

數學建模課程

第 8 講：博弈論與策略建模

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

到本課結束時，讀者應能夠：

1. 解釋策略模型與一般決策模型的區別；
2. 在一個博弈中識別玩家、策略、收益和假設；
3. 透過最大最小值 (**maximin**)、最小最大值 (**minimax**) 和偏好箭線圖找出純策略解；
4. 使用混合策略解決沒有鞍點的 2×2 零和博弈；
5. 解釋博弈價值是保證的長期回報，而非單次博弈中的承諾；
6. 使用納許均衡 (**Nash equilibrium**) 分析部分衝突博弈，並解釋囚徒困境；
7. 判斷何時應將博弈論作為適當的建模工具，並說明其限制。

1 為何是博弈論？

在第 7 講中，決策者面對不確定的自然狀態，例如天氣、市場需求或研究報告；自然界並不會刻意智勝決策者。在博弈論中，至少有另一名玩家也在決策，而且對方可能在推測我們會怎樣行動後改變策略。一個博弈是策略相互作用的數學模型。它必須明確：

- 玩家；
- 每個參與者的可能策略；
- 每個策略組合產生的收益；
- 每個參與者在做決策時所知道的資訊。

啟動：一般決策還是博弈？

[8 分鐘]

對於每種情況，決定是決策理論模型還是博弈論模型更合適。

1. 一家商店在雨季前決定訂購多少把傘。
2. 兩家餐廳決定是否提供午餐折扣。
3. 守門員在十二碼罰球中選擇撲向哪一邊。
4. 一所學校決定是否僱用一個或兩個額外的食堂職員。

對於博弈情況，識別參與者及其可能的策略。

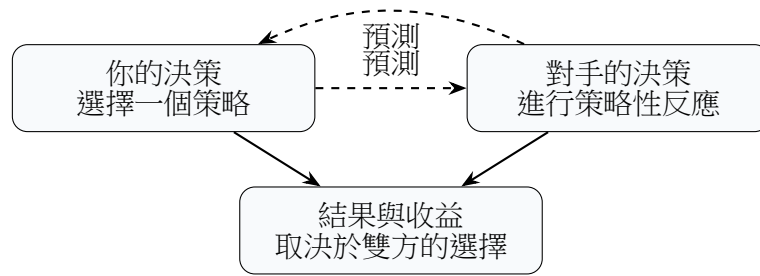


圖 1: 博弈與一般決策的不同之處在於另一方也在進行推理。

總衝突與部分衝突

完全衝突博弈通常稱為零和博弈，其中一方的所得恰好等於另一方的所失。十二碼罰球、石頭剪刀布或搜尋與躲藏問題，常以這種方式建模。部分衝突博弈允許雙方共同獲利或損失。廣告戰爭、軍備競賽、定價決策和環境協議通常具有這種結構。

2 總衝突博弈中的純策略

在雙人零和博弈中，我們從行玩家的角度寫出收益矩陣。行玩家希望數值較大；欄玩家希望數值較小。

純策略、最大最小值與最小最大值

純策略是固定的選擇，例如總是選擇第 1 行。對收益矩陣 $A = (a_{ij})$ ：

$$\text{行玩家的最大最小值} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad \text{欄玩家的最小最大值} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

如果這兩個數相等，則該博弈具有一個鞍點。對應的格子是一個穩定的純策略解：任何一方單獨改變都無法改善。

範例計算 1：具有鞍點的地點競爭

兩家相互競爭的商店選擇大型地區 L 或小型地區 S 。矩陣中的數值表示商店 A 的市場佔有率（百分比）。

商店 A \ 商店 B	B: L	B: S	行最小值
A: L	60	68	60
A: S	52	60	52
欄最大值	60	68	

行玩家選擇 L ，可保證至少取得 60；欄玩家選擇 L ，可把 A 的收益限制於最多 60。因此

$$\max\{60, 52\} = 60 = \min\{60, 68\}.$$

在 (L, L) 處存在一個鞍點，博弈值為 $V = 60$ 。結論並非僅是「雙方都選擇 L 」；而是：A 可保證 60% 的市場份額，而 B 可阻止 A 超出 60%。

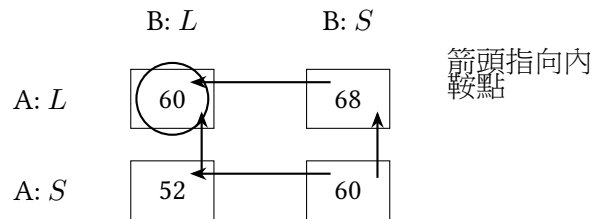


圖 2: 純策略鞍點的偏好箭線圖。垂直箭頭表示 A 的偏好；水平箭頭表示 B 的偏好。

檢查點：純策略檢查

[5 分鐘]

對下列矩陣求出行最小值與欄最大值，並判斷是否存在鞍點。

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

請用文字而非僅僅計算來解釋結果。

範例計算 2：支配策略

在求解博弈前，應先找出理性玩家不會採用的策略。如果另一行在每一欄給予行玩家的收益都不少於本行，並在至少一欄嚴格較高，本行便是被支配策略。同理，若另一欄在每一行給予行玩家的收益都不高於本欄，並在至少一行嚴格較低，本欄便被支配。考慮行玩家的利得矩陣：

	C_1	C_2	C_3
R_1	4	2	5
R_2	3	1	4
R_3	1	6	2

行 R_1 支配 R_2 ，因為 $4 > 3$ 、 $2 > 1$ 且 $5 > 4$ 。因此，行玩家不應選擇 R_2 。移除它後，從欄玩家的角度比較欄 C_1, C_2, C_3 。欄玩家偏好較小的收益，所以數值較大的欄並不吸引。支配關係不一定能直接解出博弈，但可簡化模型，並經常在計算前揭示策略結構。

模型檢視：不要過快移除策略

只有當支配關係對對手每種可能反應都成立時，才可移除被支配策略。不能只因某策略「通常較差」便把它刪去。在數學建模報告中，必須清楚列出支配比較。

3 當不存在純策略穩定時：混合策略

如果不存在鞍點，任何固定策略都可能被對手利用；解決方法是隨機化。混合策略為各個純策略分配概率。核心並不只是籠統地追求「不可預測」，而是要令對手在其純策略之間無差異，因而無法利用可預測的偏好。

例題 3：擊球員與投手

擊球員猜測投手會投快速球 F 或曲球 C ，而投手亦選擇投快速球或曲球。矩陣中的數值是擊球率。

擊球員 \ 投手	投手：F	投手：C	行最小值
猜測 F	.400	.200	.200
猜測 C	.100	.300	.100
欄最大值	.400	.300	

最大最小值是 .200，而最小最大值是 .300。由於它們不相等，不存在純策略鞍點。設 x 為擊球員猜測快速球的概率。若投手投快速球，擊球員的期望擊球率為

$$E_F(x) = .400x + .100(1 - x) = .100 + .300x.$$

若投手投曲球，

$$E_C(x) = .200x + .300(1 - x) = .300 - .100x.$$

擊球員要把兩條直線中較小的一個值最大化；最佳選擇出現在兩線交點：

$$.100 + .300x = .300 - .100x \Rightarrow x = 0.5.$$

博弈價值為

$$V = .100 + .300(0.5) = .250.$$

因此，擊球員應以 0.5 的概率猜測快速球，並以 0.5 的概率猜測曲球。這可保證長期擊球率為 .250。

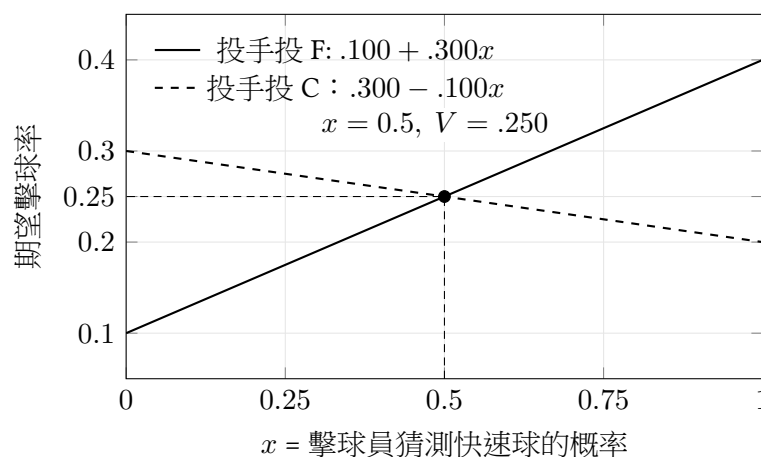


圖 3: 擊球員的混合策略把兩條對手反應線的下包絡線最大化。

透過無差異性解決 2×2 零和博弈

對收益矩陣

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

設 x 為行玩家選擇第 1 行的概率。要求行玩家的最佳混合策略，可令欄玩家的兩種純策略反應無差異：

$$ax + c(1 - x) = bx + d(1 - x).$$

要求欄玩家的最佳混合策略，設 y 為欄玩家選擇第 1 欄的概率，並令行玩家的兩種純策略反應無差異：

$$ay + b(1 - y) = cy + d(1 - y).$$

此方法在檢查不存在鞍點後有效。

範例 4：掠食者與獵物

獵物動物選擇躲藏或逃跑。掠食者選擇伏擊或追逐。數值為獵物的生存概率。

獵物 \ 掠食者	伏擊	追逐
躲藏	0.30	0.60
逃跑	0.50	0.40

不存在鞍點。設 x 為獵物躲藏的概率。如果掠食者伏擊，

$$E_A(x) = 0.30x + 0.50(1 - x) = 0.50 - 0.20x.$$

如果掠食者追逐，

$$E_P(x) = 0.60x + 0.40(1 - x) = 0.40 + 0.20x.$$

令它們相等得到

$$0.50 - 0.20x = 0.40 + 0.20x \Rightarrow x = 0.25.$$

獵物應躲藏 25%，逃跑 75%。保證的生存概率為

$$V = 0.50 - 0.20(0.25) = 0.45.$$

對於掠食者，設 y 為伏擊的概率。使獵物的兩行相等：

$$0.30y + 0.60(1 - y) = 0.50y + 0.40(1 - y) \Rightarrow y = 0.5.$$

掠食者應以 50% 的概率伏擊，以 50% 的概率追逐。

模型檢視：混合策略意味甚麼？

混合策略不表示玩家無所適從，而是玩家刻意隨機化，以免被對手利用。當互動重複多次，或不可預測性本身具有策略價值時，這個結果才特別有意義。在單次高風險博弈中，玩家仍可能按矩陣未有表示的資訊選擇純策略行動。

4 對抗自然的博弈：保守保證

有時「對手」並非具策略性的玩家，例如市場需求、經濟狀況、天氣或機器故障。若概率已知，第 7 講的期望值方法較合適；若概率未知，而決策者重視可保證的底線，則可把自然狀態視作對手。

例題 5：低產量或高產量

一家公司選擇低產量或高產量，經濟則可能景氣低迷或景氣良好。收益以千美元計。

公司 \ 經濟	景氣低迷	景氣良好	最差情況
低產量	500	300	300
高產量	100	900	100

純策略最大最小決策會選擇低產量，保證收益為 300；但混合策略或可保證更高收益。令 x 為選擇低產量的概率。在景氣低迷時，保證收益為

$$E_P(x) = 500x + 100(1 - x) = 100 + 400x.$$

在景氣良好時，

$$E_G(x) = 300x + 900(1 - x) = 900 - 600x.$$

令兩者相等：

$$100 + 400x = 900 - 600x \Rightarrow x = 0.8.$$

公司應使用 80% 的小產量和 20% 的大產量，保證

$$V = 100 + 400(0.8) = 420.$$

這比純策略最大最小決策所保證的 300 更高。

檢查點：決策理論或對抗自然？

[5 分鐘]

在產量例題中，假設可取得可靠概率： $P(\text{景氣低迷}) = 0.30$ 且 $P(\text{景氣良好}) = 0.70$ 。公司是否仍應採用保守的混合策略？計算低產量與高產量的期望值，並與博弈論的保證收益比較。

5 部分衝突與納許均衡

零和博弈只是策略模型的一類。在許多現實情況中，雙方都可能從合作中受益，但每一方亦有單方面背叛的誘因。對部分衝突博弈，我們把收益寫成有序對 (行玩家收益, 欄玩家收益)。

納許均衡

若沒有任何玩家能透過單方面改變策略來提高自身收益，該策略組合便是納許均衡。在偏好箭線圖中，納許均衡是所有相關偏好箭頭共同指向的格子。

例題 6：以軍備競賽說明囚徒困境

兩個國家分別選擇解除武裝或擴充軍備。收益以偏好分數表示，其中 4 最佳，1 最差。

國家 A \ 國家 B	B 解除武裝	B 擴充軍備
A 解除武裝	(3, 3)	(1, 4)
A 擴充軍備	(4, 1)	(2, 2)

若 B 解除武裝，A 偏好擴充軍備，因為 $4 > 3$ ；若 B 擴充軍備，A 仍偏好擴充軍備，因為 $2 > 1$ 。因此，擴充軍備是 A 的支配策略。由對稱性可知，這也是 B 的支配策略，所以納許均衡是 (擴充軍備, 擴充軍備)，收益為 (2, 2)。然而，(解除武裝, 解除武裝) 得到 (3, 3)，對雙方來說都更好。這就是困境：個體理性的選擇導致集體較差的結果。

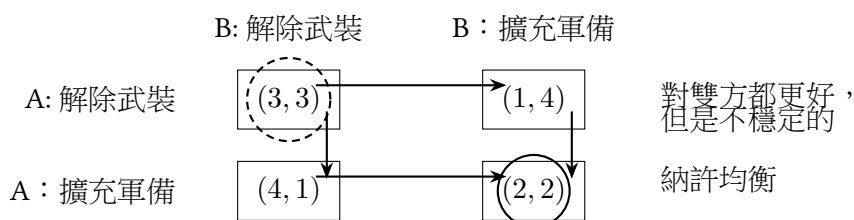


圖 4: 在囚徒困境中，納許均衡並非社會上最佳的結果。

模型檢視：一個常見的建模錯誤

不要把所有衝突都稱為囚徒困境。真正的囚徒困境要求：每名玩家都有背叛的支配策略；相互背叛是納許均衡；相互合作對雙方都比相互背叛更好。許多衝突其實是協調博弈、膽小鬼博弈或談判博弈。

6 差異化策略建模工作室

策略建模工作室

[20分鐘]

根據準備程度選擇一條路線。所有組都應以簡短的書面建議結束。核心路線：價格競爭。兩家飲品攤位選擇低價或高價。收益是每週利潤（以百元計）。

	攤位 B 低價	攤位 B 高價
攤位 A 低價	(6, 6)	(10, 3)
攤位 A 高價	(3, 10)	(8, 8)

繪製偏好箭線圖並找出所有納許均衡。結果對雙方整體而言是否有效率？挑戰路線：抽查博弈。一名學生選擇溫習或不溫習，一名教師則選擇抽查或不抽查。從學生角度記錄的收益是：

	抽查	不抽查
溫習	4	3
不溫習	-2	5

將此視為零和簡化。找出學生的最佳混合策略和遊戲的價值。延伸路線：一般表述。對於矩陣

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

寫出行玩家最大化保證利潤 V 的線性規劃。你不需要求解它，但每個約束都必須有明確的含義。

檢查點：競爭式溝通

[8分鐘]

為本講其中一個博弈寫一段四句的結論：

1. 確定建議的策略；
2. 說明博弈值或均衡結果；
3. 解釋建議背後的策略原因；
4. 表述模型的一個限制。

避免僅寫「我們選擇第 1 行」而沒有解釋對手預計會做甚麼。

7 課程總結

八個記憶點

1. 博弈論描述其他理性玩家會作出反應的決策情境。
2. 收益矩陣必須清楚說明所記錄的是哪一方的收益。
3. 在零和博弈中，行玩家最大化收益，欄玩家則把它最小化。
4. 當最大最小值等於最小最大值時，便存在純策略鞍點。
5. 若沒有鞍點，混合策略可避免固定選擇被對手利用。
6. 在 2×2 零和博弈中，可透過令對手無差異求出最佳混合策略。
7. 在部分衝突博弈中，納許均衡可以穩定但欠缺效率。
8. 只有當收益矩陣和理性假設可信時，博弈論才可提供可靠的策略洞見。

檢查點：離堂檢核

[2分鐘]

完成以下句子：「當 _____ 時，博弈論模型有用；但當 _____ 時，它可能失效。」

8 練習題

核心練習

1. 對每個零和矩陣求出行最小值與欄最大值，並判斷是否存在鞍點。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 一名守門員選擇左或右。一名射手選擇左或右。條目是得分機率：

	守門員 L	守門員 R
射擊 L	0.55	0.90
射擊 R	0.85	0.60

檢查是否存在鞍點。如果不存在，找出射手的最佳混合策略和博弈價值。

3. 一家公司面對不確定需求，選擇保守或進取的生產方式。收益以千元計：

	低需求	高需求
保守	40	60
激進	10	100

把需求視為自然狀態。求出最佳純策略最大最小決策，再判斷混合策略能否保證更高收益。

4. 為工作室中的定價博弈繪製偏好箭線圖。任何一方是否有支配策略？納許均衡是否具帕累托效率？
5. 在本講的囚徒困境矩陣中，解釋為甚麼 (解除武裝, 解除武裝) 並非納許均衡，即使它對兩國都較有利。

- 給出一個不應建模為零和博弈的現實情境。解釋若強行以零和收益矩陣描述，會遺失甚麼重要資訊。

建模挑戰

選擇一個情境，準備一頁策略建模簡報，內容包括玩家、策略、收益表、假設、均衡或建議策略，以及模型限制。

- 兩所學校決定是否在同一週末或不同的週末舉辦開放日。
 - 兩家配送公司決定是否進入一個新地區。
 - 一個學生團隊選擇一個競賽主題，同時預期其他團隊可能會選擇甚麼。
- 即使沒有確切的數值數據，簡報亦應對收益值作定性論證。

9 額外課堂問題庫

延伸練習

- 搜尋路線之爭。救援隊搜尋北面或南面，而迷路的遠足者在不知道搜索方案下選擇其中一條路徑。救援隊的收益是他們在一小時內找到遠足者的概率：

	徒步者北	徒步者南
搜尋北面	0.80	0.30
搜尋南面	0.40	0.70

把它視為對抗自然的博弈。求出純策略最大最小方案，以及令成功概率最大的混合策略。

- 罰球解釋。一個團隊聲稱：「我們的射手應該總是射右，因為平均得分率更高。」解釋為甚麼這個論點在策略博弈中可能失敗。請在你的解釋中利用守門員可能的反應。
- 情境中的支配關係。在定價博弈中，其中一行在數學上被支配。提出一個公司在現實中仍可能考慮該策略的原因，並解釋這是否表示收益矩陣並不完整。
- 重複互動。回顧飲品攤位定價博弈。解釋重複的博弈、聲譽或學校規定如何改變均衡結果。說明一回合博弈的哪個假設已經改變了。

策略建模簡報範本

對於競賽式的回應，學生可使用以下結構：

- 玩家：誰作出策略決策？
- 策略：每名玩家實際可行的行動是甚麼？
- 收益：每名玩家重視甚麼？數值收益有甚麼依據？
- 解的概念：這是零和博弈、對抗自然的博弈，還是部分衝突博弈？應採用哪種方法？
- 結果：說明鞍點、混合策略、博弈值或納許均衡。
- 解釋：結果對現實情境有甚麼建議？
- 限制：哪些假設最脆弱？

A 可選延伸：較大零和博弈的線性規劃表述

對 $m \times n$ 零和矩陣 $A = (a_{ij})$ ，設 x_i 為行玩家選擇第 i 行的概率。行玩家要把保證收益 V 最大化：

$$\begin{aligned} & \text{最大化 } V \\ & \text{使得 } V \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ & \quad x_i \geq 0. \end{aligned}$$

每個不等式表示：即使欄玩家選擇第 j 欄，期望收益亦必須至少為 V 。欄玩家的對偶問題則在類似的約束下最小化 V 。兩者最佳值的相等性與最小最大定理密切相關。

B 可選延伸：重複的囚徒困境

如果僅進行一次囚徒困境，背叛是個人理性的。如果重複多次，合作可以變得穩定。一種簡單的策略是以牙還牙：先合作，然後模仿對手的上一步行動。它獎勵合作並懲罰背叛，但僅在玩家預期未來互動並能可靠地觀察彼此的行動時。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- ECON 159：博弈論（Open Yale Courses）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。