

數學建模講義

第 5 講：蒙地卡羅與離散事件模擬

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 區分確定性模型與隨機模型；
2. 把均勻隨機數映射至離散或經驗概率分佈的結果；
3. 建立並解釋簡單的蒙地卡羅估計量；
4. 解釋為何需要重複模擬，以及模擬誤差為何下降緩慢；
5. 利用到達、開始服務、等候及離開時間追蹤單服務台隊列；
6. 設計包含輸出、重複實驗、模型效度驗證、敏感度與限制的模擬實驗。

1 為何要模擬？

前幾講以方程或曲線表示系統。這些方法仍很有價值，但有些系統包含次序無法精確預測的不確定事件：顧客不規則到達、服務時間長短不一，設備亦可能意外故障。模擬仿照這類系統的運作，並記錄在指定假設下發生的情況。

引入活動：飯堂隊列

[10分鐘]

午膳時間，學生不規則地到達一個飯堂櫃檯；部分訂單所需時間遠較其他訂單長。學校正考慮增設第二個櫃檯。

二人一組辨認：

1. 兩個在學生之間難以預測地變化的量；
2. 兩個描述系統目前狀態的量；
3. 學校作決策前應檢查的三項輸出；
4. 一項可能令模擬不切實際的因素。

建模要點：模擬不只是隨機數；它需要明確的輸入假設、更新規則、輸出，以及檢查可信度的計劃。

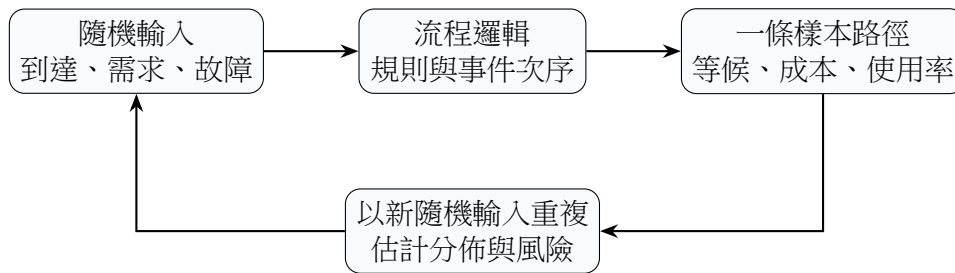


圖 1: 模擬把隨機輸入與確定性更新規則結合。一次運行給出一段可能歷史；重複運行則揭示可能結果的範圍。

模擬的核心語言

- 狀態變量描述某時刻的系統，例如隊列長度或庫存水平。
- 事件改變狀態，例如顧客到達、服務完成或貨物送達。
- 樣本路徑是系統的一段模擬歷史。
- 重複實驗是在相同政策與假設下獨立運行一次。
- 隨機種子可重現同一偽隨機序列，有助除錯與公平比較。

產生隨機輸入後，電腦執行確定性計算。因此，模擬是有結構的實驗，而非隨意猜測。

2 從均勻隨機數到模型輸入

隨機變量把數值指派給隨機實驗的每個可能結果。要模擬離散隨機變量，可按累積概率分割區間 $[0, 1)$ ，並生成 $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$ 。

假設服務時間 S 的可能值為 $s_1, \dots, s_k$ ，概率分別為 $p_1, \dots, p_k$ 。令

$$F_j = p_1 + \dots + p_j.$$

當 $F_{j-1} \leq U < F_j$ 時取 $S = s_j$ ，其中 $F_0 = 0$ 。這是離散逆變換法。

例題 1：模擬服務時間

小食櫃檯的歷史觀測顯示

服務時間 S (min)	2	3	4	5
$P(S = s)$	0.20	0.35	0.30	0.15

累積概率為 0.20、0.55、0.85 與 1.00，因此

$$S = \begin{cases} 2, & 0 \leq U < 0.20, \\ 3, & 0.20 \leq U < 0.55, \\ 4, & 0.55 \leq U < 0.85, \\ 5, & 0.85 \leq U < 1. \end{cases}$$

對 $U = 0.07, 0.48, 0.61, 0.93$ ，模擬服務時間分別為 2, 3, 4, 5 分鐘。

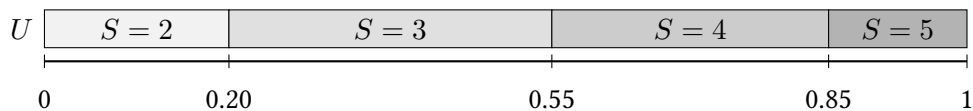


圖 2: 每個區間的長度等於相應結果的概率；概率越大，在 $[0, 1)$ 佔據的部分越多。

引導練習：到達間隔

[10分鐘]

學生到達間隔服從下列分佈：

$A \text{ (min)}$	2	3	4	5
$P(A = a)$	0.15	0.35	0.35	0.15.

1. 建立累積概率表與區間映射。
2. 把 $U = 0.08, 0.32, 0.71, 0.94, 0.51$ 轉化為到達間隔。
3. 解釋固定種子為何有助比較一個與兩個櫃檯。

模型檢視：輸入分佈是模型的一部分

模擬可以從不良輸入模型產生看似精確的輸出。歷史頻率未必能代表考試日、特別餐單或學生行為改變後的情況。概率、變量之間的相依關係，以及數據所代表的時段都必須有充分理據。

3 蒙地卡羅估計

蒙地卡羅模擬透過重複隨機實驗估計某個量。考慮從單位正方形均勻抽取的點。落在四分之一圓 $x^2 + y^2 \leq 1$ 內的概率等於其面積 $\pi/4$ 。若 n 個點中有 C 個落在圓內，則

$$\frac{C}{n} \approx \frac{\pi}{4}, \quad \boxed{\hat{\pi} = 4 \frac{C}{n}}.$$

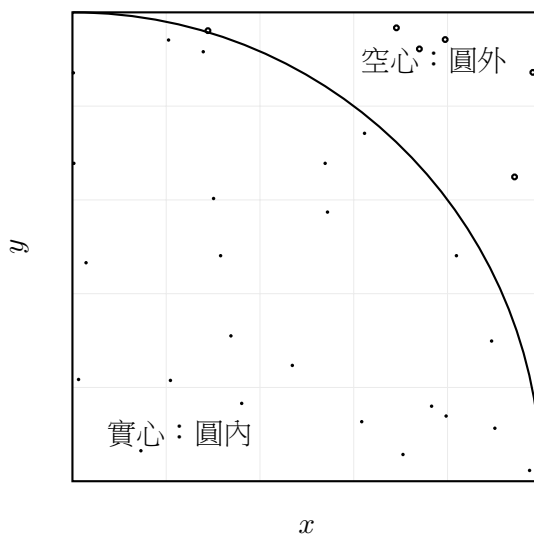


圖 3: 30 個可重現樣本點：24 個落在四分之一圓內，6 個在圓外。圖像只代表一條樣本路徑，並不保證準確。

例題 2： π 的一次估計

在圖 3 中， $C = 24$ 且 $n = 30$ ，故

$$\hat{\pi} = 4 \left(\frac{24}{30} \right) = \boxed{3.20}.$$

此估計合理但粗略。不同種子會產生不同點數。因此，報告 3.20 時應同時提供 n 、隨機數程序，最好亦提供重複運行的結果。

對獨立樣本，蒙地卡羅不確定性通常按下列速率下降：

$$\text{典型誤差} \propto \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

因此，要把典型誤差縮小 2 倍，約需 4 倍樣本；要縮小 10 倍，約需 100 倍樣本。

檢查點：收斂

某模擬使用 2,500 個獨立樣本。要把典型蒙地卡羅誤差降至目前的五分之一，約需多少樣本？利用平方根規則解釋。

重複實驗與不確定性

增加單次運行內的觀測數與增加獨立重複實驗次數，回答的是不同問題。長時間運行可估計穩態表現；多次重複實驗則揭示運行之間的變異。至少應報告平均值與一項離散程度指標，並保留各次重複結果，而非只保存總平均。

4 隊列的離散事件模擬

在離散事件模擬中，狀態只在事件發生時改變。對單服務台隊列，令

- A_i 為顧客 i 的到達時間；
- S_i 為所需服務時間；
- B_i 為開始服務時間；
- D_i 為離開時間；
- $W_i = B_i - A_i$ 為等候時間。

更新方程為

$$B_i = \max(A_i, D_{i-1}), \quad D_i = B_i + S_i, \quad W_i = B_i - A_i,$$

其中 $D_0 = 0$ 。最大值表達隊列邏輯：只有當顧客已到達且服務台空閒時，服務才開始。



圖 4: 隊列由事件次序支配。隨機性來自到達與服務時間；更新邏輯則是確定性的。

例題 3：手動追蹤一個櫃檯

六名顧客的到達時間為

$$A_i = (0, 3, 5, 10, 12, 16)$$

服務時間為

$$S_i = (4, 5, 3, 4, 2, 5)$$

單位均為分鐘。套用更新方程得到：

顧客 i	1	2	3	4	5	6
到達 A_i	0	3	5	10	12	16
服務 S_i	4	5	3	4	2	5
開始 B_i	0	4	9	12	16	18
等候 W_i	0	1	4	2	4	2
離開 D_i	4	9	12	16	18	23

平均等候時間為

$$\bar{W} = \frac{0 + 1 + 4 + 2 + 4 + 2}{6} = \boxed{2.17 \text{ min}},$$

最大等候時間為 4 分鐘。這些數值只描述這條包含六名顧客的樣本路徑。

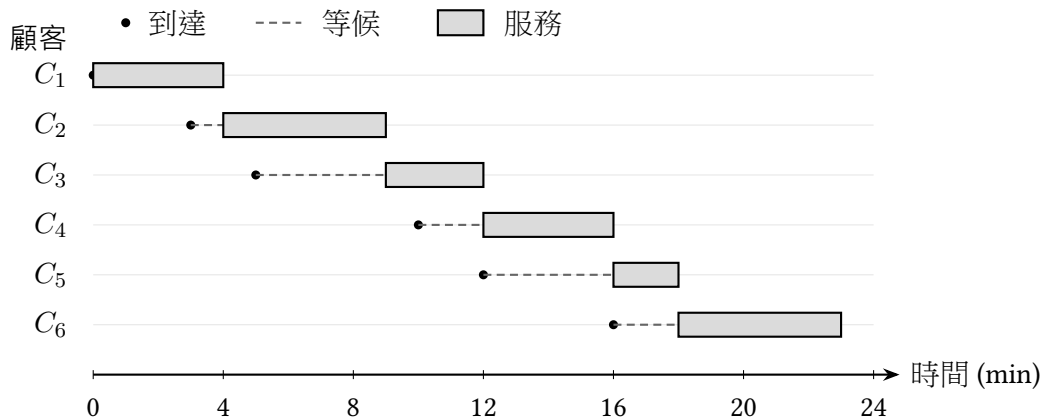


圖 5: 以顧客為中心的隊列時間線。實心點標示到達，虛線段表示等候，陰影方塊表示服務時段。

政策比較：增設第二個櫃檯

[15分鐘]

沿用例題 3 的到達與服務時間，把每名到達顧客分配至最先空間的櫃檯。

1. 完成包含櫃檯編號、開始時間、等候時間與離開時間的表格。
2. 求平均及最大等候時間。
3. 解釋為何單一樣本路徑不足以支持永久為第二個櫃檯安排人手。

5 從一次運行到決策

模擬研究是在模型上進行的實驗。運行前，應定義政策選項、輸入分佈、表現指標、模擬長度、重複次數與比較方法。

隊列的一項實用初步檢查是交通強度

$$\rho \approx \frac{\text{平均服務時間}}{c \times \text{平均到達間隔}},$$

其中 c 為服務台數目。若 $\rho > 1$ ，工作到達速度快於系統處理速度，隊列會傾向增長，而非穩定於長期分佈。

例題 4：詳細模擬前先檢查容量

假設平均到達間隔為 3.5 分鐘，平均服務時間為 4.7 分鐘。
對一個櫃檯，

$$\rho_1 = \frac{4.7}{1(3.5)} \approx 1.34 > 1.$$

櫃檯平均容量不足。長時間模擬會顯示等候增加，但關鍵結論屬結構性：在這些假設下，一個櫃檯無法應付需求。

對兩個櫃檯，

$$\rho_2 = \frac{4.7}{2(3.5)} \approx 0.67 < 1.$$

系統有可能穩定，但仍需模擬等候時間變異。容量檢查應配合而非取代詳細模擬。

模型檢視：不要把模擬平均值誤作普遍事實

「平均等候 = 2.17 分鐘」這類結果取決於輸入分佈、排隊規則、人手政策、運作時段與隨機樣本。可信報告應提供：

1. 每項隨機輸入的假設與數據來源；
2. 重複實驗的次數與長度；
3. 平均值，連同變異或百分位數；
4. 對不確定假設的敏感度；
5. 算法的運算／程式核證，以及與真實觀測比較的模式效度驗證。

模擬研究設計**[10分鐘]**

學校希望比較一個櫃檯、兩個櫃檯，以及一個櫃檯配合精簡餐單。
撰寫簡短實驗計劃，列明：

1. 隨機輸入及其估計方法；
2. 至少四項輸出；
3. 模擬時域與重複次數；
4. 一項使用共同隨機種子的公平比較技巧；
5. 一項模型效度驗證檢查及一項敏感度測試。

運算 / 程式核證與模型效度驗證

運算 / 程式核證追問：「我們是否正確實作模型？」可手動追蹤小型案例、檢查守恆規則，並以固定種子重現結果。

模型效度驗證追問：「模型是否足以就指定用途表示真實系統？」可比較模擬與觀測的隊列長度、等候、使用率與到達模式。程式即使通過核證，仍可能模擬了錯誤系統。

暫態暖機與重複實驗層級的不確定性

若長期模擬從人為設定的空系統開始，初段通常存在暫態：早期觀測主要反映初始化，而非穩態運作。研究穩態問題時，應選定並說明暖機（或 burn-in）期 b ，捨棄 b 之前的觀測，並檢查結論對鄰近 b 值是否穩健。若研究的是有限時域，例如從空隊列開始的一個真實午膳時段，則不應捨棄初段，因為該初始狀態正是所建模系統的一部分。

對 R 次獨立重複實驗，先為每次重複計算一個輸出 Y_r 。令重複實驗平均為 $\bar{Y}$ 、樣本標準差為

s_Y ，則近似雙側 $100(1 - \alpha)\%$ 置信區間為

$$\bar{Y} \pm t_{1-\alpha/2, R-1} \frac{s_Y}{\sqrt{R}}.$$

不確定性的分析單位是整次重複實驗，而非同一次運行中互相關聯的每名顧客或每個時間步。報告時須一併交代初始化、暖機規則、運行長度、重複次數及區間方法。

6 課堂總結

應掌握的六個觀念

1. 模擬把隨機輸入與確定性流程規則結合。
2. 可透過累積概率把均勻隨機數映射至經驗結果。
3. 一次蒙地卡羅運行只是一個可能結果，而非答案本身。
4. 典型蒙地卡羅誤差只按 $1/\sqrt{n}$ 下降。
5. 在隊列中， $B_i = \max(A_i, D_{i-1})$ 捕捉事件次序。
6. 決策需要重複實驗、不確定性摘要、運算／程式核證、模型效度驗證及敏感度分析。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成以下兩句：

「固定隨機種子很有用，因為_____。」

「第二個種子或獨立重複實驗是必要的，因為_____。」

7 練習題

核心練習

1. 維修時間 T 服從下列分佈：

T (h)	1	2	3	5
$P(T = t)$	0.10	0.40	0.35	0.15.

建立區間映射，並把 $U = 0.04, 0.36, 0.71, 0.92$ 轉化為維修時間。

2. 某四分之一圓模擬在 $n = 10,000$ 個點中得到 $C = 7,824$ 個圓內點。
 - (a) 估計 π 。
 - (b) 若樣本量乘以 25，典型蒙地卡羅誤差應改變多少倍？
 - (c) 解釋為何每次個別運行的實際誤差未必都下降。
3. 對單服務台隊列，到達時間為

$$A = (0, 2, 6, 7, 11),$$

服務時間為

$$S = (3, 5, 2, 4, 3).$$

建立開始時間、等候與離開的完整表格。求平均等候、最大等候及在系統內的平均時間。

4. 某服務台的平均到達間隔為 6 分鐘，平均服務時間為 8 分鐘。
 - (a) 計算一個及兩個服務台時的 ρ 。
 - (b) 模擬前可得出甚麼結論？
 - (c) 尚欠甚麼重要資料？
5. 解釋以下各項陳述為何不足：
 - (a) 「模擬運行一次，得出平均等候 4.2 分鐘。」
 - (b) 「程式沒有編碼錯誤，所以模型有效。」
 - (c) 「直方圖吻合上月數據，所以全年都會正確。」
 - (d) 「兩櫃檯系統的平均等候較短，所以自動成為最佳政策。」
6. 某小組使用完全相同的到達與服務需求序列比較兩項人手政策。解釋此共同隨機數設計為何令比較更清晰，以及小組為何仍應使用多個種子。

練習核對與提示

1. 區間為 $[0, 0.10)$ 、 $[0.10, 0.50)$ 、 $[0.50, 0.85)$ 及 $[0.85, 1)$ ；輸出為 $(1, 2, 3, 5)h$ 。
2. $\hat{\pi} = 3.1296$ 。把 n 乘以 25，典型誤差除以 5；但抽樣變異不保證每次運行的誤差單調改善。
3. (B_i, W_i, D_i) 依次為 $(0, 0, 3)$ 、 $(3, 1, 8)$ 、 $(8, 2, 10)$ 、 $(10, 3, 14)$ 、 $(14, 3, 17)$ 。平均等候 = 1.8 min，最大等候 = 3 min，平均逗留時間 = 5.2 min。
4. $\rho_1 = 8/6 \approx 1.33$ ， $\rho_2 = 8/12 \approx 0.67$ 。單一服務台的平均容量不足；兩個服務台可能穩定，但仍須考慮輸入分佈、相依性、排隊規則及時間變化。
5. 四項陳述依次忽略重複實驗不確定性、模型效度驗證、時間穩定性，以及成本、公平或其他目標。
6. 共同隨機數可降低配對政策差異的雜訊；仍須使用多個獨立種子估計不確定性，避免只對某個種子成立的結論。

建模挑戰

為以下其中一個系統撰寫一頁模擬簡報：

1. 學校飯堂隊列；
2. 共享單車站的單車可用量；
3. 熱門文具的每日庫存；
4. 小型診所的病人到達。

內容包括：目的、狀態變量、事件、隨機輸入、輸入數據計劃、流程邏輯、輸出、政策選項、重複實驗計劃、模型效度驗證、敏感度及一項限制。不要求完整電腦程式。

A 選讀算法：單服務台隊列

本附錄不屬於兩小時核心課堂內容，把事件方程轉化為偽代碼。

隊列模擬偽代碼

1. 設上一名顧客離開時間 $D \leftarrow 0$ ，並初始化輸出列表。
2. 對顧客 $i = 1, \dots, n$ ：
 - (a) 生成或讀取到達間隔與服務時間；
 - (b) 更新到達時間 A_i ；
 - (c) 設 $B_i \leftarrow \max(A_i, D)$ ；
 - (d) 設 $W_i \leftarrow B_i - A_i$ ；
 - (e) 設 $D_i \leftarrow B_i + S_i$ ，並更新 $D \leftarrow D_i$ ；
 - (f) 記錄等候時間、系統內時間、隊列長度與服務台狀態。
3. 計算該次重複實驗的摘要統計量。
4. 使用獨立種子重複，並跨重複實驗作摘要。

B 選讀說明：四分之一圓估計量的標準誤差

若樣本點 j 位於四分之一圓內，令 $I_j = 1$ ；否則令 $I_j = 0$ 。則 I_j 服從 $p = \pi/4$ 的伯努利分佈，且

$$\hat{\pi} = 4\bar{I}.$$

因此

$$\text{SE}(\hat{\pi}) = 4\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \frac{1.64}{\sqrt{n}}.$$

這是估計量的標準差，而非保證的誤差界。例如，把 n 從 100 增至 10,000，可令標準誤差縮小 10 倍。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 離散事件模擬文件（SimPy）
- 《工程統計手冊》（NIST / SEMATECH）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。