

數學建模講義

第 9 講：微分方程與動態模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 解釋甚麼時候微分方程比差分方程更為合適；
2. 運用「流入速率減流出速率」或「速率與當前數量成正比」的概念建立一階模型；
3. 求解並解釋指數、邏輯斯諦、冷卻及簡單污染模型；
4. 運用相線把平衡點分類為穩定或不穩定；
5. 運用歐拉法、改良歐拉法／Heun法及 RK4 的概念近似動態模型；
6. 運用零斜線閱讀基本雙種群相平面；
7. 交代動態模型的假設、參數、驗證證據及限制。

1 為何使用微分方程？

差分方程按固定步長更新系統：

$$P_{n+1} = P_n + kP_n.$$

微分方程則描述瞬時變化率：

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

當變化在本質上是連續的，或時間步長小得足以令連續近似更容易解釋時，第二種表達方式較為合適。

引入：選擇時間語言

[12分鐘]

對以下每種情況，判斷使用差分方程還是微分方程較為自然，並提出一項理由。

1. 一個銀行帳戶每月收取一次利息。
2. 一杯熱飲放在桌上後持續冷卻。
3. 一所學校每天早上記錄缺席學生人數。
4. 河流持續把湖中的污染物沖走。

建模要點：數學表述應配合機制的時間特性，而不是只配合我們碰巧擁有的數據表。

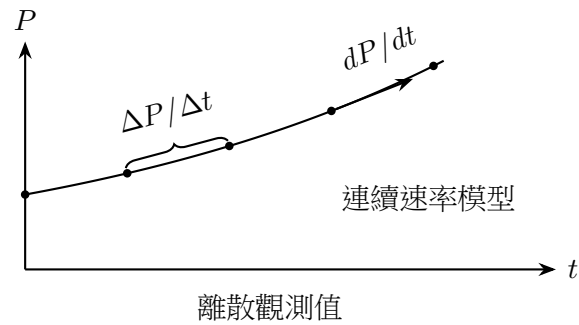


圖 1: 微分方程把許多微小更新理想化為一條瞬時速率定律。

核心詞彙

一階常微分方程具有以下形式：

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

初值問題另外指定起始值 $y(t_0) = y_0$ 。若某個值 y^* 滿足 $f(y^*) = 0$ ，它便是平衡點。若附近的解向它移動，它是穩定的；若附近的解遠離它，它則是不穩定的。

2 指數增長與衰減

最簡單的速率定律假設變化率與當前數量成正比：

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

若 $k > 0$ ，數量按指數增長；若 $k < 0$ ，數量按指數衰減。

已解例題 1：人口增長與外推的風險

假設某人口在 1970 年為 203.2 百萬，在 1990 年為 248.7 百萬。令 t 表示自 1970 年起經過的年數，並假設

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(0) = 203.2.$$

分離變量可得

$$\frac{dP}{P} = k dt \Rightarrow \ln P = kt + C \Rightarrow P(t) = 203.2e^{kt}.$$

利用 1990 年的數值估計 k ：

$$248.7 = 203.2e^{20k} \Rightarrow k = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{248.7}{203.2}\right) \approx 0.0101.$$

模型對 2000 年的預測為

$$P(30) = 203.2e^{0.0101(30)} \approx 274.9 \text{ 百萬}.$$

這是合理的短期估計，但同一模型會預測人口無限增長。只有當資源、政策及人口結構仍與校準期相近時，這條方程才適用。

模型檢視：模型批判： k 隱藏了甚麼？

參數 k 把出生率、死亡率、移民、年齡結構、經濟條件、政策及文化壓縮成一個數值。一份良好的報告不應只指出 $k \approx 0.0101$ ，還應說明為何常數 k 是一項簡化，以及這項假設在多遠的未來仍然可信。

3 邏輯斯諦增長與相線推理

指數增長忽略了資源有限的情況。一種常見的改良是邏輯斯諦模型：

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{M} \right),$$

其中 M 是環境容納量。當 P 接近 M 時，因子 $1 - P/M$ 會降低增長率。

已解例題 2：在指數模型與邏輯斯諦模型之間作選擇

一個封閉池塘的魚群初始數量為 $P(0) = 80$ 。生態學家認為池塘最多可容納 $M = 500$ 條魚，並估計每月增長率為 $r = 0.40$ 。

$$\frac{dP}{dt} = 0.40P \left(1 - \frac{P}{500} \right).$$

邏輯斯諦方程的解為

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-rt}}, \quad A = \frac{M - P_0}{P_0}.$$

此處 $A = (500 - 80)/80 = 5.25$ ，所以

$$P(t) = \frac{500}{1 + 5.25e^{-0.40t}}.$$

當 $t = 6$ 個月時，

$$P(6) = \frac{500}{1 + 5.25e^{-2.4}} \approx 339.$$

未經四捨五入的計算值為三百三十八點七。若採用相同初始增長率，指數模型給出 $80e^{0.40(6)} \approx 882$ ，已超過池塘的容納量。邏輯斯諦模型把這項物理限制寫入方程，因此更為可信。

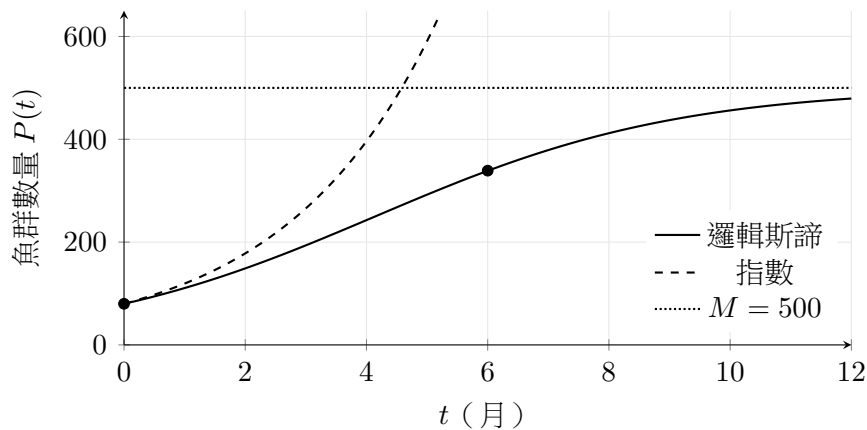
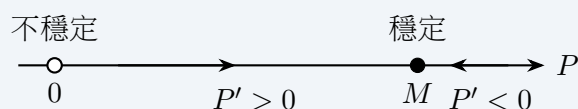


圖 2: 邏輯斯諦模型起初近似指數增長，其後逐漸彎向環境容納量。

邏輯斯諦模型的相線

對自治方程 $P' = rP(1 - P/M)$ 而言，平衡點為 $P = 0$ 及 $P = M$ 。若 $0 < P < M$ ，則 $P' > 0$ ；若 $P > M$ ，則 $P' < 0$ 。因此，0 是不穩定平衡點，而 M 是穩定平衡點。



檢查點：相線檢查

對 $y' = y(3 - y)$ ：

1. 找出所有平衡點；
2. 判斷各區間上 y' 的符號；
3. 把每個平衡點分類為穩定或不穩定；
4. 分別說明 $y(0) = 1$ 、 $y(0) = 5$ 及 $y(0) = -1$ 時的長期行為。

4 速率平衡模型：冷卻與污染

許多微分方程模型都建基於以下原理：

$$\text{變化率} = \text{流入速率} - \text{流出速率}.$$

相對於背誦一系列公式類型，學生更容易記住這條原理。

已解例題 3：牛頓冷卻定律

一杯茶放在溫度為 25°C 的房間時，其溫度為 90°C 。牛頓冷卻定律假設冷卻速率與溫差成正比：

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25), \quad T(0) = 90.$$

方程的解為

$$T(t) = 25 + 65e^{-kt}.$$

若 10 分鐘後溫度為 55°C ，則

$$55 = 25 + 65e^{-10k} \Rightarrow e^{-10k} = \frac{30}{65} \Rightarrow k \approx 0.0773.$$

為求出茶降至 40°C 的時刻：

$$40 = 25 + 65e^{-0.0773t} \Rightarrow t \approx 19.0 \text{ 分鐘}.$$

穩定平衡點是環境溫度 25°C 。

已解例題 4：以流入速率減流出速率描述湖泊淨化

一個湖的體積為 $V = 10^9 \text{ L}$ ，清水以每年 $r = 5 \times 10^7 \text{ L}$ 的速率流入及流出。令 $p(t)$ 表示污染物的克數。若不再有新污染物進入，污染物便以濃度 p/V 流出：

$$\frac{dp}{dt} = 0 - r \frac{p}{V} = -\frac{r}{V}p = -0.05p.$$

因此

$$p(t) = p_0 e^{-0.05t}.$$

污染物減至初始數量的 10% 所需時間為

$$0.10p_0 = p_0 e^{-0.05t} \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{0.05} \approx 46.1 \text{ 年}.$$

這個模型解釋了為何即使污染物停止流入，環境淨化仍可能十分緩慢：相關時間尺度是沖洗時間 $V/r = 20$ 年。

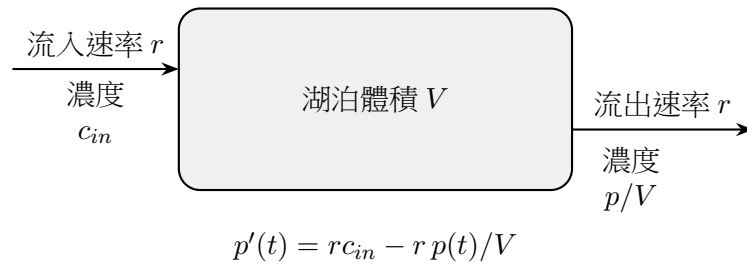


圖 3: 湖泊污染模型可直接由「流入速率減流出速率」建立。

模型檢視：效度驗證與限制

速率平衡模型假設完全混合，即污染物濃度在湖中各處相同。對大型湖泊而言，這項假設可能不成立。報告應討論湖水是否充分混合、流入及流出速率會否隨季節改變，以及污染物會否沉積於底泥後再進入水體。

已解例題 5：重複用藥

某種藥物在濃度高於 $L = 2$ mg/L 時有效，在高於 $H = 8$ mg/L 時則不安全。服藥後，血液濃度按以下方程衰減：

$$C' = -kC, \quad k = 0.18 \text{ hr}^{-1}.$$

若每次服藥令濃度增加 $H - L = 6$ mg/L，則下一次服藥前的殘餘濃度應逐漸趨近 L 。當重複用藥間隔為 T 時，其極限殘餘濃度為

$$R = \frac{H - L}{e^{kT} - 1}.$$

令 $R = L$ ，可得

$$L = \frac{H - L}{e^{kT} - 1} \Rightarrow e^{kT} = \frac{H}{L} \Rightarrow T = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{H}{L}\right).$$

在本例中，

$$T = \frac{1}{0.18} \ln 4 \approx 7.70 \text{ 小時}.$$

解釋：每 8 小時一次的服藥安排與理想間隔接近，但稍慢；只有在考慮臨床安全範圍及病人差異後，才可判斷是否可接受。

檢查點：用藥間隔解釋

若身體更快排走藥物而令 k 增加，建議的間隔 T 應增加還是減少？請利用公式及日常語言解釋。

5 數值解：從歐拉法到可靠計算

解析公式十分有用，但許多建模常微分方程並無簡潔解法。在競賽及應用專題中，清楚列出微分方程後再以數值方法求解，往往更切合實際。問題並不只是「按一下按鈕」。學生必須理解數值方法正在做甚麼、預期精度如何，以及如何檢查輸出是否可信。

以數值解作為建模工具

數值解在一列時間網格上近似未知解的數值：

$$t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, \dots$$

其中 h 是步長。數值方法把速率定律

$$y' = f(t, y)$$

轉化為一條更新規則，利用 (t_n, y_n) 附近的資訊求出 y_{n+1} 。步長越小，模型更新越頻密，但所需計算量也越大。

以歐拉法作為基準

歐拉法沿着當前點的切線前進：

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

歐拉法能清楚呈現數值積分的機制，因而很有教學價值。然而，它只有一階精度：全域誤差通常為 $O(h)$ ，所以把 h 減半往往只會令誤差約減半。

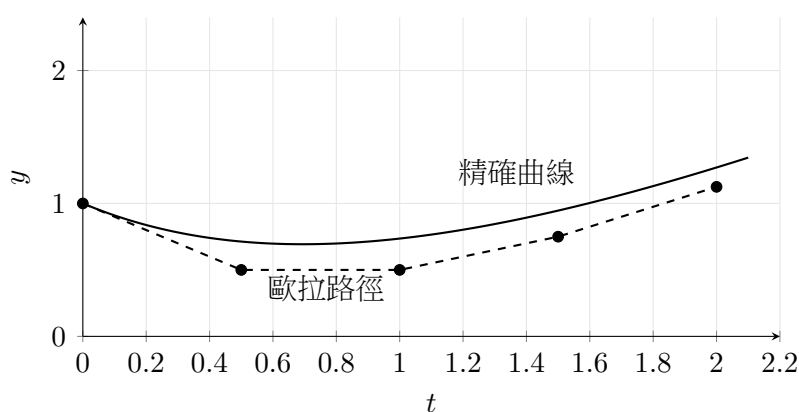


圖 4: 歐拉法以一連串短切線線段取代彎曲的解曲線。

已解例題 6：歐拉近似與步長檢查

用 $h = 0.5$ 在 $0 \leq t \leq 2$ 上近似下列問題的解：

$$y' = t - y, \quad y(0) = 1,$$

並使用更新式

$$y_{n+1} = y_n + 0.5(t_n - y_n).$$

n	t_n	y_n	斜率 $t_n - y_n$	y_{n+1}
0	0.0	1.000	-1.000	0.500
1	0.5	0.500	0.000	0.500
2	1.0	0.500	0.500	0.750
3	1.5	0.750	0.750	1.125

精確解為 $y = t - 1 + 2e^{-t}$ 。當 $t = 2$ 時，精確值 $y(2) \approx 1.271$ ，所以歐拉法的誤差約為 0.146。步長檢查。若改用 $h = 0.25$ 重複歐拉法， $t = 2$ 時的估計約為 1.200，誤差約為 0.070。誤差大約減半，與一階收斂相符。

檢查點：數值方法檢查

為何一次歐拉法計算不足以構成證據？請列出建模者在信任常微分方程的數值結果前應進行的兩項檢查。

改良歐拉法 / Heun 法

歐拉法只使用每一步起點的斜率。若斜率在區間內有所變化，這種處理便可能過於粗略。改良歐拉法又稱 **Heun 法**，它先預測一個暫定終點，再取起點及預測終點斜率的平均值：

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ y_{\text{pred}} &= y_n + hk_1, \\ k_2 &= f(t_n + h, y_{\text{pred}}), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

這是一種二階方法，其全域誤差通常為 $O(h^2)$ 。

已解例題 7：比較歐拉法、Heun 法與 RK4

對同一初值問題 $y' = t - y$ 、 $y(0) = 1$ ，以 $h = 0.5$ 計算至 $t = 2$ 。精確值為 $y(2) = 1.27067$ 。

方法	更新概念	$t = 2$ 時的估計	誤差
歐拉法	只用起點斜率	1.12500	0.14567
改良歐拉法 / Heun 法	取起點及預測終點斜率的平均值	1.30518	0.03451
RK4	四個斜率的加權平均	1.27110	0.00043

重點並不是某一種方法永遠最佳，而是數值方法的選擇確實會影響結果。歐拉法十分適合解釋基本概念；Heun 法及 RK4 則較適合在報告中產生數值結果。

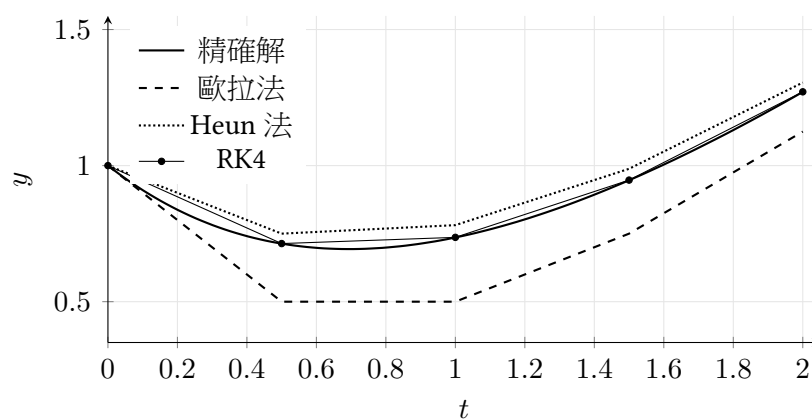


圖 5: 即使步長相同，不同數值方法也可能產生明顯不同的路徑。

四階 Runge–Kutta 法：實用的預設方法

經典四階 Runge–Kutta 法兼顧準確度與簡潔性，每一步在區間內取樣四個斜率：

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).\end{aligned}$$

對足夠光滑的問題，RK4 的全域誤差為 $O(h^4)$ 。在學生建模報告中，通常只需說明以 RK4 或標準自適應求解器求解常微分方程，並報告步長或容差檢查。

建模報告的常微分方程數值流程

1. 清楚寫出速率定律。定義變量、單位、參數及初始條件。
2. 選擇方法。課堂示範可用歐拉法；正式報告的數值結果則應使用 Heun 法、RK4 或自適應求解器。
3. 檢查收斂。分別以 h 及 $h/2$ 計算，或收緊求解器容差；結論不應有實質改變。
4. 對照已知行為。數值路徑應符合平衡點、符號、守恆、非負性或環境容納量等性質。
5. 區分數值誤差與建模誤差。更好的求解器不能修正錯誤的機制。

數值方法的穩定性

準確度並非唯一問題。即使微分方程本身簡單而穩定，數值方法仍可能不穩定。考慮

$$y' = -10y, \quad y(0) = 1.$$

真實解 $y = e^{-10t}$ 平滑地衰減至 0。歐拉法給出

$$y_{n+1} = y_n + h(-10y_n) = (1 - 10h)y_n.$$

要使數值解衰減而非爆增，我們需要

$$|1 - 10h| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < h < 0.2.$$

因此，即使真實模型穩定，過大的步長仍可能造成虛假的振盪或爆增。

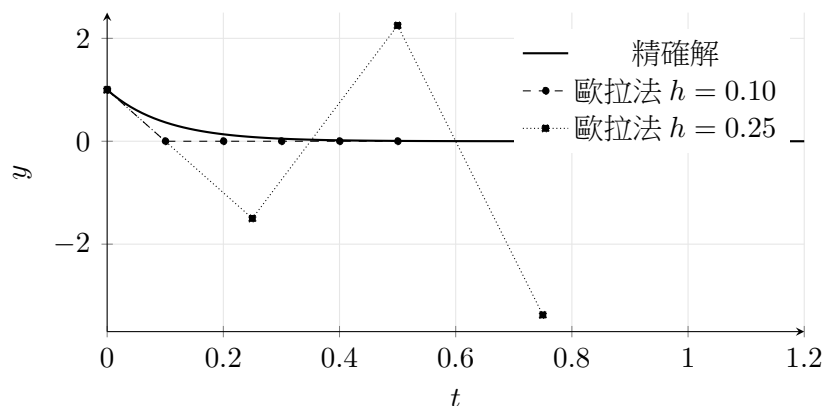


圖 6: 即使衰減方程本身穩定，過大的步長仍可造成虛假的數值不穩定。

模型檢視：競賽報告應如何表述

避免只寫「我們使用歐拉法」。較有力的表述是：

我們以步長 $h = 0.05$ 的 RK4 數值求解常微分方程。把步長縮小至 $h = 0.025$ 後，預測峰值的變化少於 1%，所以相對於參數不確定性，數值誤差很小。模型保持種群非負，並趨向預期的穩定平衡點。

這段文字同時交代了方法、收斂性、定性驗證及限制。

6 系統與相平面：捕食者與獵物

對兩個互動的數量而言，單一相線並不足夠，我們需要使用相平面。其中重要的視覺工具是零斜線，即其中一個導數等於零的曲線。

已解例題 8：捕食者-獵物模型的零斜線

令 $x(t)$ 表示獵物數量， $y(t)$ 表示捕食者數量。一個簡單的 Lotka-Volterra 模型為

$$x' = x(2 - 0.5y), \quad y' = y(-1 + 0.1x).$$

x 的零斜線滿足 $x' = 0$ ，所以 $x = 0$ 或 $y = 4$ ； y 的零斜線滿足 $y' = 0$ ，所以 $y = 0$ 或 $x = 10$ 。正平衡點為

$$(x^*, y^*) = (10, 4).$$

若 $y < 4$ ，獵物增加；若 $y > 4$ ，獵物減少。若 $x > 10$ ，捕食者增加；若 $x < 10$ ，捕食者減少。

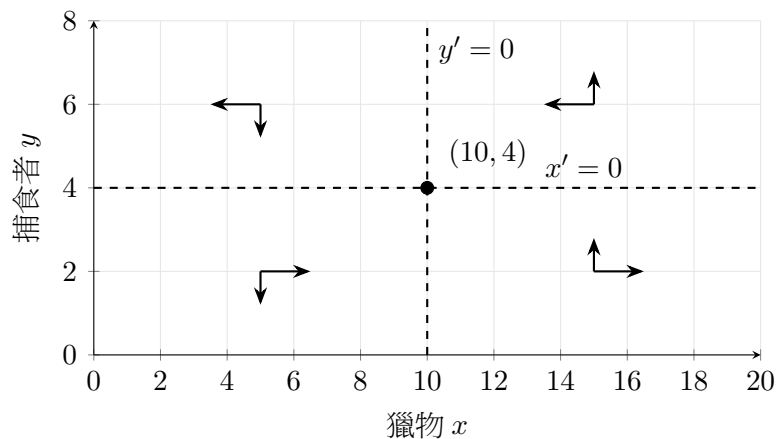


圖 7: 零斜線把捕食者-獵物相平面分成不同區域，顯示各種群在甚麼區域增加或減少。

分層建模工作室

[20分鐘]

選擇其中一條路線。

1. 核心路線：用藥間隔。某種藥物有 $L = 2$ 、 $H = 8$ 及 $k = 0.18 \text{ hr}^{-1}$ 。使用 $T = (1/k) \ln(H/L)$ ，並以日常語言解釋結果。
2. 挑戰路線：湖泊淨化。一個湖有 $V = 3 \times 10^9 \text{ L}$ 及每年 $r = 10^8 \text{ L}$ 的流量。求污染物減至初始數量 25% 所需的時間，再討論一項可能失效的假設。
3. 延伸路線：捕食者-獵物。對 $x' = x(1 - y)$ 及 $y' = y(-2 + x)$ ，找出零斜線、正平衡點，以及四個區域內 x' 及 y' 的符號。

選擇微分方程方法

情況	建議方法	可回答的建模問題
$y' = ky$ 或 $y' = -ky$	分離變量／已知公式	數量增長或衰減有多快？
$y' = rP(1 - P/M)$	邏輯斯諦公式與相線	長期而言會趨近甚麼容納量？
$y' = f(y)$	相線	哪些平衡點是穩定的？
$y' + P(t)y = Q(t)$	積分因子	流入與移除之間如何平衡？
沒有簡潔公式，作課堂計算	歐拉法	一次切線近似如何運作？
沒有簡潔公式，作報告級計算	Heun 法／RK4／自適應求解器	細化步長後，數值預測是否穩定？
兩個互動變量	零斜線／相平面	各區域中哪個種群增加或減少？

模型檢視：數值誤差與建模誤差

若歐拉法給出欠佳的估計，可能有兩類成因。數值誤差表示步長對該微分方程而言過大；建模誤差則表示微分方程本身未能恰當表達真實系統。縮小 h 只能改善數值誤差，不能修正恆溫、完全混合或無限增長等不當假設。

7 撰寫動態模型的結論

模型檢視：競賽式表達

動態模型段落應包含四個部分：

1. 機制：假設了甚麼速率定律或平衡定律？
2. 校準：如何取得 k 、 r 、 M 或 V/r 等參數？
3. 預測與解釋：模型在情境中意味着甚麼？
4. 可信度檢查：有甚麼證據支持模型，而模型可能在哪些情況失效？

薄弱的結論：「邏輯斯諦模型預測有 339 條魚。」

較有力的結論：「在環境容納量為 500 條魚、估計每月增長率為 0.40 的條件下，邏輯斯諦模型預測六個月後約有 339 條魚。同期的指數模型預測超過池塘容納量，所以不適合長期預測。主要不確定性來自環境容納量的估計，應利用池塘面積、食物供應及歷史種群數據加以檢查。」

本課總結

概念	建模意義
微分方程	把一個數量與其瞬時變化率聯繫起來。
初始條件	從一族解曲線中選定其中一條。
指數模型	速率與數量成正比；適合局部描述，長期外推則有風險。
邏輯斯諦模型	接近環境容納量時增長放緩； M 是穩定平衡點。
相線	分析單變量自治微分方程的視覺工具，可顯示穩定性。
速率平衡模型	流入速率 – 流出速率；適用於污染、混合及流動問題。
歐拉法	一階切線近似；可作基準，但通常不足以產生最終結果。
Heun 法／RK4	較高階的數值求解器；報告定量預測前應比較不同步長。
相平面	分析系統的視覺工具；零斜線可找出平衡點及方向區域。
模型批判	交代假設、參數來源、效度驗證證據及適用限制。

檢查點：離堂短答

用三句話解釋指數模型與邏輯斯諦模型之間的差異，再舉出一個邏輯斯諦模型較為可信的真實情境。

核心練習

1. 求解 $y' = 0.3y$ 、 $y(0) = 12$ 。求 $y(5)$ ，並解釋參數 0.3。
2. 某種化學物質按 $C' = -0.12C$ 、 $C(0) = 40$ 衰減。它何時降至 5 以下？
3. 對 $P' = 0.2P(1 - P/1000)$ 及 $P(0) = 100$ ，寫出邏輯斯諦解並估計 $P(10)$ 。
4. 為 $y' = y(y - 4)$ 繪畫相線，並把平衡點分類。
5. 一個房間維持在 22°C 。某物件由 80°C 開始按 $T' = -0.05(T - 22)$ 冷卻。求 $T(t)$ 及 $T(20)$ 。
6. 以 $h = 1$ 對 $y' = 2 - y$ 、 $y(0) = 0$ 應用歐拉法三步，再以 Heun 法重做並比較。

建模挑戰

一個小型水庫最初有 12 百萬公升的水，污染物濃度為 0.08 g/L 。清水每天以 0.6 百萬公升的速率流入及流出。附近工廠可能繼續以未知常數速率 s 克／日加入污染物。

1. 定義 $p(t)$ ，並寫出污染物數量的微分方程。
2. 在 $s = 0$ 時求解模型。
3. 當 $s > 0$ 時求長期污染物水平。
4. 假設 10 日後量得濃度為 0.052 g/L ，估計 s 是較接近 0 還是明顯為正。
5. 為環境管理人員撰寫一項簡短建議，並包括模型限制。

延伸練習

1. 利用分離變量法求解 $y' = ty^2$ 、 $y(0) = 1$ ，並判斷解是否對所有 $t > 0$ 都存在。
2. 對 $y' = y(1 - y)(y - 3)$ 繪畫相線，並把所有平衡點分類。
3. 對 $x' = x(3 - y)$ 、 $y' = y(-2 + x)$ ，找出正平衡點及零斜線，並指出各區域的運動方向。
4. 解釋即使微分方程正確，歐拉法仍可能因 h 過大而不準確或不穩定。以 $y' = -10y$ 為例說明。

選修附錄：積分因子法

一階線性方程的標準形式為

$$y' + P(t)y = Q(t).$$

其積分因子為

$$\mu(t) = e^{\int P(t) dt}.$$

把方程乘以 $\mu(t)$ ，左方會變成乘積的導數：

$$(\mu y)' = \mu Q.$$

因此

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)Q(t) dt + C.$$

這種方法適用於污染、混合、有輸入的加熱／冷卻，以及許多一階工程模型。

附加題庫

1. 咖啡冷卻。咖啡在 24°C 的房間中，於 12 分鐘內由 85°C 降至 60°C 。估計 k ，並預測何時降至 45°C 。
2. 選擇模型。某種群在四個等長時間區間中由 100 增至 180、250、310，而專家認為上限約為 400。解釋指數模型為何可能高估，並提出邏輯斯諦模型的結構。
3. 參數敏感度。對湖泊淨化模型 $p(t) = p_0 e^{-rt/V}$ ，解釋若流入及流出速率 r 倍增，淨化時間會如何改變。
4. 歐拉法設計。一名學生用 $h = 5$ 日模擬快速變化的流行病模型。信任輸出前應進行甚麼檢查？
5. 模型比較。用兩句話比較相線結論與數值模擬結論。兩者各能揭示甚麼可能被另一種方法隱藏的資訊？

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 18.03SC 微分方程（MIT OpenCourseWare）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。