

數學建模講義

第 10 講：連續最佳化與模型設計

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 區分連續最佳化與第 6 講的離散及線性規劃模型；
2. 由多個子模型構建單變量目標函數，尤其是經濟訂購量模型；
3. 運用一階及二階導數判別法求得並解釋最佳點；
4. 運用偏導數與海森矩陣求解二變量無約束最佳化問題；
5. 解釋拉格朗日乘數背後的幾何概念；
6. 將乘數解釋為影子價格；
7. 說明何時需要數值最佳化，以及如何在建模報告中交代求解器核查。

1 從選擇方案到選擇最佳數值

第 6 講在一個多邊形或一系列整數選項中尋找最佳決策。本講的決策變量則可連續變動：送貨間隔可以是 2.8 日，價格可以是 \$37.40，混合比例可以是 0.62。建模任務不只是對函數求導，而是構建一個真正值得最佳化的函數。

引入：一項決策尚未構成模型

[12 分鐘]

一間校內商店想決定每次應訂購多少瓶裝水。訂購過於頻密會增加行政成本，訂購過多則會增加儲存成本與浪費風險。

1. 決策變量是甚麼？
2. 目標應是每次訂購的總成本、每日成本、利潤，還是服務可靠度？
3. 哪些假設可令問題成為連續問題而非整數問題？
4. 在信任建議之前，你需要哪些數據？

建模要點：連續最佳化在微積分之前已經開始。最重要的步驟，是決定所要最佳化的量，並釐清哪些簡化可令目標函數得以計算。

核心詞彙

決策變量是可控制的量；目標函數衡量我們希望最大化或最小化的量；約束條件限制可行決策；臨界點是導數或梯度等於零的點；全域最佳點在所有可行選擇中最佳，而局部最佳點只在其鄰近範圍內最佳。

2 單變量最佳化：EOQ 模型

經濟訂購量模型既簡單易教，又具有豐富的建模意義。它在兩項變動方向相反的成本之間取得平衡：頻密訂購的成本與過量儲存的成本。

例題 1：推導 EOQ 公式

一個加油站以每日 r 加侖的固定速率售出燃油。每次送貨的固定成本為 d ，每儲存一加侖燃油一日的成本為 s 。令 T 為以日計算的送貨週期長度。

步驟 1：把決策連繫至訂購量。若加油站每次剛好訂購足夠供應 T 日的燃油，則

$$Q = rT.$$

步驟 2：構建每週期成本。每週期的送貨成本為 d 。存量大致由 Q 線性下降至 0，故平均存量為 $Q/2 = rT/2$ 。每週期的儲存成本為

$$s \cdot \frac{rT}{2} \cdot T = \frac{srT^2}{2}.$$

步驟 3：最佳化平均每日成本。

$$c(T) = \frac{d + srT^2/2}{T} = \frac{d}{T} + \frac{srT}{2}, \quad T > 0.$$

於是

$$c'(T) = -\frac{d}{T^2} + \frac{sr}{2}.$$

令 $c'(T) = 0$ ，得

$$T^2 = \frac{2d}{sr}, \quad T^* = \sqrt{\frac{2d}{sr}}.$$

由於

$$c''(T) = \frac{2d}{T^3} > 0,$$

此臨界點為極小值。最佳訂購量為

$$Q^* = rT^* = \sqrt{\frac{2dr}{s}}.$$

解釋：高送貨成本使模型傾向較大量而較疏落的訂購；高儲存成本則使模型傾向較小量而較頻密的訂購。

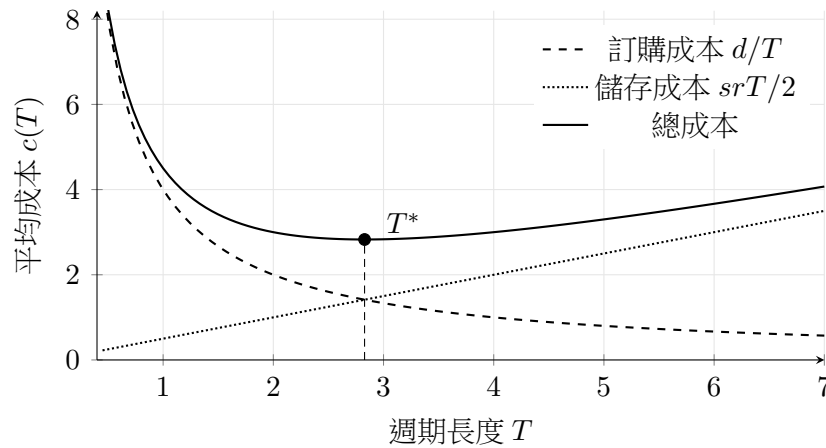


圖 1: EOQ 的最佳點出現在遞減的訂購成本曲線與遞增的儲存成本曲線取得平衡之處。

檢查點：等成本原則

證明在 T^* 處，

$$\frac{d}{T^*} = \frac{srT^*}{2}.$$

然後解釋為何這是核查數值答案是否合理的有效方法。

例題 2：應用 EOQ 並核查敏感度

一間書店每月售出 $r = 200$ 本教科書。每次訂購的成本為 $d = \$120$ ，每本書每月的儲存成本為 $s = \$0.50$ 。

$$T^* = \sqrt{\frac{2(120)}{0.50(200)}} = \sqrt{2.4} \approx 1.55 \text{ 個月},$$

因此

$$Q^* = rT^* = 200(1.55) \approx 310 \text{ 本書}.$$

最低每月成本為

$$c^* = \frac{120}{1.55} + \frac{0.50(200)(1.55)}{2} \approx \$154.9.$$

敏感度：若儲存成本倍增至 $s = 1.00$ ，則

$$T_{new}^* = \sqrt{\frac{2(120)}{1.00(200)}} = \sqrt{1.2} \approx 1.10 \text{ 個月}.$$

週期長度會乘以 $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ ，而非減半。平方根規律的敏感度低於線性規律。

模型檢視：模型批判：EOQ 採用了哪些假設

EOQ 模型假設需求固定、不會缺貨、送貨即時、沒有數量折扣，且訂購量可任意分割。在建模報告中，EOQ 結果應視為基準。若需求具有季節性、送貨存在延誤，或訂購量必須是整箱數目，最終建議便可能需要模擬或整數最佳化。

3 二變量最佳化：梯度與海森矩陣

對於函數 $f(x, y)$ ，梯度

$$\nabla f = (f_x, f_y)$$

指向函數增長最快的方向。臨界點滿足

$$f_x = 0, \quad f_y = 0.$$

海森矩陣

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

有助判別該點的類型。對二變量函數，定義

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2.$$

若 $D > 0$ 且 $f_{xx} < 0$ ，該點是局部極大點；若 $D > 0$ 且 $f_{xx} > 0$ ，則為局部極小點；若 $D < 0$ ，則為鞍點。

例題 3：兩種產品的利潤最佳化

一間公司生產兩種產品。令 x 與 y 為每日產量，並假設估計利潤為

$$P(x, y) = 100x + 120y - x^2 - 2y^2 - xy - 500.$$

負二次項表示價格壓力、擠塞或邊際回報遞減。
求臨界點。

$$P_x = 100 - 2x - y, \quad P_y = 120 - 4y - x.$$

令兩者皆為零：

$$2x + y = 100, \quad x + 4y = 120.$$

解得

$$x^* = 40, \quad y^* = 20.$$

判別類型。

$$P_{xx} = -2, \quad P_{yy} = -4, \quad P_{xy} = -1, \quad D = (-2)(-4) - (-1)^2 = 7 > 0.$$

由於 $D > 0$ 且 $P_{xx} < 0$ ，此點為局部極大點。又因二次型是凹的，所以它亦是全域極大點。
解釋。在 $(40, 20)$ 處，每種產品多生產一單位所帶來的邊際利潤均為零。透過交叉項 $-xy$ ，增加其中一種產品的產量會降低另一種產品的邊際利潤。

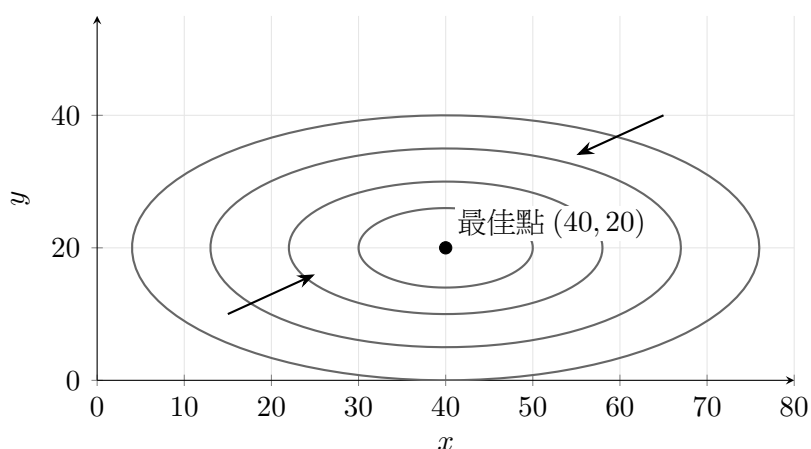


圖 2: 利潤函數的等值線。箭頭表示朝向極大點的上升方向。

檢查點：海森矩陣核查

對於

$$f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2,$$

求內部臨界點，並利用海森矩陣判別法判別其類型。然後解釋：若可行域是一個閉矩形，為何仍須核查邊界。

4 約束條件與拉格朗日乘數

許多連續最佳化問題都帶有約束條件。其幾何意義很簡單：在受約束的最佳點，可達到的最佳目標等值線與約束曲線相切，亦即兩者的梯度互相平行。

拉格朗日乘數法

在約束條件 $g(x, y) = c$ 下最佳化 $f(x, y)$ ，構建

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda [g(x, y) - c].$$

求解

$$\mathcal{L}_x = 0, \quad \mathcal{L}_y = 0, \quad \mathcal{L}_\lambda = 0.$$

等價地，

$$\nabla f = -\lambda \nabla g.$$

乘數 λ 衡量邊際價值：當約束放寬一單位時，最佳目標值會改變多少；其符號取決於所採用的約定，以及問題是最大化還是最小化。

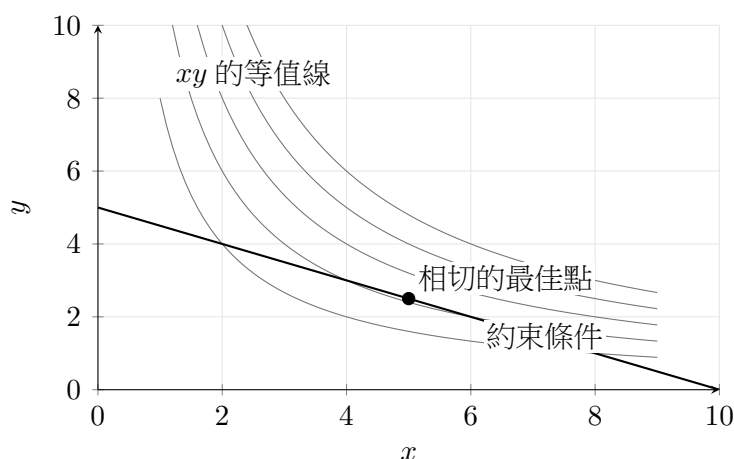


圖 3: 在受約束的最佳點，目標函數的等值線剛好與可行約束曲線相切。

例題 4：固定圍欄長度下的最大面積

一名農夫有 100 米圍欄，要在靠牆位置圍出一個長方形花園的三邊。令 x 為垂直於牆的一邊， y 為平行於牆的一邊。約束條件為

$$2x + y = 100.$$

面積為

$$A = xy.$$

運用拉格朗日乘數：

$$\mathcal{L} = xy + \lambda(2x + y - 100).$$

於是

$$\mathcal{L}_x = y + 2\lambda = 0, \quad \mathcal{L}_y = x + \lambda = 0, \quad 2x + y = 100.$$

由 $\lambda = -x$ 及 $y + 2\lambda = 0$ 可得

$$y = 2x.$$

代入約束條件：

$$2x + 2x = 100 \Rightarrow x = 25, \quad y = 50.$$

最大面積為

$$A^* = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ m}^2.$$

影子價格的解釋：若圍欄總長度稍為增加，最大面積的增加量約等於約束條件的邊際價值。由單變量形式 $A(x) = x(100 - 2x)$ 可知最佳值為 $A^*(F) = F^2/8$ ，故在 $F = 100$ 時， $dA^*/dF = F/4 = 25$ 。在最佳點附近，每多一米圍欄，面積約增加 25 m^2 。

例題 5：受預算約束的生產問題

一間小型工場的生產函數為

$$Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4},$$

其中 L 是勞動單位， K 是資本單位。每單位勞動的成本為 \$50，每單位資本的成本為 \$80。預算為 \$4000：

$$50L + 80K = 4000.$$

在此預算下最大化 Q 。

令

$$\mathcal{L} = L^{0.6} K^{0.4} + \lambda(50L + 80K - 4000).$$

一階條件給出

$$\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{50}{80}.$$

由於

$$Q_L = 0.6L^{-0.4}K^{0.4}, \quad Q_K = 0.4L^{0.6}K^{-0.6},$$

可得

$$\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{0.6}{0.4} \frac{K}{L} = 1.5 \frac{K}{L} = \frac{50}{80} = 0.625.$$

因此

$$K = \frac{0.625}{1.5} L \approx 0.4167L.$$

利用預算式：

$$50L + 80(0.4167L) = 4000 \Rightarrow 83.33L = 4000 \Rightarrow L^* = 48,$$

故

$$K^* = 20.$$

解釋：最佳配搭不會把資金平均用於勞動與資本，而是平衡每一元成本所帶來的邊際產出。

模型檢視：重要限制：等式約束並非問題的全部

拉格朗日乘數可處理平滑的等式約束。許多實際模型亦有不等式約束，例如 $x \geq 0$ 、預算上限、容量限制及最低服務要求。若不等式約束起作用，它便如等式一樣；若約束有鬆弛，其乘數便為零。完整理論稱為 **KKT** 條件，雖然很有用，但對核心課程而言過於技術性。

5 數值最佳化：方程無法整齊求解之時

微積分可以給出方程，但未必能給出閉式解。在競賽作品中，學生經常利用軟件把非線性誤差函數最小化，或把模型評分最大化。關鍵不只是運行求解器，還須知道如何核查與報告結果。

以梯度搜尋作為建模工具

要最大化 $f(\mathbf{x})$ ，基本梯度上升步驟為

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k),$$

其中 α_k 是步長。要把誤差函數最小化，則使用梯度下降：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

實務上， α_k 可透過線搜尋（例如黃金分割搜尋）或求解器程序選定。

例題 6：利潤模型的梯度上升法

沿用例題 3 的利潤模型：

$$P(x, y) = 100x + 120y - x^2 - 2y^2 - xy - 500.$$

由 $(0, 0)$ 開始，

$$\nabla P = (100 - 2x - y, 120 - 4y - x).$$

取步長 $\alpha = 0.10$ ，第一次迭代為

$$(x_1, y_1) = (0, 0) + 0.10(100, 120) = (10, 12).$$

在 $(10, 12)$ 處，

$$\nabla P = (100 - 20 - 12, 120 - 48 - 10) = (68, 62),$$

故

$$(x_2, y_2) = (10, 12) + 0.10(68, 62) = (16.8, 18.2).$$

此路徑會移向 $(40, 20)$ ，但固定步長可能越過最佳點，亦可能收斂緩慢。良好的數值研究應比較不同步長，或採用可靠的線搜尋。

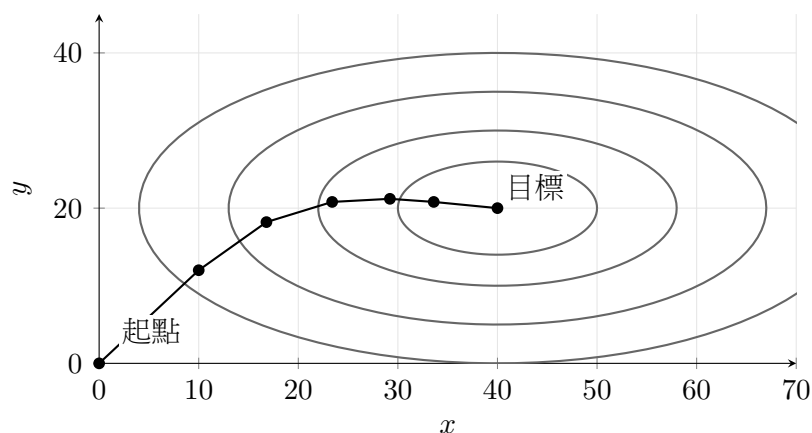


圖 4: 數值最佳化方法沿着改進方向前進，但必須核查其收斂情況。

模型檢視：如何報告數值最佳化

競賽報告不應只說「我們使用了求解器」。較有力的描述如下：

我們採用以梯度為基礎的搜尋，最佳化非線性目標函數。為減低結果對初始值的依賴，我們使用了五個起點，所得最佳點在小數點後三位均相同。我們亦繪製目標函數的等值線，並核證解答處的梯度範數低於 10^{-5} ，以核查結果。步長細化核查令目標值的變化少於 0.2%。

這段文字向讀者表明，數值結果並非來自無從檢視的黑箱。

6 應用延伸：可再生資源最佳化

本節適合用作課堂最後部分或家課，並把最佳化與可持續發展連繫起來。

例題 7：漁業的生物與經濟最佳點

令 N 為魚群數量，並令每年的自然增長為

$$g(N) = aN(N_u - N), \quad 0 < N < N_u.$$

生物最佳點使可持續產量 $g(N)$ 最大。由於

$$g'(N) = a(N_u - 2N),$$

可得

$$N_b = \frac{N_u}{2}.$$

假設每條魚的價格為 p ，而每條魚的捕撈成本 $c(N)$ 會隨魚群增大、捕撈變得容易而下降。可持續捕撈的利潤為

$$\text{TP}(N) = g(N)[p - c(N)].$$

在 N_b 處，

$$\text{TP}'(N_b) = g'(N_b)[p - c(N_b)] - g(N_b)c'(N_b).$$

因為 $g'(N_b) = 0$ 、 $g(N_b) > 0$ 且 $c'(N_b) < 0$ ，

$$\text{TP}'(N_b) = -g(N_b)c'(N_b) > 0.$$

因此，利潤函數在 N_b 處仍在上升，故經濟最佳點 N_p 滿足

$$N_p > N_b.$$

解釋：利潤最大化可能意味着保留較大的魚群，捕撈量亦低於最大可持續產量，因為魚群充裕時，每條魚的捕撈成本較低。

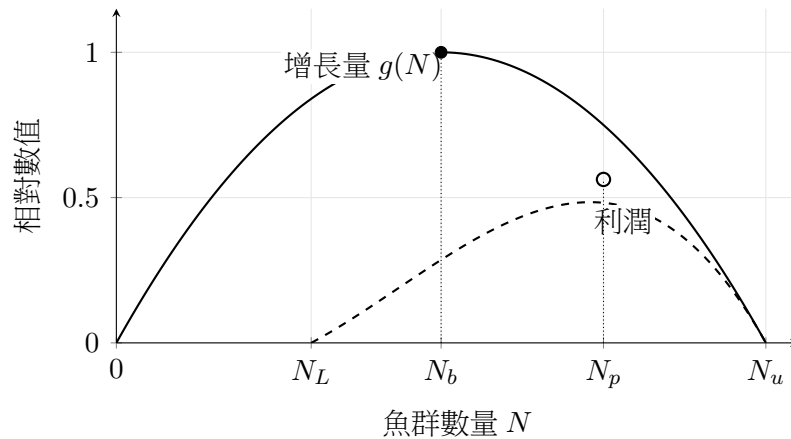


圖 5: 生物最佳點使產量最大；經濟最佳點則可能出現在較大的魚群數量。

模型檢視：政策解釋

數學上的最佳點不會自動成為政策建議。漁業模型應考慮魚群估計的不確定性、非法捕撈、生態系統影響、執法成本及崩潰風險。當測量誤差較大，審慎政策可能會選擇高於經濟最佳點的魚群數量。

7 課堂工作坊與表達

分層最佳化工作坊

[18分鐘]

選擇一條學習路線。

1. 核心路線：EOQ。對 $d = 80$ 、 $r = 120$ 、 $s = 0.40$ ，計算 T^* 與 Q^* ，並核查等成本原則。
2. 挑戰路線：受約束面積。在 $x + 2y = 12$ 的約束下最大化 xy 。利用拉格朗日乘數求解，並解釋其幾何意義。
3. 延伸路線：數值最佳化。對 $P(x, y) = 100x + 120y - x^2 - 2y^2 - xy - 500$ ，由 $(0, 0)$ 開始，以 $\alpha = 0.05$ 進行三次梯度上升迭代，並與精確最佳點 $(40, 20)$ 比較。

模型檢視：競賽式結論

連續最佳化的結論應包括：

1. 決策：列出所建議的決策變量數值。
2. 理據：指出目標函數，並說明最佳點為何出現在該處。
3. 敏感度：描述關鍵參數改變時，建議如何隨之改變。
4. 可行性：核查整數、容量、安全或實際約束。
5. 限制：列出在實際應用中可能不成立的假設。

較弱的結論：「最佳訂購量是 310 本書。」

較有力的結論：「在每月固定需求為 200 本書、每次訂購成本為 \$120，以及每本書每月儲存成本為 \$0.50 的假設下，EOQ 模型建議每隔 1.55 個月訂購約 310 本書。此方案令每月的訂購與儲存成本平衡在約 \$77.5。由於 Q^* 取決於平方根，適中的成本估計誤差只會造成有限影響；然而，建議仍應按整箱數量取整，若需求具有季節性亦應重新評估。」

本課總結

概念	建模意義
連續最佳化	從連續範圍中選擇最佳值，而非只在列出的方案中選擇。
EOQ	平衡固定訂購成本與儲存成本；最佳點遵循平方根規律。
二階導數	確定臨界點是極小點還是極大點。
梯度	指向函數增長最快的方向。
海森矩陣	利用曲率判別多變量臨界點的類型。
拉格朗日乘數	在等值線與約束曲線相切之處找出受約束的最佳點。
影子價格	放寬約束條件的邊際價值。
數值最佳化	當方程無法整齊求解時使用；必須進行收斂與穩健性核查。
模型批判	必須對照假設、數據質素及實際約束，檢視數學上的最佳點。

檢查點：離堂短答

用三句話解釋無約束最佳點與受約束最佳點的分別，然後舉出一個例子，說明微積分所得的最佳點會因實際約束而無法直接採用。

核心練習

- 對 $c(T) = 90/T + 30T$ ，求 T^* ，並核證 $c''(T^*) > 0$ 。
- 一間商店的參數為 $d = \$60$ 、 $r = 150$ 單位／週、 $s = \$0.20$ 每單位週。求 EOQ 週期長度與訂購量。
- 求 $f(x, y) = 60x + 80y - x^2 - y^2 - xy$ 的臨界點，並判別其類型。
- 利用拉格朗日乘數，在 $2x + y = 40$ 的約束下最大化 $A = xy$ 。
- 解釋為何滿足 $f_x = f_y = 0$ 的點未必是全域極大點。

建模挑戰

一間學校飯堂售賣小食。若準備量太少，便會損失潛在銷售；若準備量太多，剩餘小食則沒有轉售價值。一個簡化連續模型把每日利潤估計為

$$\Pi(q) = 8q - 0.03q^2 - 120 - 0.5 \max(q - 180, 0),$$

其中 q 是準備的小食數量。 $8q - 0.03q^2$ 一項表示需求飽和，固定成本為 120，最後一項懲罰超過 180 的剩餘量。

- 即使小食數量是離散的，為何這仍是一個連續最佳化近似？
- 分別在 $q \leq 180$ 與 $q \geq 180$ 上最佳化 $\Pi(q)$ 。
- 判定最佳的可行 q ，並加以解釋。
- 向飯堂經理提出建議前，列出兩項實際核查。

延伸練習

1. 對 $f(x, y) = x^2 - y^2$ ，分別利用海森矩陣判別法與等值線論證，證明 $(0, 0)$ 是鞍點。
2. 一個容器的體積必須為 $V = xyz = 1000$ ，且長方體尺寸 $x, y, z > 0$ 。建立拉格朗日乘數問題，以最小化表面積 $2xy + 2xz + 2yz$ 。你預期會得到甚麼形狀？
3. 對 EOQ 模型，證明 d 有 10% 誤差時， T^* 只改變約 5%。你可運用微積分或平方根關係。
4. 為一個具有多個局部最佳點的非線性模型，描述數值最佳化的模型效度驗證計劃。

選讀附錄：不等式的 KKT 概念

對帶有不等式約束 $g(x) \leq c$ 的最大化問題，只有在約束起作用時，乘數才會活躍。以非正式方式表示：

$$\lambda \geq 0, \quad g(x) \leq c, \quad \lambda[g(x) - c] = 0.$$

最後一項條件表示：約束要麼起作用，並可能具有正價值；要麼存在鬆弛，其影子價格便為零。這是由拉格朗日乘數通往現代非線性規劃的橋樑。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 非線性限制最佳化指南（NEOS Guide）
- 《微積分》第三冊（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。