義的所有實數的最大的集合。

範例計算 3：從公式中求定義域與值域

考慮

$$f(x) = \sqrt{x - 2}.$$

為了得到實數輸出，平方根內的表達式必須是非負的：

$$x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2.$$

因此

$$\text{Dom}(f) = [2, \infty), \quad \text{Range}(f) = [0, \infty).$$

圖形的起點是 $(2, 0)$ 。

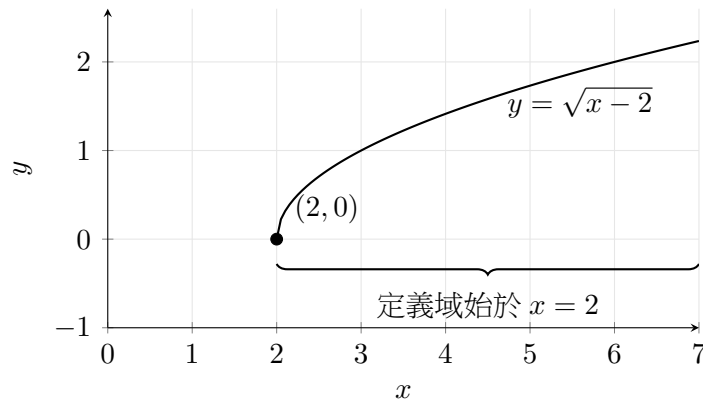


圖 3: 函數 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 的圖形僅在公式產生實數值的地方開始。

垂直線檢驗

如果一曲線是 x 的函數的圖形，則任何垂直線都最多與它相交一次。這是「一個輸入，一個輸出」規則的幾何版本。

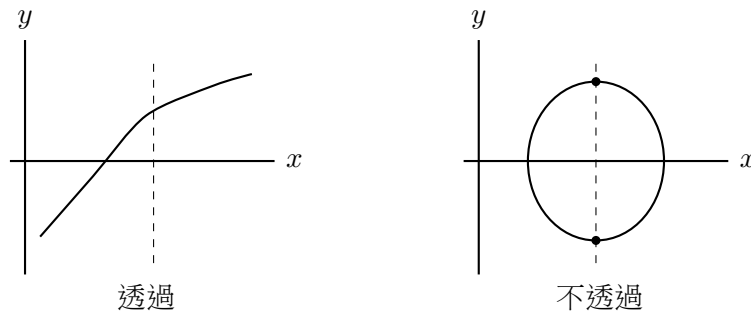


圖 4: 左側的曲線代表一個函數；右側的圓形則不代表，因為一個 x 對應多個 y 值。

檢查點：定義域檢查

求出每個實數函數的定義域：

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$;

2. $g(x) = \sqrt{9-x^2}$;

3. $h(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

對於每一個，請先用文字說明限制條件，再寫出區間或集合表示法。

5 運算與合成

函數可以進行加法、減法、乘法、除法以及合成。這些運算很有用，因為許多模型都是從子模型構建而成的。

函數的代數

如果 f 的定義域是 A ，而 g 的定義域是 B ，則和、差與積在 $A \cap B$ 上定義：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

商在兩個函數都定義且 $g(x) \neq 0$ 的地方定義：

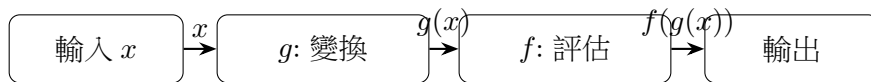
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

合成

複合函數 $f \circ g$ 是

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

輸入 x 必須首先對 g 有效，然後輸出 $g(x)$ 必須作為 f 的輸入是有效的。



合成代表一條建模流程：一個步驟的輸出成為下一個步驟的輸入。

圖 5: 合成代表一系列的變換。

計算範例 4：合成與定義域

設

$$f(u) = \sqrt{u}, \quad g(x) = 4 - x^2.$$

則

$$(f \circ g)(x) = f(4 - x^2) = \sqrt{4 - x^2}.$$

定義域不是所有實數。由於平方根要求 $4 - x^2 \geq 0$,

$$-2 \leq x \leq 2.$$

因此

$$\text{Dom}(f \circ g) = [-2, 2].$$

建模解釋：如果 $g(x)$ 計算了一個必須是非負數才能被另一個公式使用的預測量，則定義域檢查可以防止產生無意義的輸出。

計算範例 5：函數迭代

設

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

計算 $f(f(f(2)))$ ：

$$f(2) = \frac{1}{3}, \quad f(f(2)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{4},$$

$$f(f(f(2))) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{1+3/4} = \frac{4}{7}.$$

在建模中迭代是很重要的，因為差分方程只是重複的函數應用：

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

模型檢視：常見錯誤：忽略定義域

一個公式可能在代數上看起來是正確的，但作為一個實數函數則會失敗。例如，

$$\frac{1}{\sqrt{x - |x|}}$$

對於任何實數 x 都無法定義：如果 $x \geq 0$ ，則 $x - |x| = 0$ ，分母為零；如果 $x < 0$ ，則 $x - |x| = 2x < 0$ ，所以平方根不是實數。

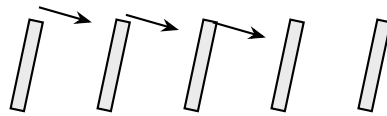
6 簡短延伸：歸納法與二項式係數

此補充筆記原先包含歸納法與二項式係數。它們很有價值，但在兩小時的課程中，應視為一個簡短的延伸或家庭作業的途徑。它們在後續的數學建模、計數、概率和二項分佈中有所助益。

數學歸納法

要證明命題 $P(n)$ 對於所有正整數 n 成立：

1. 證明基本情況： $P(1)$ 為真。
 2. 證明歸納步驟：如果 $P(k)$ 為真，則 $P(k+1)$ 為真。
- 則 $P(n)$ 對於所有 $n \in \mathbb{Z}^+$ 成立。



基本情況開始鏈；歸納步驟將真理從一個情況傳遞到下一個情況。

圖 6: 歸納法是一個邏輯的連鎖反應，而非數值模式的檢查。

例題 6：前 n 個整數的和

證明

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

基本情況: 對於 $n = 1$ ，左邊 = 1 而右邊 = $1(2)/2 = 1$ 。

歸納步驟: 假設

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

則

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

這正好是 $n = k+1$ 的公式。因此該公式對所有 $n \in \mathbb{Z}^+$ 成立。

二項式係數

階乘是

$$n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1.$$

二項式係數

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

計算從 n 個物體中選擇 k 個物體的種數。二項式定理是

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

檢查點：延伸檢查

- 1. 計算 $\binom{8}{3}$ 並解釋它計算的是甚麼。
- 2. 利用二項式定理展開 $(1 + x)^4$ 。
- 3. 透過將兩邊視為 n 個元素的集合的子集計數來解釋 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ 。

7 在建模報告中應用這些想法

模型檢視：數學語言核對表

在撰寫模型時，請檢查以下事項：

- 1. 研究的宇宙或總體是甚麼？
- 2. 每個函數或變量的定義域是甚麼？
- 3. 是否有必須排除的數值，例如負數或零分母？
- 4. 每個輸入是否確定地決定了唯一的輸出？
- 5. 如果組成兩個公式，第一個公式的輸出作為第二個公式的輸入是否有效？
- 6. 圖形是否與聲稱的函數和定義域相符？

課程總結

概念	建模含義
集合 (Set)	定義被建模的總體、類別或集合。
子集 (Subset)	描述在更大建模宇宙中的一個較窄類別。
聯集/交集 (Union/intersection)	組合或重疊類別，可用於分組和過濾數據。
補集 (Complement)	代表宇宙中不滿足某個條件的所有元素。
函數 (Function)	一種確定的輸入-輸出規則；每個輸入都有一個輸出。
定義域 (Domain)	表明哪些輸入值是有效且有意義的。
值域 (Range)	表明模型實際可以產生的輸出值。
圖形 (Graph)	有序對 $(x, f(x))$ 的視覺表示。
合成 (Composition)	代表一系列模型的轉換。
歸納/二項式 (Induction/binomial)	支持離散推理、計數和概率模型。

檢查點：出門考題

一所學校透過以下公式對餐廳的總時間進行建模：

$$T(n) = \sqrt{25 - n} + \frac{60}{n},$$

其中 n 是開放服務櫃檯的數量。

1. 這個公式對 n 施加了哪些實數限制？
2. 應該施加哪些額外的現實世界限制？
3. 在最佳化這個模型之前，為甚麼檢查定義域很重要？

核心練習

1. 令 $U = \{1, 2, \dots, 12\}$ ， $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ，且 $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 。求 $A \cup B$ ， $A \cap B$ ， $A - B$ ，以及 $(A \cup B)^c$ 。
2. 判斷以下關係是否為函數：(a) $\{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$ ；(b) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ ；(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ ；(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ 。
3. 求每個實函數的定義域： $f(x) = \sqrt{x+5}$ ， $g(x) = 1/(x^2 - 9)$ ， $h(x) = \sqrt{4-x}/(x+1)$ 。
4. 令 $f(x) = x^2 + 1$ 和 $g(x) = 2x - 3$ 。求 $f \circ g$ ， $g \circ f$ ， $(f+g)(x)$ ，以及 $(fg)(x)$ 。
5. 使用歸納法證明 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ 。

答案核對：核心練習

集合題的答案為

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}, & A \cap B &= \{6, 12\}, \\ A - B &= \{2, 4, 8, 10\}, & (A \cup B)^c &= \{1, 5, 7, 11\}. \end{aligned}$$

四個關係依次是函數、不是函數、是函數、不是函數。三個定義域依次為 $[-5, \infty)$ 、 $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ 、 $(-\infty, -1) \cup (-1, 4)$ 。對指定的 f 與 g ，

$$f \circ g = (2x - 3)^2 + 1, \quad g \circ f = 2x^2 - 1, \quad f + g = x^2 + 2x - 2, \quad fg = (x^2 + 1)(2x - 3).$$

歸納題應核對基本情況，並證明 k 成立可推出 $k+1$ 成立。

建模挑戰

一所學校希望組建建模團隊。令 U 為所有參加培訓課程的學生。定義表示知道 Python 的學生、在寫作方面強的學生、有過比賽經驗的學生，以及在星期六有空缺席的學生。

1. 使用清晰的符號定義四個集合。
2. 為知道 Python 且在星期六有空缺席的學生的集合寫出表達式。
3. 為具有寫作能力但沒有過比賽經驗的學生寫出表達式。
4. 假設每位學生被分配了確切的一個角色：編碼者、寫作者、分析師或報告者。那麼「學生 $\mapsto$ 角色」是否是一個函數？解釋。
5. 假設每位學生可能有多種能力。那麼「學生 $\mapsto$ 能力」是否是一個函數？解釋。
6. 寫一段簡短的段落，解釋如何利用這種集合和函數的語言來幫助老師組建平衡的團隊。

答案核對：建模挑戰

完整答案應使用正確的集合符號，並清楚列出所有成員條件。「學生 $\mapsto$ 角色」在每位學生恰有一個角色時才是函數；「學生 $\mapsto$ 能力」通常不是單值函數，除非把陪域重新設計為能力集合。建議亦應把團隊平衡連結至已述的時間與技能約束。

延伸練習

1. 透過歸納法證明

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. 利用二項式定理證明 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ ，然後用子集來解釋它。

3. 令 $f(x) = 1/(1+x)$ 。求前五次迭代 $f(1)$, $f^{(2)}(1)$, $\dots$, $f^{(5)}(1)$ 的公式。你觀察到甚麼規律？

4. 求 $F(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ 的定義域。用區間表示法給出答案，並用符號圖來證明它。

答案核對：延伸練習

平方和可使用歸納假設；子集恆等式可把 $1+1$ 代入二項式定理。前五次迭代為

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}.$$

最後一式的定義域為

$$(-\infty, -2) \cup [1, \infty).$$

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《大學預備微積分》第二版（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。