

數學建模講義

第 6 講：線性規劃與決策最佳化

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 從現實情境辨認決策變量、目標函數與約束條件；
2. 建立雙變量線性規劃；
3. 繪畫可行域並找出極點；
4. 利用頂點代入與目標等值線求解最大化及最小化模型；
5. 從幾何辨認不可行、無界與多重最優情況；
6. 解釋整數性、線性、確定性與可分性為何是建模假設，而非事實；
7. 建立含預算及邏輯約束的小型二元規劃；
8. 在情境中解釋緊約束、鬆弛量、影子價格與最優性範圍。

1 從情境到決策模型

最佳化始於決策，而非算法。建模者須先決定哪些量可控制、甚麼結果重要，以及甚麼限制可選方案。一般約束最佳化模型形式為

$$\text{最佳化 } f(\mathbf{x}) \quad \text{約束條件} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq b_i.$$

當目標與所有約束均為線性時，模型稱為線性規劃。

引入活動：規劃一週生產

[10分鐘]

某學校工場為展覽製作展示架與儲物箱。兩種產品的貢獻不同，並共用有限木材與人力。二人一組決定：

1. 決策變量應代表甚麼；
2. 應把哪個量最大化；
3. 哪些資源限制須成為約束；
4. 12.4 個箱這類分數答案是否有意義。

建模要點：數學結構應反映實際需要實施的決策。

最佳化模型的四項元素

1. 決策變量：決策者可控制的量。
2. 目標函數：需要最大化或最小化的數值成效指標。
3. 約束條件：資源、政策、物理或邏輯限制。

4. 定義域限制：情境要求的非負、整數、二元或有界數值。

任何一項元素未明確說明，模型都不完整。

例題 1：建立木匠問題

木匠每張桌的貢獻為 \$25，每個書櫃為 \$30。桌需 20 板呎木材及 5 人工小時；書櫃需 30 板呎及 4 人工小時。每週可用 690 板呎與 120 人工小時。

令

$$x = \text{桌子數量}, \quad y = \text{書櫃數量}.$$

目標是每週貢獻

$$\text{最大化 } P = 25x + 30y.$$

資源約束為

$$20x + 30y \leq 690 \quad (\text{lumber}),$$

$$5x + 4y \leq 120 \quad (\text{labor}),$$

$$x, y \geq 0 \quad (\text{nonnegativity}).$$

若只能製作完整產品，應另列 $x, y \in \mathbb{Z}$ 。我們先解連續模型，再檢查所得決策能否實施。

檢查點：建立模型

某餅店製作普通與高級蛋糕，貢獻分別為 \$18 與 \$26。每個普通蛋糕需 2 小時準備及 1 小時裝飾；高級蛋糕需 3 小時準備及 2 小時裝飾。每週可用 36 準備小時與 20 裝飾小時。

定義變量並寫出完整線性規劃，包括單位與定義域限制。

2 可行域

每個不等式描述一個半平面。可行域是同時滿足所有約束的點集。可行點是在模型假設下可實施的方案；不可行點則違反至少一項限制。

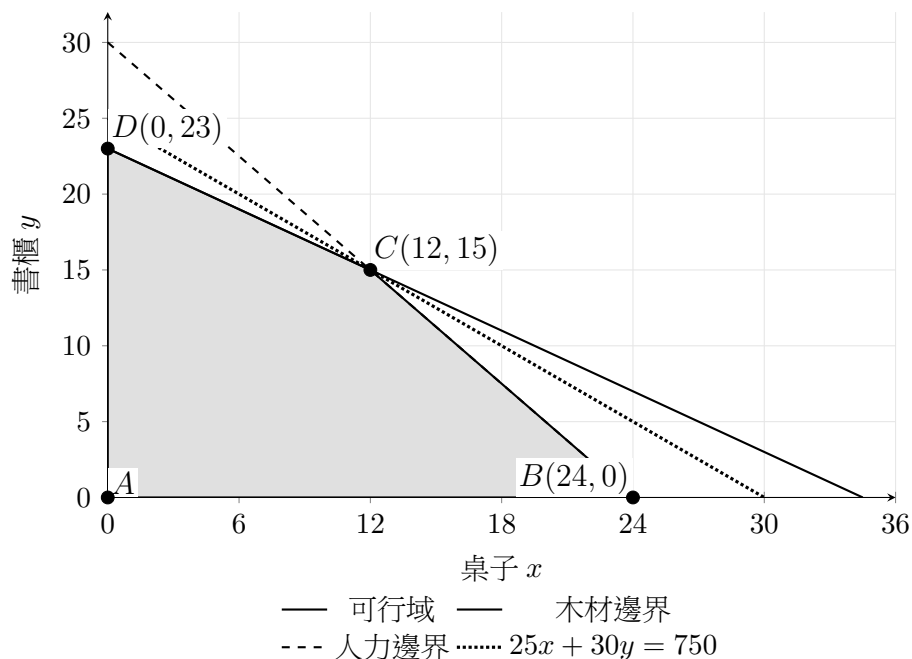


圖 1: 可行域是所有約束的重疊區。點線是仍接觸可行域的最高平行目標等值線。

若集合中任意兩點的連線仍完全位於集合內，則稱集合為凸集。線性半平面的交集為凸集，故線

性規劃的可行域皆為凸集。

頂點為何重要？

線性目標有一族平行等值線。沿改善方向移動等值線時，與有界凸多邊形的最後接觸會在頂點發生；若有多重最優解，則沿整條邊接觸。

因此，雙變量線性規劃只需在可行極點計算目標值。此結論依賴線性，對非線性目標一般不成立。

例題 2：以極點求解

可行極點為

$$A = (0, 0), \quad B = (24, 0), \quad C = (12, 15), \quad D = (0, 23).$$

計算 $P = 25x + 30y$ ：

點	P (美元)
A	0
B	600
C	750
D	690

故連續模型的最優解為

$$x = 12, \quad y = 15, \quad P = 750.$$

在 C ，兩項資源約束均取等號，因此木材與人力全數用盡。

引導圖解

[15分鐘]

對檢查題中的餅店模型：

1. 利用截距繪畫每條邊界線；
2. 辨認每條線的可行一側；
3. 列出所有可行極點；
4. 在每個極點計算目標值；
5. 以完整句子陳述最優方案。

3 最小化與最低要求

最佳化問題不一定追求最大利潤。學校可最小化人手成本，運輸公司可最小化燃料用量，膳食模型則可在滿足最低營養要求下最小化成本。「至少」形式的約束通常產生 $\geq$ 不等式，因此可行域可能位於邊界線上方，亦未必包含原點。

例題 3：最低成本送貨車隊

送貨服務可按日租用貨車與客貨車。貨車成本 \$120，可運 8 板貨物；客貨車成本 \$70，可運 4 板。至少須運送 48 板，並至少有 8 輛車覆蓋路線。

令 x 為貨車數， y 為客貨車數。連續模型為

$$\text{最小化 } C = 120x + 70y \quad \text{約束條件} \quad 8x + 4y \geq 48, \quad x + y \geq 8, \quad x, y \geq 0.$$

第一項約束除以 4 得 $2x + y \geq 12$ 。相關下界極點為

$$(0, 12), \quad (4, 4), \quad (8, 0).$$

其成本分別為 \$840、\$760 與 \$960。故連續模型最優解為

$$x = 4, \quad y = 4, \quad C = 760.$$

此處把目標線向較低成本方向移動，直至首次接觸可行域。

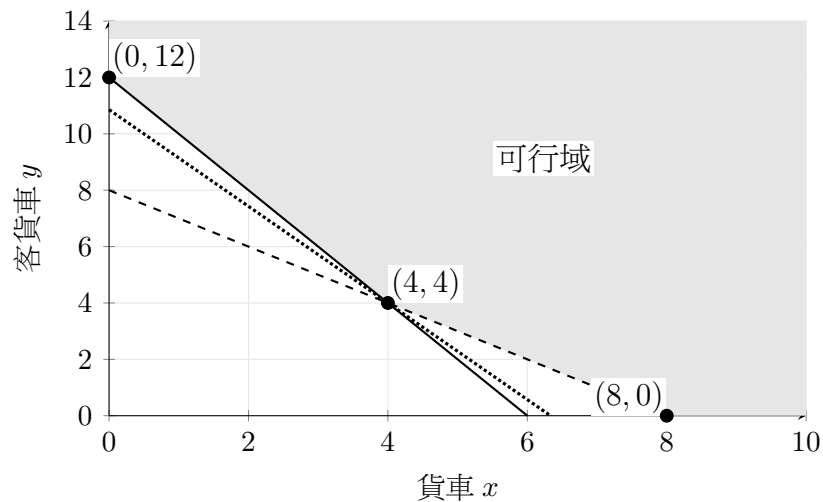


圖 2: 有最低要求時，可行域位於約束上方。最低成本等值線首先在 (4, 4) 接觸可行域。

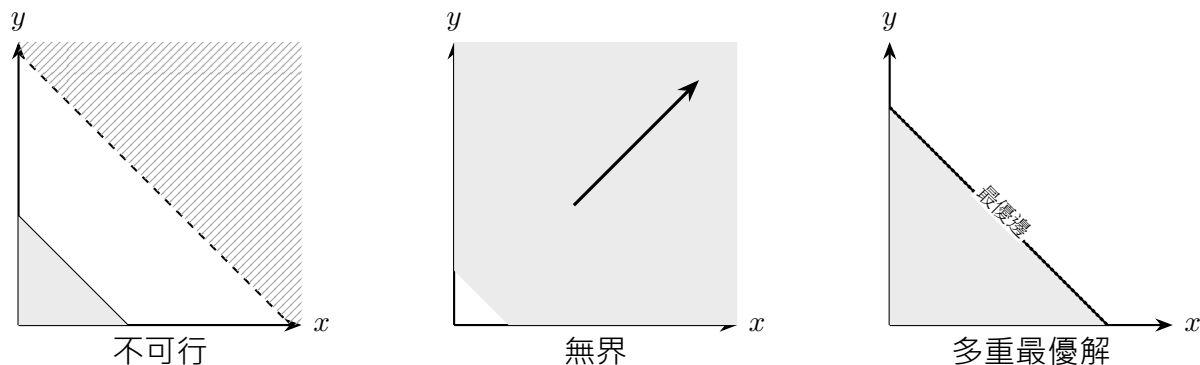
檢查點：最大化還是最小化？

為每種情況提出合理目標，並說明應最大化還是最小化：

1. 在滿足最低科目覆蓋下安排溫習課；
2. 分配宣傳預算以增加預期報名人數；
3. 選擇應急物資，同時使總重量盡量小。

4 三種特殊結果

正確建立的線性規劃不一定有唯一有限最優頂點；報告答案前應檢查幾何情況。



所需區域沒有重疊

目標可無限改善

目標與一條邊平行

圖 3: 解釋解答前，先檢查模型是否不可行、無界，或整條邊都是最優解。

如何報告特殊情況

- 不可行：要求不能同時滿足。應重查數據或協商約束。
- 無界：模型容許無限改善，通常因缺少上限、成本或容量。
- 多重最優解：多項決策在數學上等價，可按風險、公平或易於實施等次要準則選擇。

模型檢視：可行點不會自動成為合理決策

數學只檢查已陳述約束。可行生產方案仍可能不可接受，因模型遺漏需求上限、儲存、合約最低量、設置成本、不確定性或公平。最佳化不取代判斷，而是把所述權衡明確化。

5 緊約束、鬆弛量與假設問題

在候選解中，若約束取等號，則稱為緊約束；否則具有鬆弛量。對資源約束

$$a_1x + a_2y \leq b,$$

鬆弛量為 $b - (a_1x + a_2y)$ 。

例題 4：解釋鬆弛量

在 $B = (24, 0)$ ：

$$\begin{aligned} \text{已用木材} &= 20(24) = 480, & \text{木材鬆弛量} &= 690 - 480 = 210, \\ \text{已用人力} &= 5(24) = 120, & \text{人力鬆弛量} &= 120 - 120 = 0. \end{aligned}$$

人力約束為緊約束，而有 210 板呎木材未用。由於人力已耗盡，只增加木材不能在局部改善方案。

在最優解 $C = (12, 15)$ ，兩項鬆弛量均為零；在目前係數下，兩種資源都是瓶頸。

影子價格估計增加一單位緊約束資源所帶來的最優目標值增幅，前提是改變足夠小，使同一對約束仍為活躍約束。

例題 5：資源邊際價值

在木匠問題最優解，兩項緊約束為

$$20x + 30y = b_L, \quad 5x + 4y = b_H.$$

木材與人力的影子價格 u 與 v 滿足

$$20u + 5v = 25, \quad 30u + 4v = 30,$$

因為在邊際上，一件產品使用資源的指派價值須等於其貢獻。求解得

$$\boxed{u = \frac{5}{7} \approx 0.71 \text{ 元/板呎}}, \quad \boxed{v = \frac{15}{7} \approx 2.14 \text{ 元/人工小時}}.$$

因此，一個額外人工小時的局部價值高於一板呎額外木材。按此局部模型，為一個額外人工小時支付 \$3 不合算，支付 \$1 則可能合算。

例題 6：桌子貢獻的最優性範圍

假設桌子貢獻由 \$25 改為 c_T ，書櫃仍為 \$30。目標等值線斜率為

$$-\frac{c_T}{30}.$$

在目前最優解 $C = (12, 15)$ ，兩條緊約束邊的斜率為 $-5/4$ （人力）及 $-2/3$ （木材）。目標斜率位於兩者之間時，同一頂點仍為最優：

$$-\frac{5}{4} \leq -\frac{c_T}{30} \leq -\frac{2}{3}.$$

變號並求解得

$$20 \leq c_T \leq 37.5.$$

在此區間內，即使總貢獻改變，建議產量仍為 $(12, 15)$ 。在端點，目標線與一條邊平行，出現多重最優解；區間外則由另一頂點成為最優。

敏感度工作坊**[8分鐘]**

使用斜率，而非重新計算每個目標值。

1. 若桌子貢獻升至 \$34，產品組合會否改變？
2. 若升至 \$40，哪個相鄰頂點應變得較佳？
3. 最優性範圍為何比只測試一個替代係數更有用？

檢查點：鬆弛量與邊際價值

某解剩餘 40 kg 材料未用，但用盡所有人工小時。

1. 哪項約束為緊約束？
2. 哪項資源的局部影子價格應為零？
3. 為何「購買影子價格較高的資源」仍需有效範圍與成本比較？

模型檢視：敏感度是局部的

影子價格不是普遍市場價值。若資源改變足夠多，最優頂點可能轉變，舊影子價格便不再適用。敏感度分析應同時報告邊際價值及其解釋仍有效的範圍。

6 整數決策何時重要

連續線性規劃容許分數值，適合公斤、小時或比例等可分割量，卻未必適合人、車輛、項目或不可分產品。加入 $x_j \in \mathbb{Z}$ 得整數規劃；限制 $x_j \in \{0, 1\}$ 則得二元規劃。

例題 7：捨入為何可能失敗

考慮

$$\text{最大化 } 7x + 10y \quad \text{約束條件} \quad 3x + 5y \leq 14, \quad x, y \geq 0,$$

其中 x 與 y 計算不可分割的包裝數。

連續模型偏好 $(14/3, 0)$ ，目標值為 $98/3 \approx 32.67$ 。把 x 捨入至 5 會違反容量約束，因 $3(5) = 15 > 14$ 。向下捨入至 $(4, 0)$ 得 28，但整數可行點 $(3, 1)$ 用盡容量並得 31。

結論：先求連續解再捨入，可能得到不可行或非最優決策。

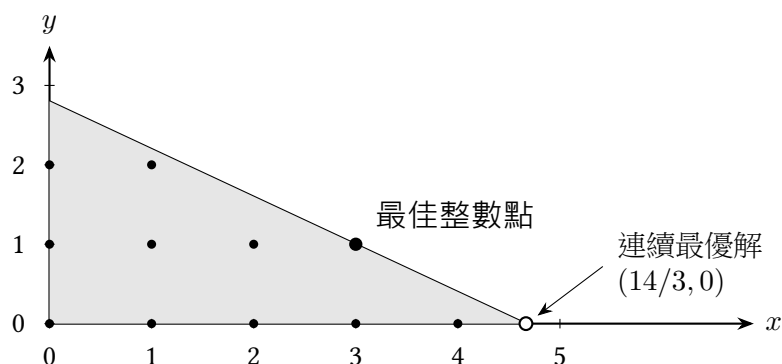


圖 4: 整數可行性以晶格點集取代連續區域；最佳整數點不一定由連續最優解捨入得到。

例題 8：二元項目選擇

學生會考慮五個項目，成本與估計效益分數如下：

項目	成本	效益分數
A：自修中心	4	8
B：預約系統	5	12
C：朋輩輔導	3	7
D：身心健康活動	4	9
E：設備基金	6	11

令 $z_A, \dots, z_E \in \{0, 1\}$ 表示是否選擇。學生會預算為 12，最多選三項；B 須連同 A，C 與 D 不可同時選：

$$\begin{aligned}
 &\text{最大化 } B = 8z_A + 12z_B + 7z_C + 9z_D + 11z_E, \\
 &4z_A + 5z_B + 3z_C + 4z_D + 6z_E \leq 12, \\
 &z_A + z_B + z_C + z_D + z_E \leq 3, \\
 &z_B \leq z_A, \\
 &z_C + z_D \leq 1.
 \end{aligned}$$

此問題規模小，可枚舉可行組合。最佳候選為

選擇	成本	效益
$A + B + C$	12	27
$D + E$	10	20
$A + E$	10	19
$C + E$	9	18
$A + D$	8	17

故最優選擇為 $A + B + C$ ，效益分數 27。

分層最佳化工作坊

[15 分鐘]

選擇一條路線。

核心路線：對建議選擇 $A + B + C$ 核證每項約束，再解釋為何禁止單獨選 B。

挑戰路線：假設預算降至 10，以系統枚舉找出新最優組合，並報告哪項邏輯約束變得重要。

延伸路線：加入「D 與 E 必須恰選其一」的條件，寫出相應二元方程，並討論原最優解是否仍可行。

7 假設與表達

標準線性規劃假設實用，但要求嚴格：

- 比例性：活動量加倍，資源用量與貢獻亦加倍。
- 可加性：總效應為各項總和，不含交互或設置效應。
- 可分性：連續變量可取分數值。
- 確定性：所有係數視為已知常數。

模型檢視：線性何時成疑？

批量折扣、逾時補貼、固定設置成本、不確定需求、產品交互、擠塞與規模經濟都違反簡單線性。實用的初步模型仍可為線性，但須明確陳述假設與預定範圍。

競賽式結論

[8分鐘]

為木匠撰寫四句建議：

1. 報告最優生產方案與貢獻；
2. 指出緊約束資源；
3. 陳述一項實用敏感度結果；
4. 承認一項可能改變決策的假設。

避免聲稱模型「證明」此決策在現實中最佳。

選修延伸：現代模型審核：多目標、公平與持份者

不少公共決策不能如實地以單一利潤分數表示。一個透明的初步模型可使用加權目標

$$\max \lambda P(x) + (1 - \lambda)B(x), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

其中 P 量度效率， B 量度另一項已述目標，例如可及性或服務質素。權重 λ 是價值判斷，而非測量定律。應改變權重、展示所得權衡，並辨認在合理據範圍內仍可接受的決策。

總體最優解可以掩蓋不公平負擔。令 $s_g(x)$ 表示持份者群組 g 所獲服務。為每個群組加入公平下限 $s_g(x) \geq s_{\min}$ ，或採用最大最小目標 $\max \min_g s_g(x)$ ，可把一項分配原則明確化；但這並不能證明該原則在倫理上已充分。提出建議前，應說明由誰界定目標、誰得益、誰承擔成本或風險、哪些群組未被數據涵蓋，以及受影響持份者如何質疑假設。除總目標外亦須報告各群組結果；若未有已述準則與持份者審視，不應把數學上可行的分配稱為公平。

8 課堂總結

應掌握的十個觀念

1. 最佳化把決策轉化為變量、目標、約束與定義域限制。
2. 可行解滿足每項已述約束；可行不保證實務上合適。
3. 無論最大化或最小化，雙變量線性規劃均可透過計算可行極點求解。
4. 模型可能不可行、無界或有多重最優解；每種結果解釋不同。
5. 緊約束辨認目前瓶頸；鬆弛量量度未用容量。

6. 影子價格提供局部邊際價值，而非永久價格。
7. 最優性範圍描述目標係數可改變多少而不改變建議頂點。
8. 整數或是／否決策需要整數或二元變量；直接捨入不安全。
9. 依賴與不相容等邏輯要求可寫成二元變量的線性約束。
10. 最優答案取決於線性、可分性、確定性及遺漏因素等假設。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成以下兩句：

「數學最優解是_____。」

「實施前，我會檢查_____。」

9 練習題

核心練習

1. 農夫種植小麥與玉米。小麥每英畝賺 \$200，使用 3 人工日及 2 肥料單位；玉米每英畝賺 \$300，使用 2 人工日及 4 肥料單位。最多有 45 英畝、100 人工日與 120 肥料單位。
 - (a) 定義變量並建立線性規劃。
 - (b) 繪畫可行域並求所有極點。
 - (c) 求最優種植方案並辨認緊約束。
2. 對木匠模型，計算 A 、 B 、 C 與 D 各項資源的鬆弛量。解釋為何 B 的未用木材不表示可增加桌子來改善 B 。
3. 某送貨方案使用貨車 x 與客貨車 y ：

$$\text{最小化 } 120x + 70y \quad \text{約束為} \quad 8x + 4y \geq 48, \quad x + y \geq 8, \quad x, y \geq 0.$$

解釋每個係數、繪畫可行域並求連續最優解，再討論整數性是否重要。

4. 有學生聲稱：「 x 坐標最大的點必定使所有利潤函數最大化。」利用等值線解釋錯誤。
5. 對以下情況勾畫可行域並解釋結果：(a) 互相矛盾的約束；(b) 無界最大化問題；(c) 多重最優解。
6. 對木匠模型，推導使 $(12, 15)$ 保持最優的書櫃貢獻 c_B 範圍，並解釋端點情況。
7. 預算為 10 時重新求解二元項目模型。使用精簡枚舉表，而非列出全部 2^5 種可能。
8. 建立一個線性規劃有多重最優解的例子，並陳述造成此情況的幾何條件。
9. 某報告稱：「一個額外人工小時值 \$2.14，所以 1000 小時值 \$2140。」仔細批判此陳述。

練習核對與提示

1. 令小麥為 x 、玉米為 y ，最大化 $200x + 300y$ ，約束為 $x + y \leq 45$ 、 $3x + 2y \leq 100$ 、 $2x + 4y \leq 120$ 及非負性。頂點為 $(0, 0)$ 、 $(100/3, 0)$ 、 $(20, 20)$ 及 $(0, 30)$ ； $(20, 20)$ 最優，目標值為 10000，人工與肥料約束均緊束。
2. A, B, C, D 的木材／人工鬆弛量依次為 $(690, 120)$ 、 $(210, 0)$ 、 $(0, 0)$ 及 $(0, 28)$ 。在 B ，人工限

制了增加桌子。

3. 送貨問題的最優解為 $(4, 4)$ ，成本為 760；整數性原則上重要，但不改變此解。
4. 最大化頂點取決於等值線斜率，而非單憑最大坐標。
5. 應分別檢查可行集是否為空、目標能否無限增長，以及目標線是否平行於緊束邊。
6. 書櫃貢獻範圍為 $20 \leq c_B \leq 37.5$ ；端點使相鄰邊上出現多重最優解。
7. 預算為 10 時， $A + B$ 與 $D + E$ 的效益同為 20；兩者均可行且最優。
8. 例如，在非負性及 $x + y \leq 4$ 下最大化 $x + y$ ，則 $x + y = 4$ 上每一點均最優。
9. 影子價格 2.14 只適用於目前最優基底及資源範圍；把它外推至 1000 小時缺乏理據。

建模挑戰

某學校須決定提供多少個標準與密集溫習工作坊。兩類均使用教師時間、課室與有限印刷預算，對學生的效益估計亦不同。

撰寫一頁最佳化簡報，內容包括：

1. 決策目的與持份者；
2. 具單位及定義域限制的變量；
3. 一個目標與至少三項約束；
4. 線性與效益分數背後的假設；
5. 圖解或計算求解計劃；
6. 一項敏感度問題及一項實施限制。

形成問題與解釋的質素，比取得某個特定數值最優解更重要。

A 選讀延伸：單純形法的作用

單純形法是用於較大型線性規劃的代數方法。它從一個可行極點開始，反覆移至目標值較佳的相鄰極點。鬆弛變量把不等式轉為方程，樞軸運算則改變目前基底。

對木匠模型，單純形法沿下列路徑：

$$(0, 0) \longrightarrow (0, 23) \longrightarrow (12, 15),$$

其後停止，因為沒有相鄰移動可改善目標。完整表解法宜在學生理解形成問題、幾何、特殊情況與解釋後另課教授。

B 選讀延伸：無導數搜尋

若一維非線性目標在已知區間上為單峰，可用黃金分割搜尋最佳化。這與線性規劃不同：它收窄包含一個最優點的區間，而非在可行多面體頂點之間移動；留待後續數值最佳化課堂。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 線性規劃指南（NEOS Guide）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。