

數學建模講義

第 7 講：決策理論與風險

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 區分決策選項與自然狀態；
2. 計算並解釋重複風險決策的期望值；
3. 以逆推法建立並求解簡單決策樹；
4. 利用貝葉斯定理在取得新資料後更新概率；
5. 計算完全資訊期望值；
6. 在概率未知時運用拉普拉斯、最大最小、最大最大、赫維茨及最小最大遺憾準則；
7. 解釋數學最優決策為何可能取決於風險承受程度、重複性與後果。

1 為何需要決策理論？

前幾講常假設模型輸入已知。真實決策中，部分輸入並不確定：天氣會變、市場需求可高可低、投標可獲接納或被拒，醫學檢測亦可能正確或誤導。決策理論提供一套有系統的方法，在結果取決於不確定未來狀態時選擇行動。

決策模型分開三項元素：

1. 選項：決策者可選擇的行動。
2. 自然狀態：決策者不能控制的不確定條件。
3. 報酬：每個選項與狀態組合產生的後果。

引入活動：攤位應售賣甚麼？

[10 分鐘]

學校籌款攤位可售賣熱咖啡或冰茶。寒冷日咖啡收入較高，溫暖日則冰茶較高；明日天氣未確定。

二人一組討論：

1. 有哪些選項？有哪些自然狀態？
2. 哪些資訊會改變決策？
3. 這是重複決策還是一次性決策？
4. 你較重視最大化平均利潤，還是避免極差結果？

建模要點：計算前，先辨認誰作選擇、甚麼不確定，以及哪項後果重要。

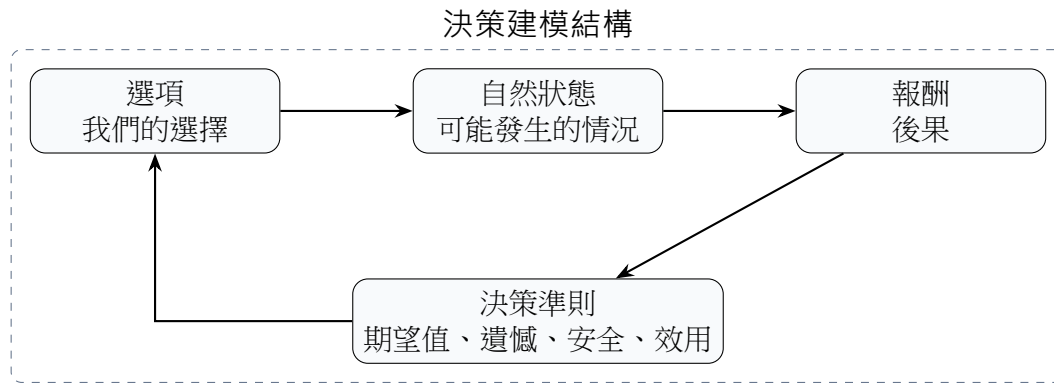


圖 1: 決策模型結合選擇、不確定狀態、後果及評判準則。

重複決策與一次性決策

期望值是長期平均。在同類決策重複多次時最具說服力，例如保險公司售出大量保單。對下行風險很大的一次性決策，最高期望值未必是最可接受的選擇。此區分並非次要的哲學問題，而會決定應使用期望值、風險規避準則還是遺憾準則。

2 重複風險決策的期望值

若隨機結果的報酬為 $w_1, w_2, \dots, w_n$ ，概率為 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，且 $\sum p_i = 1$ ，其期望值為

$$E = \sum_{i=1}^n p_i w_i.$$

E 不一定是可能結果；它是在同一概率模型下多次重複時預期的平均報酬。

例題 1：骰子遊戲

遊戲每次收費 \$1。若兩枚公平骰子點數和為 7，玩家共收取 \$6；否則沒有收入。故點數和為 7 時淨報酬為 \$5，其餘為 -\$1。

共有 36 個等可能結果，其中 6 個點數和為 7，因此

$$P(\text{點數和} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

期望淨報酬為

$$E = 5 \left(\frac{1}{6} \right) + (-1) \left(\frac{5}{6} \right) = 0.$$

就期望值而言，此遊戲是公平的。這不代表每位玩家收支平衡，而是多次遊玩後平均淨收益趨近零。

模型檢視：期望值不是承諾

學生可能說：「期望值是零，所以我不會贏也不會輸。」這是錯的。單次遊戲結果為 \$5 或 -\$1；期望值描述重複試驗分佈的中心，而非一次試驗的結果。

例題 2：天氣概率已知的攤位決策

承辦商須為明日學校運動會選擇一種產品。

	寒冷日	溫暖日
咖啡	\$4000	\$1000
冰茶	\$1500	\$5000

預報給出 $P(\text{寒冷}) = 0.30$ ，故 $P(\text{溫暖}) = 0.70$ 。

$$E(\text{咖啡}) = 0.30(4000) + 0.70(1000) = 1900.$$

$$E(\text{冰茶}) = 0.30(1500) + 0.70(5000) = 3950.$$

按期望值應售賣冰茶。

寒冷天氣的損益平衡概率滿足

$$4000p + 1000(1 - p) = 1500p + 5000(1 - p).$$

解得 $p = \frac{4000}{6500} \approx 0.615$ 。只有寒冷日概率超過約 61.5% 時，咖啡才較佳。

檢查點：期望值

準備投標成本為 \$2000。若獲接納，扣除準備成本後淨利潤為 \$18,000；若被拒，公司損失 \$2000。

1. 以接納概率 p 寫出期望值。
2. 求 p 的損益平衡值。
3. 解釋 $p = 0.15$ 時公司應否投標。

3 決策樹與逆推法

當決策後接一個或多個不確定事件時，決策樹很有用。方形節點表示決策，圓形節點表示不確定性，終端值表示報酬。

逆推法

由右至左求解決策樹：

1. 在每個機會節點計算各分支期望值。
2. 在每個決策節點保留期望值最佳的分支。
3. 以所得數值取代已解節點，再繼續向左。

此法稱為逆推，因為先簡化樹的未來部分，再選擇較早行動。

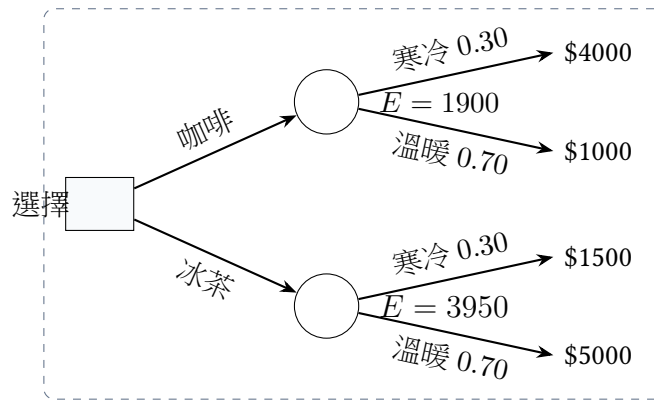


圖 2: 攤位例子的決策樹。逆推法選擇期望值較大的分支。

例題 3：廠房規模決策

公司可興建大型廠房、小型廠房，或不興建；需求可能為高、中或低。

選項	高需求 (0.25)	中需求 (0.40)	低需求 (0.35)
大型廠房	200000	100000	-120000
小型廠房	90000	50000	-20000
不興建	0	0	0

$$E(\text{大型}) = 0.25(200000) + 0.40(100000) + 0.35(-120000) = 48000.$$

$$E(\text{小型}) = 0.25(90000) + 0.40(50000) + 0.35(-20000) = 35500.$$

$$E(\text{不興建}) = 0.$$

按期望值，大型廠房最佳；但低需求時損失 \$120,000，建議應提及風險而非只報告平均值。

模型檢視：風險概況

兩個選項可以有相近期望值，卻有很不同的下行風險。完整決策分析應報告：

1. 期望值；
2. 最佳與最壞情況報酬；
3. 虧損概率；
4. 決策是重複還是一次性；
5. 決策者的風險承受程度。

4 資訊、貝葉斯定理與 EVPI

資訊只有在能改變決策時才有價值。決策理論可為資訊價值設定上限；資訊不完美時，亦可計算是否值得購買。

完全資訊

完全資訊期望值為

$$EVPI = E(\text{得知狀態後的最佳行動}) - E(\text{目前最佳行動}).$$

它是完美無誤資訊的最高合理價格；任何不完美預報或調查的價值都不應超過 EVPI。

例題 4：廠房規模決策的 EVPI

沒有資訊時，大型廠房的最佳期望值為 \$48,000。

有完全資訊時，公司會在得知真實需求狀態後選擇最佳行動：

狀態	最佳行動	報酬
高	大型廠房	\$200000
中	大型廠房	\$100000
低	不興建	\$0

因此，

$$E(\text{完全資訊}) = 0.25(200000) + 0.40(100000) + 0.35(0) = 90000.$$

$$\text{EVPI} = 90000 - 48000 = 42000.$$

對此決策，任何市場研究報告即使完美，價值亦不超過 \$42,000。

資訊不完美時，利用貝葉斯定理更新概率。若 $H_1, \dots, H_n$ 為可能狀態， F 為證據，則

$$P(H_i | F) = \frac{P(F | H_i)P(H_i)}{\sum_j P(F | H_j)P(H_j)}.$$



貝葉斯更新：新證據先改變概率模型，然後才評估決策。

圖 3: 貝葉斯定理利用證據，把信念由先驗概率更新為後驗概率。

例題 5：以貝葉斯更新市場研究

對廠房問題，假設市場報告為利好 F 或不利 U ，其歷史準確性如下：

狀態	$P(F \text{狀態})$	$P(U \text{狀態})$
高需求	0.70	0.30
中需求	0.50	0.50
低需求	0.20	0.80

先計算

$$P(F) = 0.70(0.25) + 0.50(0.40) + 0.20(0.35) = 0.445.$$

利好報告後的後驗概率為

$$P(H | F) = \frac{0.70(0.25)}{0.445} \approx 0.393,$$

$$P(M | F) = \frac{0.50(0.40)}{0.445} \approx 0.449,$$

$$P(L | F) = \frac{0.20(0.35)}{0.445} \approx 0.157.$$

使用未取整的後驗概率重新評估利好報告後的大型廠房，得

$$E(\text{大型} | F) \approx 104719.$$

小型廠房約得 \$54,719，故利好報告支持大型廠房。

對不利報告， $P(U) = 0.555$ 且

$$P(H | U) \approx 0.135, \quad P(M | U) \approx 0.360, \quad P(L | U) \approx 0.505.$$

使用未取整的後驗概率，

$$E(\text{大型} | U) \approx 2523, \quad E(\text{小型} | U) \approx 20090,$$

故不利報告支持小型廠房。報告能在某些情況改變決策，因此有用。

檢查點：資訊價值

在市場研究例子中，利好報告後選大型廠房，不利報告後選小型廠房。

1. 計算使用報告時的期望值： $0.445E_F + 0.555E_U$ 。
2. 減去無報告時最佳期望值 \$48,000，得到 EVSI。
3. 報告價格 \$10,000 時應否購買？\$25,000 時呢？

5 概率未知時

有時無法指派可信概率，期望值便可能營造虛假精確感；此時可用代表不同不確定性態度的替代準則。

貫穿例子：投資報酬

某學生社團有資金作一年期投資，報酬以千元計。

選項	快速增長	正常增長	緩慢增長
股票	10	6.5	-4
債券	8	6	1
儲蓄	5	5	5

三種經濟狀態均無可靠概率。

準則	規則	例子中的決策
拉普拉斯 最大最小	視各狀態等可能並計算每列平均。 找每列最壞報酬，再選最佳的最壞報酬。	債券／儲蓄同為 5.0。 儲蓄。
最大最大 赫維茨	找每列最佳報酬，再選最佳者。 使用 $\alpha(\text{最佳}) + (1 - \alpha)(\text{最壞})$ 。	股票。 取決於 α ； $\alpha = 0.6$ 時為債券。
最小最大遺憾	建立遺憾矩陣並最小化最大遺憾。	債券。

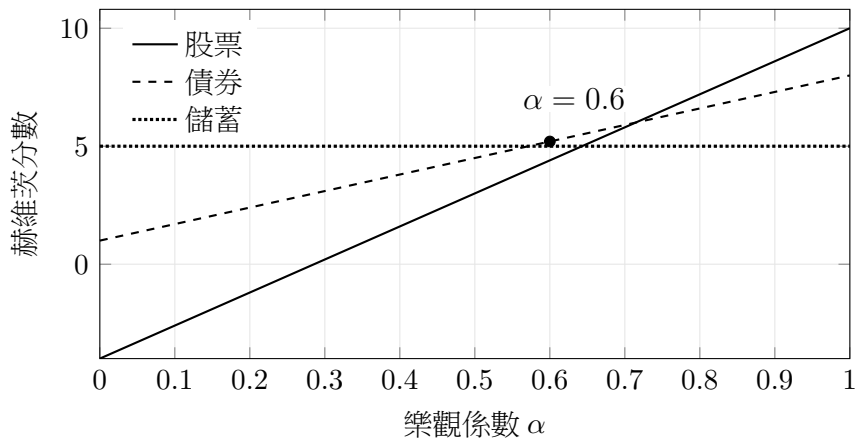


圖 4: 赫維茨分數隨樂觀係數改變；所選方案取決於決策者的風險態度。

例題 6：最小最大遺憾

對每個狀態，以該欄最佳報酬減去每項報酬。

	快速	正常	緩慢	最大遺憾
股票	$10 - 10 = 0$	$6.5 - 6.5 = 0$	$5 - (-4) = 9$	9
債券	$10 - 8 = 2$	$6.5 - 6 = 0.5$	$5 - 1 = 4$	4
儲蓄	$10 - 5 = 5$	$6.5 - 5 = 1.5$	$5 - 5 = 0$	5

最小的最大遺憾為 4，故選債券。此準則追問：「日後揭示真實狀態時，哪項決策可限制因未選該狀態最佳行動而產生的遺憾？」

決策工作坊

[15分鐘]

使用投資例子。

1. 核心路線：運用拉普拉斯、最大最小、最大最大與最小最大遺憾，各用一句解釋其態度。
2. 挑戰路線：求赫維茨選擇由儲蓄轉債券、由債券轉股票時的 α 。
3. 延伸路線：若社團不能容忍任何虧損可能，哪些準則尊重此限制？哪項忽略它？

6 綜合小案例：不確定需求下的庫存

當建模者須連接業務規則、不確定需求與建議時，決策理論最有用。以下例子刻意保持可手算規模，但結構與大型庫存決策相同。

例題 7：季節性 T 恤庫存

學校社團可訂購 10、20 或 30 件節慶 T 恤。每件成本 \$50，售價 \$80；未售出者可按 \$20 清貨。需求超過庫存時，每個未滿足需求造成 \$10 商譽損失。估計需求為：

$$P(D = 10) = 0.30, \quad P(D = 20) = 0.40, \quad P(D = 30) = 0.30.$$

對訂購量 Q 與需求 D ，報酬為

$$80 \min(Q, D) + 20 \max(Q - D, 0) - 50Q - 10 \max(D - Q, 0).$$

得到報酬矩陣：

訂購量	$D = 10$	$D = 20$	$D = 30$	期望值
$Q = 10$	300	200	100	$0.30(300) + 0.40(200) + 0.30(100) = 200$
$Q = 20$	0	600	500	$0.30(0) + 0.40(600) + 0.30(500) = 390$
$Q = 30$	-300	300	900	$0.30(-300) + 0.40(300) + 0.30(900) = 300$

按期望值，最佳訂購量為 $Q = 20$ 。

不同風險準則給出更細緻的結論：

- 最大最小選 $Q = 10$ ，因其最壞報酬仍為 \$100。
 - 最大最大選 $Q = 30$ ，因高需求時可賺 \$900。
 - 最小最大遺憾選 $Q = 20$ ：最大遺憾為 \$400，低於 $Q = 10$ 或 $Q = 30$ 的最大遺憾。
- 因此，同一報酬矩陣可按社團重視平均利潤、下行保障還是遺憾控制而支持不同建議。

敏感度檢查

[8分鐘]

在 T 恤例子中，假設高需求 $D = 30$ 的概率增加，低需求 $D = 10$ 的概率下降。不重算每項準則，先預測哪個訂購量更吸引，再在下列概率下計算期望值：

$$P(D = 10) = 0.20, \quad P(D = 20) = 0.40, \quad P(D = 30) = 0.40.$$

解釋決策是否改變。

模型檢視：報酬矩陣中的隱藏假設

報酬矩陣看似精確，但每個數字均依賴售價、清貨價、商譽損失與需求概率等假設。若輸入估計薄弱，報告應加入敏感度檢查，而非把最終訂購量說成確定。

7 撰寫有理據的決策建議

決策理論不會消除判斷，而是把判斷明確化。建模報告不應只陳述期望值最大的分支，亦應說明建議成立的假設。

模型檢視：決策模型常見錯誤

1. 把猜測概率視為測量事實。
2. 對一次性災難決策使用期望值，卻不討論風險。
3. 忘記從 EVSI 減去資訊成本。
4. 混淆決策與機會節點：前者由建模者選擇，後者由自然決定。
5. 報告準則結果，卻不解釋其代表的風險態度。

競賽式結論

對廠房規模案例，精簡結論可以是：

按先驗需求概率，大型廠房的期望值最高，為 \$48,000；若管理層願意接受低需求時可能損失 \$120,000，便建議選擇大型廠房。完全資訊最多值 \$42,000，故成本高於此數的市場研究應立即拒絕。由於大型廠房建議對低需求損失及高需求的估計概率敏感，我們亦建議報告風險概況；若管理層高度規避風險，應考慮小型廠房。

選修延伸：現代模型審核：平均表現與尾部風險

期望報酬描述平均表現，卻不描述罕見損失可以有多嚴重。把損失寫成 $L = -W$ 。對置信水平 α ，風險值 $\text{VaR}_\alpha(L)$ 是損失的 α 分位數；條件風險值則概括該門檻以外的尾部。對連續損失分佈，

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = E[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)].$$

因此， $\text{CVaR}_{0.95}$ 是最壞 5% 情況的平均損失。在有限模擬中，可取最壞 5% 模擬損失的平均作估計，並報告尾部所含觀測數。

期望損失回答「平均而言會怎樣？」； CVaR 回答「進入不利尾部後，結果有多差？」兩者互補，不可互換。有理據的比較應報告期望報酬、虧損概率、一項明確尾部指標，以及對不確定概率的敏感度。極端觀測稀少時， CVaR 本身亦不確定，故應使用置信區間或重複模擬，不可把含雜訊的尾部估計當作保證的安全界。

課堂總結

1. 決策模型分開選項、自然狀態、概率與報酬。
2. 期望值是長期平均，最適合重複決策。
3. 決策樹以逆推求解：機會節點算期望值，決策節點取最佳選擇。
4. 貝葉斯定理按證據更新概率。
5. EVPI 是資訊價值上限； EVS 須與資訊成本比較。
6. 概率未知時，不同準則代表不同風險與不確定性態度。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成句子：

「當_____時，期望值是有用準則；但當_____時，它可能誤導。」

8 練習題

核心練習

1. 遊戲收費 \$2；玩家以 0.20 概率贏取 \$12，否則沒有收入。計算期望淨報酬，並判斷是否公平。
2. 食物攤位須選擇麵食或三文治。利潤如下：

	下雨 ($p = 0.40$)	天晴 ($p = 0.60$)
麵食	3200	1600
三文治	1800	3600

計算兩個期望值，並求下雨的損益平衡概率。

3. 對例題 3 廠房問題，計算每個選項的虧損概率。這會否改變建議的表達方式？
4. 醫學篩查有 $P(+ \mid D) = 0.95$ 、 $P(+ \mid \text{無} D) = 0.08$ ，患病率 $P(D) = 0.02$ 。求 $P(D \mid +)$ ，並解釋高敏感度檢測為何仍可有中等陽性預測值。
5. 對投資報酬矩陣，以 $\alpha = 0.3$ 及 $\alpha = 0.8$ 運用赫維茨準則，解釋決策為何改變。

6. 為下列報酬矩陣建立遺憾矩陣，並運用最小最大遺憾：

	S_1	S_2	S_3
A	20	5	8
B	12	12	12
C	4	18	10

練習核對與提示

1. 期望淨報酬為 $0.20(10) + 0.80(-2) = 0.40$ 元，故按期望值而言，此遊戲對主辦者並不公平。
2. 麵食與三文治的期望利潤分別為 2240 及 2880；下雨的損益平衡概率為 $10/17 \approx 0.588$ 。
3. 大型、小型及不興建的虧損概率分別為 0.35、0.35 及 0；報告亦須交代損失幅度。
4. $P(D | +) = 0.019 / (0.019 + 0.0784) \approx 0.195$ ；患病率低時，假陽性相對於真陽性的數量仍可很大。
5. 當 $\alpha = 0.3$ ，股票、債券及儲蓄的赫維茨分數為 0.2、3.1 及 5，故選儲蓄；當 $\alpha = 0.8$ ，分數為 7.2、6.6 及 5，故選股票。
6. 遺憾矩陣各列為 $A : (0, 13, 4)$ 、 $B : (8, 6, 0)$ 及 $C : (16, 0, 2)$ ；最大遺憾為 13、8 及 16，故最小最大遺憾選 B 。

建模挑戰

選擇以下一項，撰寫一頁決策分析簡報，包括：選項、自然狀態、報酬表、概率假設（如有）、所選準則、建議、敏感度評論及一項限制。

1. 學校社團決定舉辦戶外籌款、室內活動或取消。
2. 學生隊伍決定向建模競賽提交穩妥、具風險的創新，或混合項目。
3. 小商店決定季節貨品庫存 10、20 或 30 件。

答案應解釋所選準則為何適合情境。

A 選讀延伸：期望效用

期望值把每一元同等看待。現實中，損失 \$100,000 的痛苦可超過損失 \$50,000 的兩倍。期望效用以效用函數 $u(w)$ 取代報酬 w ，並選擇下式最大的方案：

$$E[u(W)] = \sum_i p_i u(w_i).$$

凹效用函數表示風險規避：決策者已有較多財富時，額外一元的價值較低；臨界門檻附近的損失則可能不可接受。因此，即使大型廠房期望貨幣價值較高，風險規避管理者仍可能選小型廠房。

B 選讀延伸：樣本資訊期望值

若報告可為利好或不利，使用樣本資訊的期望值為

$$E(\text{使用報告}) = P(F) \max_a E(a \mid F) + P(U) \max_a E(a \mid U).$$

因此

$$\text{EVSI} = E(\text{使用報告}) - E(\text{無報告時的最佳決策}).$$

只有 EVSI 超過成本時才應購買報告。若成本已計入終端報酬，不要再次扣除。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《基礎統計學》第二版（OpenStax）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。