

數學建模講義

第 2 講：建模過程與尺度律

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 把含糊的現實問題轉化為精確的建模目標；
2. 辨認變量、單位、假設及有用的子模型；
3. 區分正比關係與一般線性關係；
4. 透過變量變換檢驗 $y \propto f(x)$ 形式的關係；
5. 運用幾何相似推導面積、體積與重量的尺度律；
6. 從解釋、敏感度與限制三方面評估模型。

1 從含糊問題到建模目標

現實問題很少會以可立即求解的形式出現。建模者必須決定要預測甚麼、答案對誰有用，以及結論預期在哪些條件下成立。這個先收窄問題的步驟稱為形成問題。

引入活動：比例模型足夠嗎？

[10 分鐘]

某學校擬興建有遮蔭的戶外舞台。施工前，學生製作一個 1:20 的比例模型，並在燈下測試。二人一組討論：

1. 模型中的哪些測量可以直接按比例換算至實際舞台？
2. 哪些效應未必以同一方式縮放？
3. 模型可以支援甚麼決策？
4. 哪些證據能令你信任模型？

建模要點：模型可以保留某些關係，卻扭曲另一些關係。我們必須知道哪些量可以按比例改變，以及原因何在。

實用建模流程

對大多數競賽與課堂問題而言，以下六個問題比立即尋找公式更有用。

1. 目的：需要甚麼決策、解釋或預測？
2. 變量與單位：必須測量甚麼？使用甚麼單位？
3. 假設：哪些因素視為不變、忽略或理想化？
4. 結構：問題能否分拆為較小的子模型？
5. 證據：如何估計參數及檢查結果？

6. 表達：甚麼結論有充分理據？它可能在哪些情況失效？

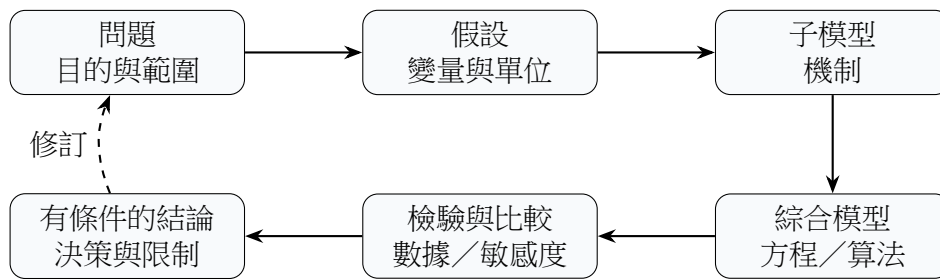


圖 1: 模型由一連串互相關連的決定發展而成，而非孤立地選取公式。

檢查點：可建模的問題

把含糊問題「這條道路有多安全？」改寫為較精確的建模問題。改寫後必須指出一個輸出量，以及答案適用的至少一項條件。

2 案例研究：車輛煞停距離

考慮問題：汽車安全停下來需要多少距離？一個實用的初步模型把過程分成兩個機制：

$$\text{總煞停距離} = \text{反應距離} + \text{制動距離}.$$

這是分解的例子：以較簡單子模型表示複雜系統，再把各子模型的輸出組合起來。

例題 1：建立煞停距離模型

設 v 為以米每秒計的初速度， t_r 為以秒計的駕駛者反應時間， a 為以米每二次方秒計的制動減速度大小。

反應子模型。假設汽車在反應時段內大致以固定速度行駛：

$$d_r = t_r v.$$

制動子模型。假設煞車啟動後減速度固定。由 $0 = v^2 - 2ad_b$ ，

$$d_b = \frac{v^2}{2a}.$$

綜合模型。

$$d(v) = t_r v + \frac{v^2}{2a}.$$

對基準駕駛者，取 $t_r = 1.2 \text{ s}$ ，乾燥路面的減速度為 $a = 6.5 \text{ m/s}^2$ ，

$$d(v) = 1.2v + 0.0769v^2.$$

在 50 km/h ($v = 13.89 \text{ m/s}$) 時，預測煞停距離約為 31.5 m ；在 100 km/h ($v = 27.78 \text{ m/s}$) 時，約為 92.7 m 。因此，速度加倍時所需距離接近三倍，而非只有兩倍。

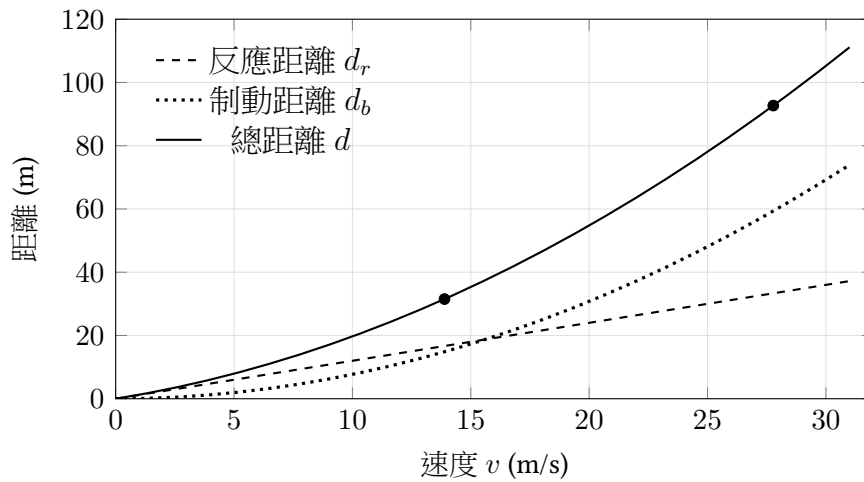


圖 2: 速度越高，二次制動項的影響越顯著。

檢查點：制動距離何時佔主導？

求制動距離首次等於反應距離時的正速度，並以 m/s 與 km/h 表示答案。這個門檻對高速駕駛有甚麼意義？

得到方程並不代表模型已完整。我們必須追問：當假設作合理改變時，結論是否仍然穩定？

例題 2：80 km/h 時的敏感度

在 80 km/h 時， $v = 22.22$ m/s。比較四種情境：

情境	t_r (s)	a (m/s ²)	預測距離 (m)
基準：駕駛者警覺、路面乾燥	1.2	6.5	64.7
反應較慢	1.8	6.5	78.0
路面濕滑	1.2	3.5	97.2
反應較慢且路面濕滑	1.8	3.5	110.5

在此速度下，結論對可用減速度的敏感程度高於反應時間的中等改變。這並非表示反應時間不重要，而是說路面與輪胎狀況在這項特定比較中佔主導。

模型檢視：模型忽略了甚麼？

模型假設地面水平、減速度固定、反應時段結束後立即全力制動，且行駛方向不變；亦把 t_r 與 a 視為已知常數。現實中，兩者會隨疲勞、分心、天氣、輪胎狀況、路面坡度與制動技術而變化。

因此，有理據的結論必須附帶條件：在所述反應時間與減速度假設下，所需煞停距離隨速度非線性增加。

改良模型

[8 分鐘]

從路面坡度、雨水、輪胎磨損或駕駛者疲勞中，選一項被忽略的因素。

1. 它會影響哪個參數或子模型？
2. 你會用新變量表示該因素，還是改變現有參數？
3. 估計此改變需要甚麼數據？

3 廣義正比與變量變換

正比模型不一定採用 $y = kx$ 的形式。更一般地，

$$y \propto f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = kf(x).$$

若此關係合理，以變換後的變量 $f(x)$ 為橫軸、 y 為縱軸作圖，應得到一條近似通過原點的直線。

線性不一定等於正比

關係 $y = mx + c$ 在學校代數中是線性的，但只有在 $c = 0$ 時才是正比。含起錶費的的士車資與距離呈線性關係，卻不成正比。

同樣地，以 x 為橫軸時， $y = kx^2$ 的圖像並非直線；然而 y 與 x^2 成正比，改以 x^2 為橫軸後便成為直線。

例題 3：開普勒第三定律

設 R 為行星以天文單位（AU）計的平均軌道半徑， T 為以地球年計的軌道週期。開普勒第三定律指出

$$T \propto R^{3/2}.$$

以地球為基準， $R = 1$ 且 $T = 1$ ，故比例常數約為 1：

$$T \approx R^{3/2}.$$

對木星而言， $R = 5.203$ AU，因此

$$T \approx 5.203^{3/2} \approx 11.87 \text{ 年},$$

與觀測值 11.86 年接近。

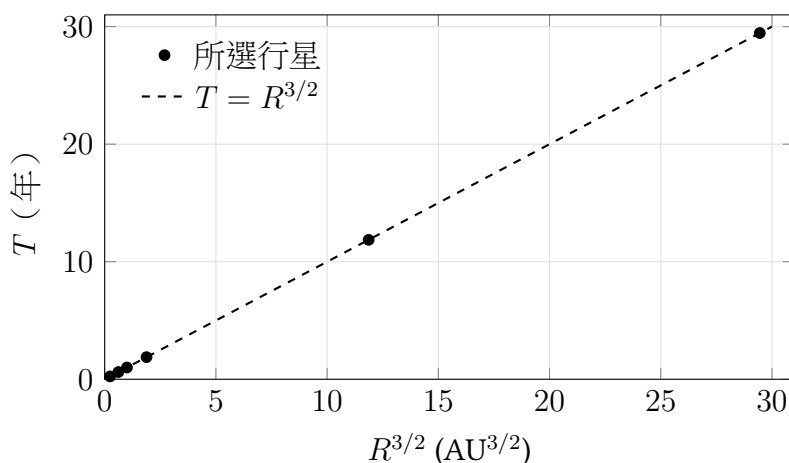


圖 3: 變換橫軸變量後，開普勒關係近似為正比。

檢查點：選擇合適的變換

對每項擬議關係，說明應在橫軸繪畫甚麼量，才可檢驗正比關係。

1. $F \propto v^2$
2. $P \propto 1/V$
3. $N \propto e^{rt}$ ，其中 r 已知

4 幾何相似與尺度律

若兩個物體形狀相同，且每組對應長度都乘以同一比例因子 λ ，則稱兩者幾何相似。
若所有長度都乘以 λ ，則每個面積乘以 λ^2 ，每個體積乘以 λ^3 ：

$$L \propto \lambda, \quad S \propto \lambda^2, \quad V \propto \lambda^3.$$

對材料與密度相同的物體，質量與重量亦按體積縮放：

$$W \propto V \propto L^3.$$

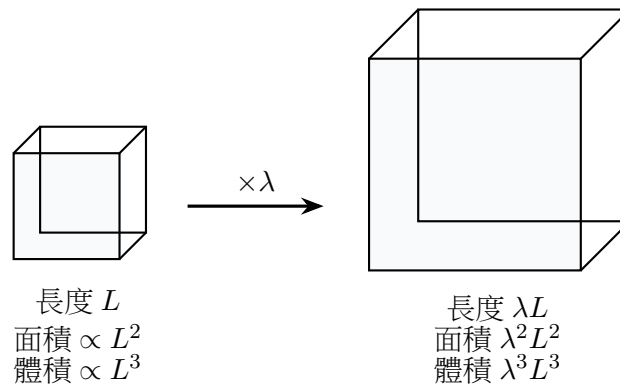


圖 4: 長度、面積與體積並非按同一速率縮放。

尺度換算表

[6分鐘]

在不使用公式表的情況下完成下表。

比例因子 λ	長度因子	面積因子	體積因子
2			
3			
$\frac{1}{2}$			

再解釋為何高度加倍的儲水箱，容量不只是原來的兩倍。

例題 4：潛艇比例模型

一艘長 7 m 的模型與長 70 m 的潛艇幾何相似，因此實物的比例因子為 $\lambda = 10$ 。

- 對應長度乘以 10。
- 表面積乘以 $10^2 = 100$ 。
- 假設密度相同，體積與質量乘以 $10^3 = 1000$ 。

若熱量損失主要與表面積成正比，在相若溫度條件下，實物的熱量損失約為模型的 100 倍，而非 1000 倍。若儲存容量與體積成正比，實物容量則約為 1000 倍。

模型檢視：相似是假設，而非觀測

對數學上相似的形狀，面積與體積定律是精確的；把它們應用於真實物體時，可信程度取決於相似假設。幼年動物與成年動物的比例未必相同；大型橋樑可能需要較厚的支撐；雨滴增大時也會改變形狀。

5 運用尺度模型改良模型

有用的模型往往分階段發展。我們先從最簡單而合理的關係開始，找出遺漏之處，再加以改良。

例題 5：估計魚的重量

假設要在沒有磅秤的情況下估計一條鱸魚的重量 W 。

模型一：只用長度。若所有魚都幾何相似且密度大致相同，則

$$W \propto L^3.$$

此模型方便，但兩條長度相同的魚，身體粗幼可以相差很大。

模型二：長度與圍度。把魚近似為一連串相似截面。截面面積按圍度 G 的平方縮放，因此

$$W \propto LG^2.$$

假設一條 $L = 40 \text{ cm}$ 、 $G = 25 \text{ cm}$ 的魚重 1.25 kg ，則

$$1.25 = k(40)(25)^2 \implies k = 0.00005 \text{ kg/cm}^3.$$

模型預測一條 $L = 50 \text{ cm}$ 、 $G = 30 \text{ cm}$ 的魚重量為

$$W = 0.00005(50)(30)^2 = 2.25 \text{ kg}.$$

第二個模型增加一項測量，以更直接地表示魚身狀況。

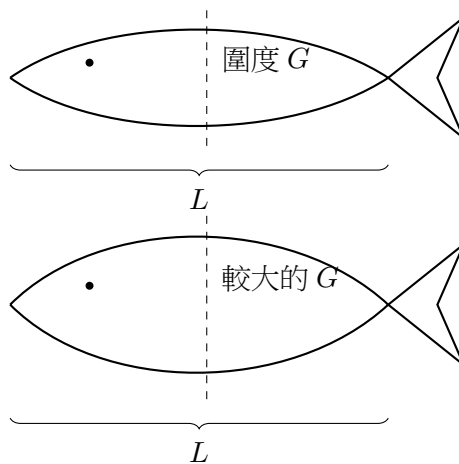


圖 5: 只用長度不能區分身體粗幼不同的魚。

模型檢視：改良後的模型解決了所有問題嗎？

模型 $W = kLG^2$ 仍假設魚的品種、密度與體形可比。圍度測量可能不一致，而只用一條魚校準，也無法估計預測誤差。改良提升了模型的相關性，卻同時增加一項測量及另一個不確定性來源。

檢查點：比較兩個模型

若魚的長度增加 10%，而圍度不變：

1. 模型一 $W \propto L^3$ 的預測增加百分之多少？
2. 模型二 $W \propto LG^2$ 的預測增加百分之多少？

3. 兩個模型為何得出不同結果？

6 最後一項尺度後果：力量與重量

即使未知數值常數，尺度律仍可揭示定性限制。假設幾何相似的動物由性質相若的物料構成。

- 肌肉力量大致與肌肉截面面積成正比：力量 $\propto L^2$ 。
- 體重與體積成正比： $W \propto L^3$ 。

因此

$$\frac{\text{力量}}{\text{重量}} \propto \frac{L^2}{L^3} = \frac{1}{L} \propto W^{-1/3}.$$

巨型螞蟻能保持相對力量嗎？

[10 分鐘]

把一隻螞蟻放大，使每項長度都變為 10 倍，而形狀與材料不變。

1. 肌肉截面面積增加多少倍？
2. 體重增加多少倍？
3. 每單位重量的力量改變多少倍？
4. 說明幾何相似假設可能不適用於真實巨型動物的一項原因。

尺度論證能做與不能做的事

尺度論證常可預測指數或定性趨勢，卻不能確定比例常數。它特別適合比較大小及辨認哪些效應增長得較快，但不能取代校準、模型效度驗證或對底層機制的認識。

選修延伸：相似物體的終端速度

假設幾何相似的下墜物體受到二次阻力。在終端速度下，重量與阻力平衡：

$$mg \propto Av_t^2.$$

密度固定時， $m \propto L^3$ ，迎風面積 $A \propto L^2$ ，因此

$$L^3 \propto L^2 v_t^2 \implies v_t \propto L^{1/2} \propto m^{1/6}.$$

指數很小，表示終端速度隨質量改變得相對緩慢。此結論取決於二次阻力、幾何相似及相若密度，並非適用於所有下墜物體的普遍定律。

7 課堂總結

應掌握的六個觀念

1. 必須把含糊問題收窄為目的、輸出及一組適用條件。
2. 複雜系統往往可由可解釋的子模型組成。
3. 以 $f(x)$ 為橫軸、 y 為縱軸時，正比關係 $y = kf(x)$ 會成為通過原點的直線。
4. 在幾何相似的物體中，長度、面積與體積分別按 λ 、 λ^2 與 λ^3 縮放。

5. 改良模型應針對具體弱點，而非只增加複雜程度。
6. 每項結論都應附帶假設、敏感度分析，以及模型可能失效之處。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成以下兩句：

1. 「今天煞停距離模型中最重要的假設是_____，因為_____。」
2. 「當每項長度都加倍時，_____比_____增長得快，因為_____。」

8 練習題

核心練習

1. 某駕駛者的反應時間為 1.4 s，能以 5.0 m/s^2 減速。
 - (a) 以 m/s 為速度 v 的單位，寫出煞停距離模型。
 - (b) 估計在 72 km/h 時所需距離。
 - (c) 指出一個不確定的參數，並解釋如何測量。
2. 送貨費為固定 25 元，另加每公里 4 元。
 - (a) 費用是否與距離成正比？加以解釋。
 - (b) 寫出線性模型，並解釋兩個常數。
3. 對每項關係，指出一個經變換的橫軸變量，使模型正確時圖像成為通過原點的直線：

$$y \propto x^3, \quad y \propto \sqrt{x}, \quad y \propto \frac{1}{x^2}.$$
4. X 行星的平均軌道半徑為 4 AU。利用 $T \approx R^{3/2}$ 估計其軌道週期。若觀測週期為 8.5 年，以觀測週期為分母計算絕對相對誤差，並提出差異的一個可能原因。
5. 重新設計一個立方體水箱，使每條邊增長 30%。
 - (a) 表面積變為多少倍？
 - (b) 容量變為多少倍？
 - (c) 哪個量的百分比增幅較大？
6. 某紀念碑的 1:25 模型使用 0.80 kg 材料。估計密度相同且幾何相似的實物所需材料，並說明此估計可能不適用於真實結構的原因。
7. 某魚類模型為 $W = kLG^2$ 。一條已測量的魚有 $L = 45 \text{ cm}$ 、 $G = 28 \text{ cm}$ 及 $W = 1.80 \text{ kg}$ 。
 - (a) 估計 k 。
 - (b) 預測一條 $L = 52 \text{ cm}$ 、 $G = 31 \text{ cm}$ 的魚的重量。
 - (c) 說明兩項預測不確定性來源。
8. 兩隻幾何相似動物的重量比為 8:1。
 - (a) 求其特徵長度之比。

- (b) 求其表面積之比。
- (c) 比較其表面積與體積之比。

練習核對與提示

1. $d(v) = 1.4v + v^2/10$ ；在 72 km/h 時， $v = 20$ m/s，故 $d = 68$ m。
2. 費用為 $25 + 4d$ 元；固定收費非零，故不成正比。
3. 應分別以 x^3 、 $\sqrt{x}$ 及 $1/x^2$ 作橫軸。
4. 模型給出 8 年；相對於 8.5 年，絕對相對誤差約為 5.9%。
5. 表面積乘以 $1.3^2 = 1.69$ ，容量乘以 $1.3^3 = 2.197$ 。
6. 體積縮放給出 $0.80(25^3) = 12500$ kg；實際結構設計與材料厚度未必按幾何相似縮放。
7. $k \approx 5.102 \times 10^{-5}$ kg/cm³，預測約為 2.55 kg；測量誤差與體形差異都是相關不確定性。
8. 長度比及面積比分別為 2:1 與 4:1；較小動物的表面積體積比為較大動物的兩倍。

建模挑戰

選擇一個問題，撰寫一頁建模簡報。

1. 若學生人數增加 50%，學校水箱的尺寸應如何改變？
2. 小型風洞模型能否預測實物車輛所受的空氣動力？
3. 如何利用不需磅秤的測量估計水果重量？

重點是模型的邏輯，不要求得出完整校準的數值答案。

一頁建模簡報規劃表

目的與輸出	模型將支援甚麼決策或預測？將報告甚麼量？
變量與單位	定義可測量的量，並區分輸入與輸出。
假設	說明哪些因素視為不變、忽略或幾何相似。
子模型 / 尺度律	提出至少兩項關係，並解釋各自為何合理。
校準	指出估計未知常數所需的數據。
模型效度驗證	解釋哪項觀測或比較可檢驗模型是否適合指定用途。
敏感度	指出一項應改變的假設或參數。
限制	說明結論不應用於哪些情況。

檢查點：提交前檢查

提交前，在簡報中給出主要結論的句子下劃線；圈出每個帶單位的數值；並在最強烈影響結果的假設旁加上星號。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）
- 《國際單位制指南》：量值、物理量與量綱（NIST）
- 行星資料表——相對地球數值（NASA NSSDCA）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。