

數學建模講義

第 11 講：量綱分析與相似律

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，學生應能：

1. 解釋量綱分析為何能降低實驗的複雜程度；
2. 核查方程是否量綱相容；
3. 以 MLT 系統的質量、長度與時間表示物理量；
4. 透過求解指數方程構建無量綱乘積；
5. 應用白金漢 Π 定理縮減變量列表；
6. 利用量綱分析推導風力、單擺週期及烘烤時間等尺度律；
7. 解釋相似律，以及模型實驗為何必須使關鍵無量綱數相同；
8. 撰寫一段建模文字，交代變量、假設、 Π 群、模型效度驗證與限制。

1 為何要進行量綱分析？

物理模型通常由一系列很長的可能變量開始。若實驗者研究 n 個變量，並為每個變量測試 k 個數值，完整網格便需要 k^n 次試驗。這就是實驗設計中的維數災難。

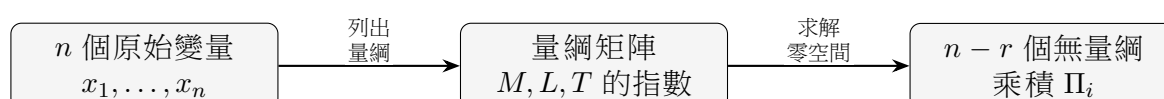
量綱分析不會神奇地找出完整定律。它所運用的原則是：物理定律不能取決於我們用米還是呎、公斤還是磅來量度。因此，重要關係可以用變量的無量綱組合表示，從而把原有的 n 個變量縮減為數目少得多的無量綱群。

引入：實驗負擔

[12 分鐘]

一個團隊希望研究小型水下機械人所受的阻力。他們推測阻力取決於速度 v 、長度 L 、水的密度 ρ 、黏度 μ 與迎風面積 A 。

1. 若每個變量都測試 5 個數值，完整網格需要多少次實驗？
2. 為何這對學校或競賽專案而言可能不切實際？
3. 哪一類數學方法可協助減少實驗次數？



實驗改變 Π 群，而非逐一獨立改變所有原始變量。

圖 1: 量綱分析把冗長的變量列表轉化為一組較精簡的無量綱群。

2 量綱與相容性

在力學中，大多數物理量都可用三個基本量綱表示：

$$M = \text{質量}, \quad L = \text{長度}, \quad T = \text{時間}.$$

速度的量綱為 LT^{-1} ；力的量綱為 MLT^{-2} ；能量的量綱為 ML^2T^{-2} 。

量綱相容性

若方程中每個相加或相減的項都具有相同量綱，該方程便是量綱相容的。乘積與幂可以具有不同量綱，但相加各項的量綱必須相同。

例如，在

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

中，每一項的量綱都是 L ，所以此方程通過相容性核查。

物理量	量綱	常用單位
速度 v	LT^{-1}	m/s
加速度 a	LT^{-2}	m/s ²
力 F	MLT^{-2}	N
密度 ρ	ML^{-3}	kg/m ³
壓力 p	$ML^{-1}T^{-2}$	Pa
動力黏度 μ	$ML^{-1}T^{-1}$	Pa s
能量 E	ML^2T^{-2}	J
功率 P	ML^2T^{-3}	W

例題 1：在收集數據前識別錯誤模型

一名學生提出以下模型，描述移動物體所需的力：

$$F = mv + v^2.$$

其中

$$[F] = MLT^{-2}, \quad [mv] = M \cdot LT^{-1} = MLT^{-1},$$

而

$$[v^2] = L^2T^{-2}.$$

右方兩項不能相加，而且兩者的量綱都不是力的量綱。在開始任何數值擬合之前，我們已知道此模型的結構有誤。

建模要點：量綱核查是一種成本很低的錯誤偵測方法。它不能證明模型正確，卻能迅速排除許多不可能的模型。

檢查點：快速相容性核查

判斷下列各方程是否量綱相容。

1. $E = \frac{1}{2}mv^2$ 。
2. $p = \rho gh$ 。
3. $F = \rho A + mv$ 。

$$4. t = 2\pi\sqrt{L/g}.$$

3 構建無量綱乘積

無量綱乘積是若干變量幕的乘積，其總量綱為 $M^0 L^0 T^0$ 。

假設變量 $x_1, \dots, x_n$ 各自具有某個量綱。我們尋找指數 $a_1, \dots, a_n$ ，使

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

成為無量綱量。令 M, L, T 的各次幕相等，便得到一個齊次線性方程組。

例題 2：單擺

假設單擺的週期 t 取決於擺長 ℓ 、質量 m 、重力加速度 g 及釋放角 θ 。各變量為：

$$t(T), \quad \ell(L), \quad m(M), \quad g(LT^{-2}), \quad \theta(1).$$

考慮

$$t^a \ell^b m^c g^d \theta^e.$$

其量綱為

$$T^a L^b M^c (LT^{-2})^d = M^c L^{b+d} T^{a-2d}.$$

要使它成為無量綱量，必須有

$$c = 0, \quad b + d = 0, \quad a - 2d = 0.$$

當中有兩個自由選擇。取 $d = 1$ ，便有 $a = 2$ 、 $b = -1$ 、 $c = 0$ ，所以

$$\Pi_1 = \frac{gt^2}{\ell}.$$

取 $e = 1$ ，則有

$$\Pi_2 = \theta.$$

因此，週期定律必須具有以下形式：

$$\frac{gt^2}{\ell} = H(\theta), \quad \text{或} \quad t = \sqrt{\frac{\ell}{g}} h(\theta).$$

解釋：質量消失了。量綱分析預測單擺週期不取決於擺錘的質量。

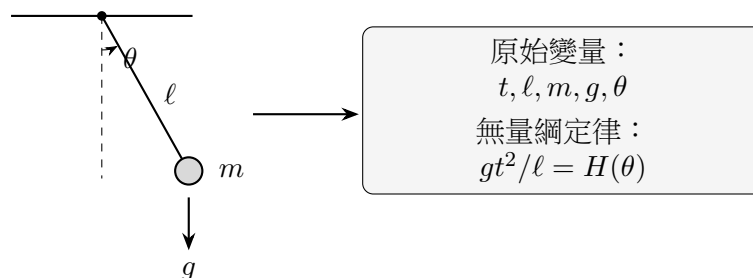


圖 2: 對單擺而言，量綱分析排除了質量，並找出正確尺度 $\sqrt{\ell/g}$ 。

例題 3：風力與遺漏的變量

初步嘗試可能假設標誌所受的風力只取決於風速 v 與面積 A ：

$$F = kv^a A^b.$$

但

$$[v^a A^b] = (LT^{-1})^a (L^2)^b = L^{a+2b} T^{-a},$$

並不合質量量綱。由於 $[F] = MLT^{-2}$ ，可知遺漏了一個帶有質量量綱的變量。
加入量綱為 ML^{-3} 的空氣密度 ρ ：

$$F = k\rho^c v^a A^b.$$

比較量綱得

$$M : 1 = c, \quad T : -2 = -a \Rightarrow a = 2,$$

$$L : 1 = -3c + a + 2b = -3 + 2 + 2b \Rightarrow b = 1.$$

因此

$$F = k\rho v^2 A.$$

解釋：風速倍增，力會變為四倍；迎風面積倍增，力亦會倍增。無量綱常數 k 必須透過實驗求得。

4 白金漢 Π 定理

白金漢 Π 定理

若模型採用 n 個有量綱變量，而量綱矩陣的秩為 r ，則物理關係可用

$$n - r$$

個互相獨立的無量綱乘積表示：

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0.$$

對大多數使用 M, L, T 的力學問題，秩通常為 $r = 3$ ，故無量綱群的數目通常是 $n - 3$ 。

便於學習的七步流程

1. 說明因變量及合理的自變量。
2. 寫出每個變量的 MLT 量綱。
3. 構建變量冪的乘積，並求出無量綱組合。
4. 核查每個 Π 群是否確實無量綱。
5. 運用白金漢定理寫出縮減後的關係。
6. 解釋尺度律，並指出仍須由數據決定的部分。
7. 利用無量綱變量的圖像進行模型效度驗證，而非只檢視原始變量。

例題 4：拋射射程

拋射物的水平射程 R 取決於初速度 v 、重力加速度 g 及發射角 θ 。

$$R(L), \quad v(LT^{-1}), \quad g(LT^{-2}), \quad \theta(1).$$

此處有四個變量，但由於只出現 L 與 T ，秩為二。因此，無量綱乘積共有 $4 - 2 = 2$ 個。令

$$R^a v^b g^c \theta^d.$$

其量綱為

$$L^a (LT^{-1})^b (LT^{-2})^c = L^{a+b+c} T^{-b-2c}.$$

要得到無量綱乘積，須有

$$a + b + c = 0, \quad -b - 2c = 0.$$

取 $a = 1$ ，則 $b = -2$ 、 $c = 1$ ，得

$$\Pi_1 = \frac{Rg}{v^2}.$$

角度本身已是無量綱量，故 $\Pi_2 = \theta$ 。所以

$$\frac{Rg}{v^2} = H(\theta), \quad \text{或} \quad \boxed{R = \frac{v^2}{g} H(\theta)}.$$

力學中的精確結果 $R = v^2 \sin(2\theta)/g$ 與量綱分析結果相容。量綱分析找出了尺度 v^2/g ，卻不能找出特定函數 $\sin(2\theta)$ 。

模型檢視：量綱分析能做與不能做的事

量綱分析可以揭示遺漏的變量、不可能成立的方程、尺度指數及有用的無量綱組合。它不能決定無量綱常數或 $H(\theta)$ 一類任意函數；這些部分需要理論、數據或模擬。

5 尺度律與模型改進

例題 5：火雞烘烤與 $w^{2/3}$ 定律

假設烘烤時間 t 取決於特徵長度 ℓ 、量綱為 $L^2 T^{-1}$ 的熱擴散率 κ ，以及一個無量綱溫度比。能把 t 、 ℓ 與 κ 組合成無量綱量的方式只有

$$\Pi = \frac{\kappa t}{\ell^2}.$$

因此，在烤爐條件固定時，

$$t \propto \frac{\ell^2}{\kappa}.$$

若火雞在幾何上相似，重量 w 便與體積成正比，所以

$$w \propto \ell^3, \quad \ell \propto w^{1/3}.$$

於是

$$\boxed{t \propto w^{2/3}}.$$

這有別於民間流傳的「每磅若干分鐘」規則；後者意味着 $t \propto w$ ，並傾向把較大的火雞烤得過熟。

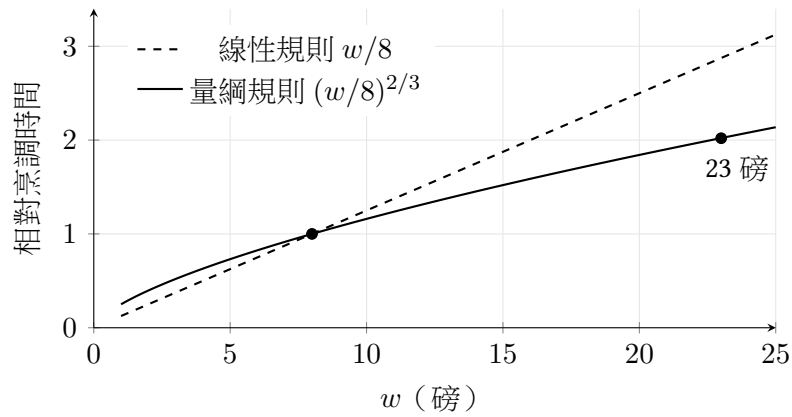


圖 3: $w^{2/3}$ 定律的增長速度比線性的每磅分鐘規則慢。

例題 6：雨滴的終端速度

令終端速度 v 取決於半徑 r 、重力加速度 g 、空氣密度 ρ 及動力黏度 μ ：

$$v(LT^{-1}), \quad r(L), \quad g(LT^{-2}), \quad \rho(ML^{-3}), \quad \mu(ML^{-1}T^{-1}).$$

共有 5 個變量，秩為 3，故預期有 2 個無量綱乘積。一組方便的選擇是

$$\Pi_1 = \frac{v}{\sqrt{rg}}, \quad \Pi_2 = \frac{r^{3/2} \sqrt{g} \rho}{\mu}.$$

因此

$$v = \sqrt{rg} H\left(\frac{r^{3/2} \sqrt{g} \rho}{\mu}\right).$$

解釋：終端速度並非只與 $\sqrt{rg}$ 成正比；黏度與密度會透過第二個無量綱群決定阻力所處的狀態。這正是微小霧滴、雨滴與冰雹不會完全遵循同一簡單定律的原因。

檢查點：尺度解釋

在風力模型 $F = k\rho v^2 A$ 中，若出現下列情況，力會如何改變？

1. 風速變為三倍，而 ρ 與 A 不變。
2. 標誌換成幾何相似、長和寬均為兩倍的新標誌。
3. 同一輛汽車在空氣密度較低的高海拔地區，以相同速度行駛。

6 相似律：從模型到原型

相似律是指實驗室模型與真實原型具有相同的相關無量綱乘積。只有幾何相似並不足夠；除非小型潛艇模型與真實潛艇的關鍵力比亦相同，否則兩者並不具有動力相似性。

經典無量綱數

名稱	公式	物理意義
雷諾數 Re	$\frac{vL\rho}{\mu}$	慣性／黏性
傅汝德數 Fr	$\frac{v^2}{gL}$	慣性／重力
馬赫數 Ma	$\frac{v}{c}$	速度／聲速
韋伯數 We	$\frac{\rho v^2 L}{\sigma}$	慣性／表面張力
阻力係數 C_D	$\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v^2 A}$	無量綱阻力

例題 7：溢洪道模型的傅汝德相似

在實驗室中測試一個比例為 1:20 的水壩溢洪道模型。原型水流速度為 $v_p = 8 \text{ m/s}$ 。由於重力效應佔主導，須使傅汝德數

$$Fr = \frac{v^2}{gL}$$

相同。令 $L_m = L_p/20$ 。傅汝德相似要求

$$\frac{v_m^2}{gL_m} = \frac{v_p^2}{gL_p}.$$

因此

$$v_m = v_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = 8 \sqrt{\frac{1}{20}} \approx 1.79 \text{ m/s}.$$

解釋：模型速度並非 $8/20 = 0.4 \text{ m/s}$ 。對由重力控制的自由表面流動，速度按長度的平方根縮放。

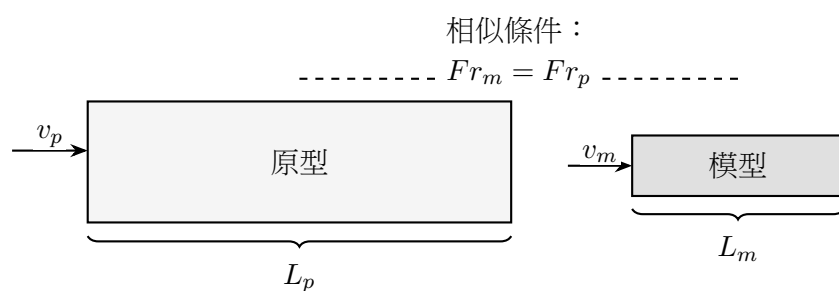


圖 4: 只有相關無量綱數相同，縮尺模型才能用於預測原型。

模型檢視：部分相似

在真實實驗中，可能無法同時使所有無量綱數相同。船舶模型可能要以傅汝德相似描述波浪，又要以雷諾相似描述黏性，但兩者要求的模型速度可能互相衝突。嚴謹的報告應說明哪些 Π 群已相同、哪些尚未相同，以及這會如何影響對預測的信心。

7 分層建模工作坊

量綱分析工作坊

[18 分鐘]

選擇一條學習路線。

1. 核心路線：拋射射程。利用量綱推導 $R = (v^2/g)H(\theta)$ ，再解釋量綱分析未能確定甚麼。
2. 挑戰路線：斯托克斯阻力。假設慢速球體所受阻力 F 取決於半徑 r 、速度 v 及黏度 μ ，證明 $F = k\mu r v$ 。
3. 延伸路線：爆炸波尺度律。假設爆炸半徑 R 取決於能量 E 、空氣密度 ρ 及時間 t ，推導尺度律 $R \propto (Et^2/\rho)^{1/5}$ 。

模型檢視：競賽式表達

良好的量綱分析段落應包括：

1. 因變量與假設採用的自變量；
2. 量綱表與所得 Π 群的數目；
3. 縮減後的無量綱關係；
4. 對尺度關係的物理解釋；
5. 一項模型效度驗證計劃與一項限制。

較弱的表述：「答案是 $t \propto w^{2/3}$ 。」

較有力的表述：「在火雞幾何相似、烤爐條件固定的假設下，烹調時間必須按 $t \propto \ell^2/\kappa$ 縮放。由於重量與體積成正比， $\ell \propto w^{1/3}$ ，所以 $t \propto w^{2/3}$ 。這預測大型火雞每磅所需時間比小型火雞少。主要限制是實際火雞並非完全相似，而烤爐的加熱亦不均勻。」

本課總結

概念	建模意義
MLT系統	利用質量、長度與時間表示物理量。
相容性	相加各項必須具有相同量綱；可快速核查模型錯誤。
無量綱乘積	若干變量幕的乘積，其總量綱為 $M^0 L^0 T^0$ 。
白金漢 Π 定理	把 n 個有量綱變量縮減為 $n - r$ 個無量綱群。
尺度律	揭示尺寸、速度、密度或時間的改變如何影響結果。
相似律	模型與原型的相關 Π 群必須相同。
部分相似	配對主導物理效應，並披露未能配對的效應。
模型效度驗證	擬合或比較無量綱變量，而非只比較原始變量。

檢查點：離堂短答

用三句話解釋在收集數據之前進行量綱分析的用處，並舉出一個無量綱乘積的例子。

練習題

核心練習

1. 在 MLT 系統中，求壓力、功率、密度、黏度與表面張力的量綱。
2. 核查 $p = \rho gh$ 、 $F = ma$ 與 $E = mv + gh$ 是否量綱相容。
3. 對單擺核證 gt^2/ℓ 是無量綱量。
4. 運用量綱分析證明質量—彈簧振子的週期必須具有 $t = C\sqrt{m/k}$ 的形式，其中 k 是量綱為 MT^{-2} 的彈簧剛度。
5. 若 $F = k\rho v^2 A$ ，當 v 倍增而 A 變為三倍時， F 會變為原來的多少倍？
6. 對傅汝德相似，比例為 1:25 的模型代表原型速度為 5 m/s 的河流。求模型速度。

建模挑戰

一個團隊希望設計小型實驗，研究玩具車在空氣中行駛時所受的阻力 F_D 。他們認為 F_D 取決於速度 v 、迎風面積 A 、空氣密度 ρ 、黏度 μ 及特徵長度 L 。

1. 列出所有變量的量綱。
2. 預測應出現多少個無量綱群。
3. 一個可能的群是雷諾數 $Re = vL\rho/\mu$ 。核證它是無量綱量。
4. 提出第二個包含 F_D 的無量綱群。
5. 解釋團隊應如何利用這些群比較小型模型車與真實汽車。
6. 列出此實驗的一項限制。

延伸練習

1. 拋射射程。推導 $R = (v^2/g)H(\theta)$ ，並核證精確公式 $R = v^2 \sin(2\theta)/g$ 與之相容。
2. 終端速度。由 v, r, g, ρ, μ 出發，推導兩個互相獨立的無量綱乘積。
3. 爆炸波。假設爆炸半徑 R 取決於能量 E 、空氣密度 ρ 及時間 t ，證明 $R = C(Et^2/\rho)^{1/5}$ 。
4. 選擇變量。一名學生只以火雞重量 w 建模烹調時間。解釋此變量列表為何並不完整，再提出較完善的列表。
5. 部分相似。解釋在小型水槽實驗中，為何可能無法同時配對雷諾數與傅汝德數。

選讀附錄：選擇 Π 群

完整的 Π 群可以有不同選擇。例如， $Re = vL\rho/\mu$ 與 $1/Re$ 所含的資訊相同。一組良好的 Π 群應：

- 為無量綱量；
- 互相獨立；
- 具有可解釋的物理意義；
- 便於繪圖與實驗；
- 在可能情況下，使因變量只出現在一個群中。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《國際單位制指南》：量值、物理量與量綱（NIST）
- 行星資料表——相對地球數值（NASA NSSDCA）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。