

數學建模講義

第 12 講：圖像與定性建模

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 在未知精確方程時，以圖像的形狀作為數學模型；
2. 把反應曲線的交點識別並解釋為平衡點；
3. 根據斜率、凹凸性與曲線移動推斷政策影響；
4. 構建簡單的離散動力系統並檢驗其穩定性；
5. 解釋經濟條件 $MR = MC$ ，並把它與供給曲線連繫起來；
6. 利用供給及需求圖像分析從量稅；
7. 撰寫包含假設、圖像與限制的定性建模結論。

1 以圖像作為模型

模型不一定要由完全指定的公式開始。在許多政策與競賽問題中，我們往往先知道定性特徵，然後才知道數值。例如，需求曲線向下傾斜；成本曲線可能先趨平，繼而變得陡峭；威懾所需的配置可能增加，但新增配置的邊際作用遞減。這些特徵本身就是數學資訊。

定性圖像模型利用一個或多個函數的形狀推斷系統行為。其核心問題包括：

- 曲線在何處相交？
- 交點穩定還是不穩定？
- 參數如何使曲線移動？
- 即使精確公式改變，哪些結論仍然穩健？

引入：圖像能告訴我們甚麼？

[12 分鐘]

考慮一間學校飯堂。令 q 為準備的午餐份數， $C(q)$ 為總成本。

1. 繪畫一條合理的成本曲線。它應否遞增？應否是直線？
2. 繪畫價格與需求量之間的一條合理需求曲線。
3. 即使沒有精確方程，仍可由曲線形狀得出甚麼結論？列出一項。

建模要點：圖像記錄了假設。直線表示邊際作用固定；曲線則表示邊際作用會改變。

核心詞彙

反應曲線表示系統某一部分為回應另一部分而需要達到的數值。平衡點是所有反應要求同時獲得滿足的交點。比較靜態分析研究參數使曲線移動後，平衡點會如何改變。

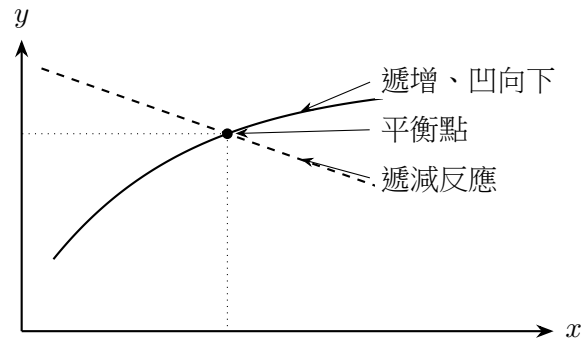


圖 1: 圖像模型把有關方向與曲率的定性假設，轉化為對交點與比較靜態的預測。

2 案例研究一：軍備競賽的圖像模型

本講納入軍備競賽模型，並非因為其政治內容，而是因為它是定性建模的優秀例子。建模者不需要知道精確的軍事公式；反應曲線的形狀已足以產生有用結論。

令 x 為 X 國持有的武器數目， y 為 Y 國持有的武器數目。假設

$$y = f(x)$$

表示：當 X 國有 x 件武器時，Y 國為維持威懾所需的最少武器數目。類似地，

$$x = g(y)$$

表示：當 Y 國有 y 件武器時，X 國所需的最少武器數目。

威懾曲線的假設

核心課程採用三項定性假設。

1. f 與 g 均遞增：一方增加武器，另一方便需要作出更強回應。
 2. 兩者均凹向下：對手最初增加的武器影響很大，其後每次增加的邊際影響可能較小。
 3. 即使對手只有很少武器，兩條曲線的截距仍表示最低反擊要求。
- 這些假設比完整公式弱，卻足以支持政策推理。

例題 1：解讀威懾平衡點

假設兩條反應曲線相交於 (x_m, y_m) 。在此點，X 國相對於 Y 國擁有足夠武器，而 Y 國相對於 X 國亦擁有足夠武器。因此，該點是相互威懾的平衡點。

若目前狀態位於 $y = f(x)$ 下方，Y 國便認為其武器庫不足，並增加武器；若目前狀態位於 $x = g(y)$ 左方，X 國亦會認為其武器庫不足，並增加武器。若每次反應幅度適中，反覆回應會使系統趨向交點。

例題 2：政策引致的曲線移動

當我們探討政策如何改變曲線，圖像模型便能發揮作用。

1. X 國的民防措施。若 X 國更有效地保護其人口，Y 國便需要更多倖存武器才能產生相同的威懾作用。因此，Y 國的反應曲線 $y = f(x)$ 向上移。新平衡點的 y 較大；當 X 國回應 Y 國的武器擴張時， x 通常亦會增加。
2. X 國的機動導彈。若 X 國的武器較難被摧毀，它便只需較少武器來維持相同的生存能力。X 國的反應曲線 $x = g(y)$ 向左移或變得較平坦，兩國的平衡武器數目均可能下降。

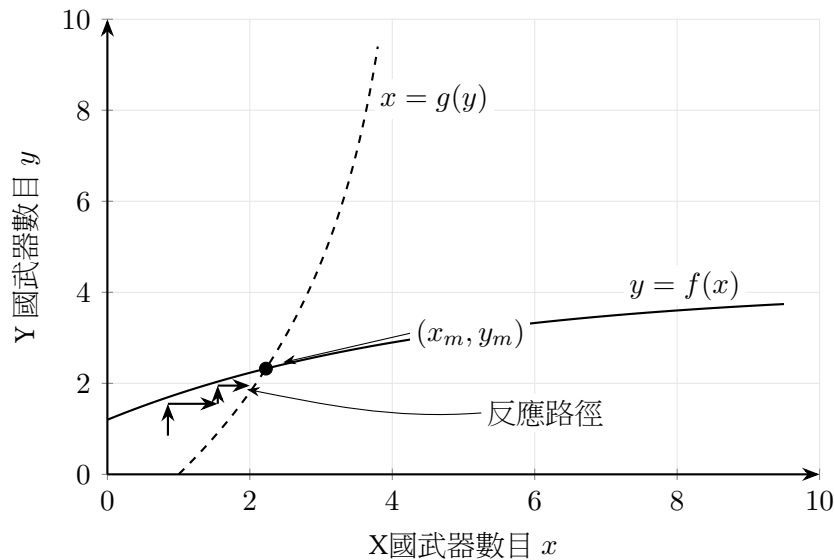


圖 2: 兩條反應曲線決定相互威懾的平衡點。此圖是定性的：結論取決於曲線形狀與移動方向，而非精確數值坐標。

3. 多彈頭。若一件武器能攻擊多個目標，交換比率便會改變。截距效應可能降低所需發射器數目，但攻擊效應亦可能令反應曲線變得更陡。此時純粹定性的圖像可能無法給出唯一答案；建模者必須說明需要更多數據或更明確的公式。

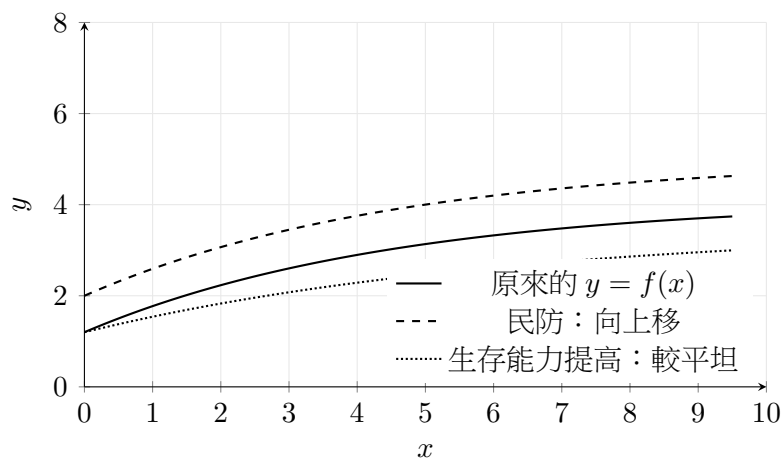


圖 3: 政策分析往往可歸結為曲線移動。關鍵問題是哪一個參數改變，以及曲線向哪個方向移動。

檢查點：圖像政策核查

某國興建更堅固的導彈掩體，令較大比例的武器可在首次攻擊後倖存。哪一條反應曲線會移動：該國本身的曲線，還是對手的曲線？曲線會向上、向下、向左移，還是變得較平坦？用兩句話解釋。

3 離散軍備競賽更新

圖像給出定性方向，離散動力系統則給出一列數值更新。

例題 3：分階段軍備競賽模型

假設 Y 國認為，即使 X 國沒有任何武器，它仍需要 120 件武器；其後 X 國每有兩件武器，Y 國便增加一件。X 國則認為，即使 Y 國沒有任何武器，它仍需要 60 件武器；其後 Y 國每有三件武器，X 國便增加一件：

$$y_{n+1} = 120 + \frac{1}{2}x_n, \quad x_{n+1} = 60 + \frac{1}{3}y_n.$$

在平衡點，

$$y^* = 120 + \frac{1}{2}x^*, \quad x^* = 60 + \frac{1}{3}y^*.$$

把第二條方程代入第一條：

$$y^* = 120 + \frac{1}{2} \left(60 + \frac{1}{3}y^* \right) = 150 + \frac{1}{6}y^*.$$

因此 $\frac{5}{6}y^* = 150$ ，故

$$y^* = 180, \quad x^* = 120.$$

反應係數之積為 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < 1$ ，所以反覆更新會收斂至平衡點。

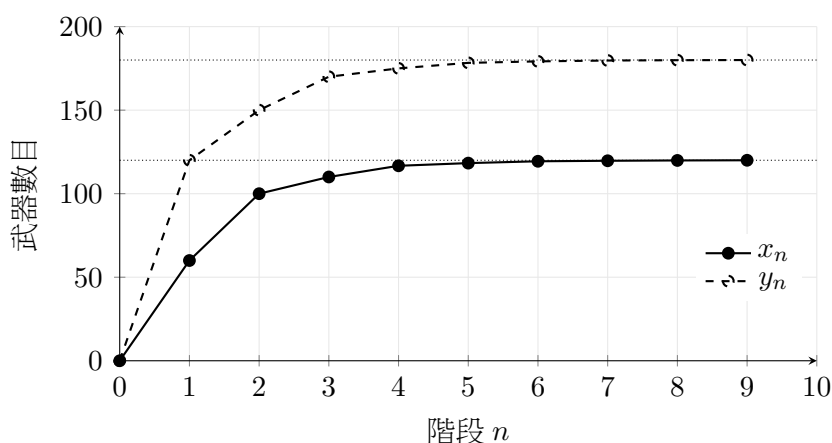


圖 4: 當反應係數之積小於一，分階段軍備競賽模型會以幾何速率收斂至平衡點。

模型檢視：模型批判：更新方程隱藏了甚麼？

更新方程假設雙方只根據對手上一階段的武器庫作出反應，而且係數固定；當中沒有談判、預算限制、國內政治或不確定性。良好的建模報告應把此遞推關係表述為簡化的預警模型，而非完整的政治行為理論。

4 案例研究二：企業行為與 $MR = MC$

圖像建模亦可解釋經濟決策。令 q 為產量。完全競爭企業接受市場價格 p ，故其邊際收益為 $MR = p$ ，而邊際成本為 $MC(q) = TC'(q)$ 。

利潤最大化規則

利潤為

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q).$$

一階條件為

$$\Pi'(q) = MR(q) - MC'(q) = 0.$$

對完全競爭企業而言， $MR = p$ ，因此企業在下列條件成立之處生產：

$$MR = MC.$$

當 $MR > MC$ 時，企業應增加產量；當下一單位的成本高於其收益時，便應停止增加產量。

例題 4：企業的最佳產量

一名小型生產者以每單位 $p = 10$ 元出售產品，總成本為

$$TC(q) = 100 + 2q + 0.1q^2.$$

於是

$$TR(q) = 10q, \quad \Pi(q) = 10q - (100 + 2q + 0.1q^2) = 8q - 0.1q^2 - 100.$$

邊際成本為

$$MC(q) = TC'(q) = 2 + 0.2q.$$

令 $MR = MC$ ：

$$10 = 2 + 0.2q \Rightarrow q^* = 40.$$

最大利潤為

$$\Pi(40) = 8(40) - 0.1(40)^2 - 100 = 60.$$

圖像顯示相同結論：持續生產，直至水平價格線與邊際成本曲線相交。

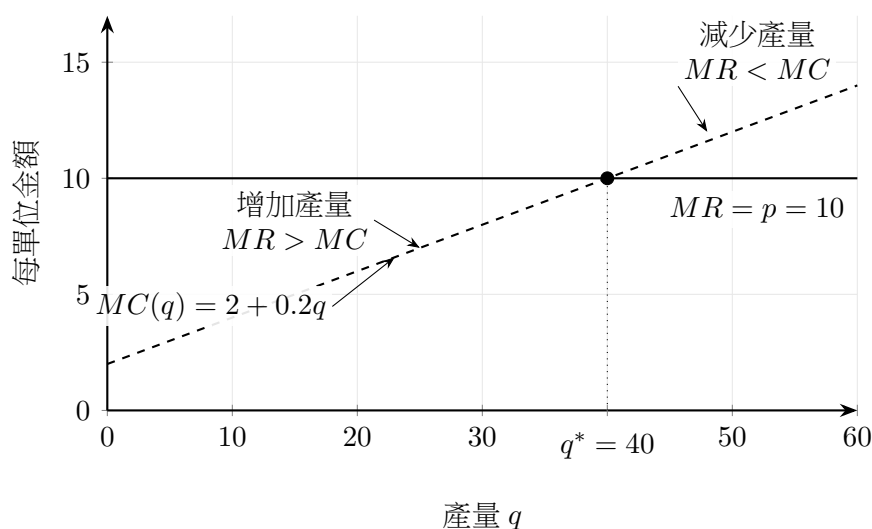


圖 5: 對完全競爭企業而言，利潤最大化產量出現在價格等於邊際成本之處。

檢查點：經濟解釋

若向生產者徵收每單位 2 元的稅，邊際成本便成為 $MC(q) = 4 + 0.2q$ 。新的最佳產量是多少？解釋產量為何下降。

5 汽油稅：供給、需求與稅負歸宿

現在由單一企業轉向整個市場。供給曲線表示生產者願意供應數量 q 時所要求的價格；需求曲線表示消費者願意購買數量 q 時所接受的價格。兩者的交點是市場平衡點。

從量稅會使供給曲線向上移動相當於稅額的距離。消費者支付的價格上升，交易量下降，而稅務負擔由消費者與生產者共同承擔。

例題 5：線性稅負歸宿

假設

$$S(q) = 1 + 0.5q, \quad D(q) = 5 - 0.5q.$$

原有平衡點滿足

$$1 + 0.5q = 5 - 0.5q \Rightarrow q^* = 4, \quad p^* = 3.$$

從量稅 $\tau = 1$ 使供給曲線移至

$$S_1(q) = S(q) + 1 = 2 + 0.5q.$$

新平衡點滿足

$$2 + 0.5q = 5 - 0.5q \Rightarrow q_1 = 3, \quad p_1 = 3.5.$$

消費者每單位多付 $p_1 - p^* = 0.5$ 元。生產者收到 $p_1 - \tau = 2.5$ 元，比原來少0.5 元。在這個對稱例子中，一元稅款由雙方平均分擔。

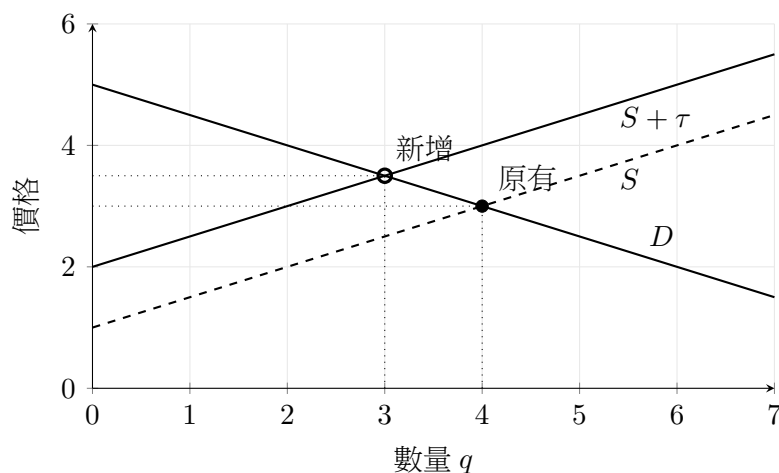


圖 6: 從量稅使供給曲線向上移。價格上升的幅度少於稅額，而交易量下降。

稅負歸宿與彈性

市場中較缺乏調整彈性的一方承擔較多稅負。若需求曲線陡峭，消費者難以減少購買量，故大部分稅負由消費者承擔；若需求曲線平坦，消費者容易轉用其他選擇，生產者便會吸收較多稅款。

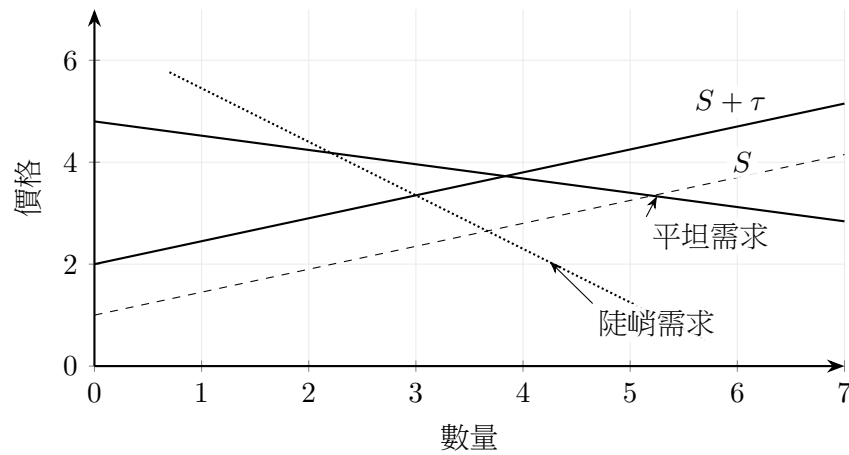


圖 7: 同一項稅收會因需求曲線的斜率而產生不同影響。這項定性結論不需要精確函數形式。

模型檢視：汽油需求的短期與長期差異

石油價格衝擊剛發生時，需求往往缺乏彈性：人們仍須通勤，汽車無法立即更換，公共交通亦可能不可用。汽油稅此時會推高價格，但交易量可能只略為下降。經過數年後，隨着人們購買節能汽車、改變路線、共乘或使用公共交通，需求便會變得較有彈性。同一項稅收屆時能更有效地減少消耗量。政策結論取決於所考慮的時間範圍。

6 分層工作坊：選擇以圖像為基礎的模型

分層建模工作坊

[18分鐘]

選擇一條學習路線。

1. 核心路線：稅務圖像。畫出供給與需求曲線，再把供給曲線向上移動一個稅額，並標示新舊平衡點。說明需求陡峭時哪一方支付較多稅款。
2. 挑戰路線：分階段更新。對

$$y_{n+1} = 200 + \frac{1}{3}x_n, \quad x_{n+1} = 80 + \frac{1}{4}y_n,$$

求平衡點並檢驗穩定性。

3. 延伸路線：曲線移動論證。利用威懾曲線解釋為何提高生存能力可能降低平衡武器數目，而提高攻擊交換比率則可能令其增加。

選擇以圖像為基礎的建模工具

情境	圖像工具	所回答的問題
雙方互相回應	反應曲線	雙方的要求在何處同時獲得滿足？
反覆策略回應	差分方程	過程會否收斂？
企業選擇產量	MR 與 MC 曲線	哪個產量使利潤最大？
市場出清	供給與需求	會出現甚麼價格與交易量？
政策介入	曲線移動	平衡點如何改變？
未知精確公式	形狀與斜率推理	哪些結論仍然穩健？

7 撰寫定性模型結論

模型檢視：競賽式表達

定性圖像模型的表述不應含糊。嚴謹的段落應包括：

1. 變量：坐標軸所表示的量。
2. 形狀假設：遞增／遞減、凹凸性、截距或穩定性。
3. 機制：這些形狀為何合理。
4. 結論：政策改變後，平衡點會如何變動。
5. 限制：沒有數據時，哪些問題無法確定。

較弱的結論：「稅收令價格上升。」

較有力的結論：「從量汽油稅使供給曲線向上移。新平衡點的消費者價格較高，而交易量較低。由於短期汽油需求曲線陡峭，大部分稅負由消費者承擔，交易量只會略為下降；因此，作為即時節約政策，此稅項成效不高，但當需求長期變得較有彈性時，政策可能更有效。」

本課總結

概念	建模意義
定性圖像模型	在未知精確方程時，利用方向、曲率與交點建模。
反應曲線	顯示系統某一部分為回應另一部分而要求的數值。
平衡點	所有要求同時獲得滿足的交點。
曲線移動	表示政策、技術、成本或偏好的改變。
分階段軍備競賽	反應曲線的差分方程版本；若反應係數之積小於一，系統便穩定。
$MR = MC$	完全競爭企業持續生產，直至下一單位的成本等於其收益。
供需平衡	願意供應與願意購買的交點。
稅負歸宿	市場中較缺乏調整彈性的一方承擔較多稅負。
模型批判	說明形狀假設，並指出結論何時只屬定性。

檢查點：離堂短答

用三句話解釋：即使不知道精確公式，圖像建模為何仍然有用。以軍備競賽模型或汽油稅模型為例。

核心練習

1. 反應曲線 $y = f(x)$ 向上移。利用圖像解釋它與另一條保持不變的遞增曲線 $x = g(y)$ 之交點會如何改變。
2. 對 $y_{n+1} = 50 + 0.4x_n$ 、 $x_{n+1} = 30 + 0.2y_n$ ，求平衡點並檢驗穩定性。
3. 一間企業的總成本為 $TC(q) = 200 + 4q + 0.05q^2$ ，並以價格 $p = 12$ 出售產品。求 q^* 及最大利潤。
4. 供給與需求分別為 $S(q) = 2 + 0.3q$ 、 $D(q) = 8 - 0.7q$ 。先求平衡點，再徵收稅款 $\tau = 1$ ，並求新的平衡點。
5. 畫出兩條需求曲線，一條陡峭、一條平坦。對同樣的供給曲線移動，解釋哪一種情況會令交易量減少得較多。

建模挑戰

一個城市希望減少學校附近的私家車使用量，可以選擇徵收泊車費、改善巴士服務，或重新設計校門區域。構建一個定性圖像模型。

1. 定義圖像的坐標軸。可考慮：駕車成本與汽車數目、等候時間與學生人數，或泊車位的供給與需求。
2. 說明每條曲線的形狀假設。
3. 顯示其中一項政策如何令一條曲線移動。
4. 預測平衡點的變動方向。
5. 撰寫簡短建議，並說明需要哪些數據才能量化預測。

延伸練習

1. 對分階段軍備競賽系統

$$y_{n+1} = a + bx_n, \quad x_{n+1} = c + dy_n,$$

推導平衡點，並證明收斂條件為 $|bd| < 1$ 。

2. 對線性供給與需求 $S(q) = \alpha + \beta q$ 、 $D(q) = \gamma - \delta q$ ，推導消費者承擔從量稅 τ 的比例。
3. 構建圖像論證，解釋為何公共交通補貼在長期可能比短期減少更多汽油使用量。
4. 解釋軍備競賽反應曲線模型的一項限制；即使繪畫更詳細的圖像，也無法消除此限制。

選讀附錄：平滑威懾公式

威懾曲線的一種可能解析形式是

$$y = \frac{y_0}{s^{x/y}}, \quad 0 < s < 1.$$

它表示：若 X 國可多次瞄準 Y 國的導彈，Y 國便需要更多武器，才能保留足夠的倖存武器。相比公式本身，其定性性質更重要：曲線遞增且凹向下。在學生報告中，只有在以文字解釋相關假設後，才應引入此公式。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

現代建模橋樑

當代建模往往結合多種傳統，而非只選擇一條方程。網絡模型表達關係結構；代理人模型揭示異質個體的局部規則；穩健最佳化保障決策免受輸入不確定性的影響；因果模型區分干預與關聯；正則化預測則在候選特徵眾多時控制複雜度。核心循環仍然相同：界定目的、表達機制與證據、核證計算、就預定用途驗證模型、量化不確定性，然後修訂。讀者可於 skcKenneth.github.io 使用相關互動例子。

延伸閱讀

- 《經濟學原理》第三版（OpenStax）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。