

數學建模講義

第 1 講：建立變化模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 解釋為何數學模型是針對特定目的而作的現實簡化；
2. 辨認並檢驗正比關係；
3. 將「未來值 = 目前值 + 變化量」轉化為差分方程；
4. 在情境中解釋參數、初始條件與平衡值；
5. 區分無約束增長與受約束增長；
6. 從模型效度驗證、敏感度與限制三方面評估簡單模型。

1 甚麼是數學模型？

數學模型是為特定目的而建立的數學表述。它可以幫助我們描述系統、解釋機制、預測可能發生的情況，或比較不同決策。模型並非現實的完整複製品：它保留與問題相關的特徵，並有意忽略其他細節。

引入活動：你會建立甚麼模型？

[10 分鐘]

某學校發現飯堂輪候隊伍有時很短，有時卻延伸至建築物外。

二人一組討論：

1. 可以測量甚麼？列出至少四個變量。
2. 「輪候情況惡劣」是指等候時間長、隊伍實際長度大，還是太多學生遲到？
3. 提出兩項你可能採用的簡化假設。
4. 模型可以支援哪一項決策？

建模要點：選擇數學方法之前，先界定問題及真正重要的輸出。

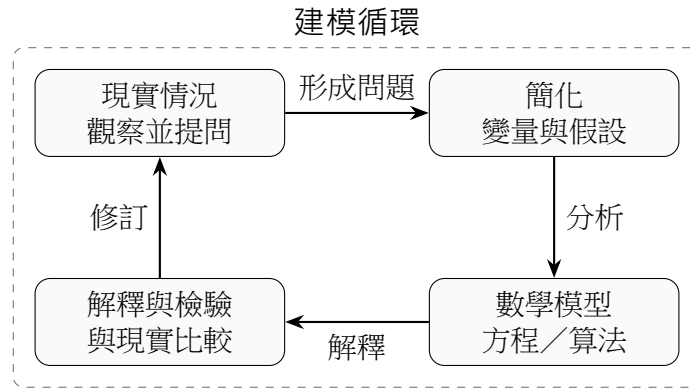


圖 1: 建模是一個反覆修訂的過程。檢驗未通過並非終點，而是指出需要修訂之處。

建模過程中應持續追問的四個問題

1. 目的：需要作出甚麼決策或解釋？
2. 結構：哪些變量互相作用？作用方式如何？
3. 證據：哪些數據或推理支持這項關係？
4. 可信度：如何檢驗結果並陳述限制？

2 第一種簡化關係：正比

若兩個變量 y 與 x 滿足

$$y = kx,$$

則稱兩者成正比，其中 k 是比例常數。其圖像是一條通過原點的直線。 k 的單位十分重要：它說明 x 每增加一個單位時， y 改變多少。

例題 1：彈簧與質量數據

在彈簧上放置不同質量的重物。設 m 為以克計的質量， e 為以厘米計的伸長量。測量數據如下。

m	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
e	1.000	1.875	2.750	3.250	4.375	4.875	5.675	6.500	7.250	8.000	8.750

把最小二乘直線限制為通過原點，所得斜率為

$$k = \frac{\sum m_i e_i}{\sum m_i^2} \approx 0.01622 \text{ cm/g}.$$

因此，一個簡單模型是

$$e = 0.01622m.$$

當質量為 420 g 時，模型預測 $e \approx 6.81 \text{ cm}$ 。

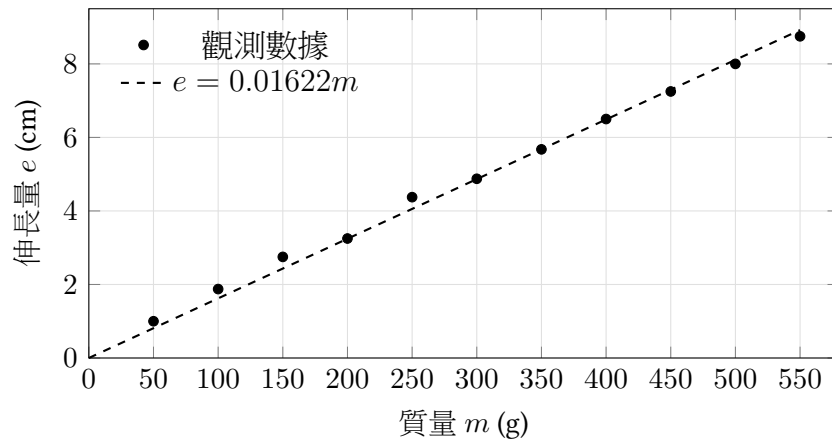


圖 2: 各點接近一條通過原點的直線，因此採用正比關係是合理的。

模型檢視：模型是精確的嗎？

各點並非完全落在直線上，因為測量含有誤差，而真實彈簧在所有載荷下也未必服從同一關係。我們不應寫成「彈簧完全遵循該方程」。較有理據的陳述是：在已測試範圍內，伸長量與質量大致成正比。

檢查點：正比關係

的士收取固定起錶費，另按每公里收費。總車資是否與距離成正比？用一句話解釋。
提示：距離為零時，車資應是多少？

3 建立離散變化模型

當某個量按固定間隔（日、月、世代）記錄時，一個實用的起點是

$$\boxed{\text{下一個值} = \text{目前值} + \text{一個步長內的變化量}.}$$

對數列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ ，其一階差分為

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

差分方程描述下一個值如何取決於目前值；配合初始條件後，便定義了一個離散動力系統。

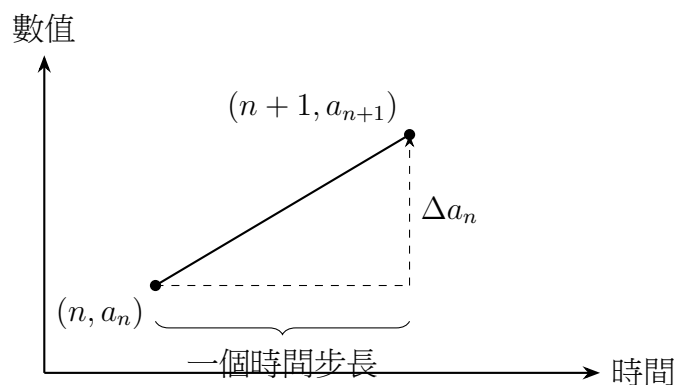


圖 3: 一階差分是相鄰兩次觀測之間的垂直變化量。

例題 2：每月複利

一張存款證的初始金額為 $a_0 = 1000$ 元，每月利率為 1%。每月變化量等於目前結餘的 1%：

$$\Delta a_n = 0.01a_n.$$

因此

$$a_{n+1} = a_n + 0.01a_n = 1.01a_n, \quad a_0 = 1000.$$

首幾個數值為

$$1000, 1010, 1020.10, 1030.30, \dots$$

反覆代入可得到閉式

$$a_n = 1000(1.01)^n.$$

遞推式解釋逐步變化機制；閉式則可迅速回答長期問題。

引導練習：藥物消除

[8分鐘]

某藥物每小時流失當時含量的 20%，初始含量為 640 mg。

1. 清楚定義 a_n ，包括其單位。
2. 寫出變化方程 $\Delta a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 寫出遞推式，並計算 a_1, a_2, a_3 。
4. 不逐項計算，預測其長期行為。

解釋乘數

對 $a_{n+1} = ra_n$ ：

乘數	行為
$r > 1$	正增長
$0 < r < 1$	衰減並趨近 0
$-1 < r < 0$	正負號交替，絕對值縮小
$ r > 1$	絕對值增大；正負號可能交替

必須按情境檢查負值的含義。遞推式在數學上可以成立，但當它預測負人口或負結餘時，已失去現實意義。

4 固定輸入或移除： $a_{n+1} = ra_n + b$

許多系統同時包含成比例的變化及固定輸入或輸出：

$$a_{n+1} = ra_n + b.$$

例子包括定期存款、固定月供、按固定間隔服藥，以及每次補充固定數量的庫存。

平衡值 a^* 是保持不變的數值：

$$a^* = ra^* + b.$$

當 $r \neq 1$ 時，

$$a^* = \frac{b}{1-r}.$$

把遞推式減去平衡值，可得一個特別有用的形式：

$$a_{n+1} - a^* = r(a_n - a^*).$$

因此，每一步與平衡值的距離都乘以 r 。

例題 3：重複服藥

每天結束時，藥物剩餘 50%；隨後病人立即再服用 0.1 mg。設 a_n 為第 n 次服藥後的藥物量，則

$$a_{n+1} = 0.5a_n + 0.1.$$

平衡值為

$$a^* = \frac{0.1}{1 - 0.5} = 0.2 \text{ mg}.$$

由於 $|0.5| < 1$ ，每天與 0.2 的距離都減半。此平衡點是穩定的：附近的解會向它靠近。

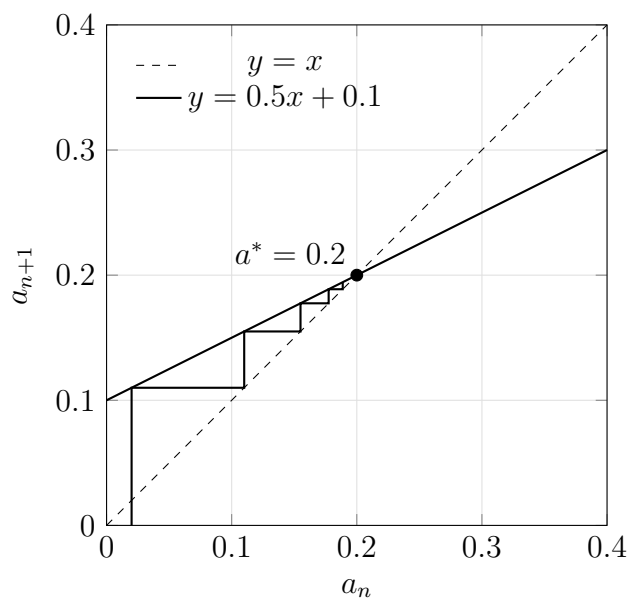


圖 4: 蛛網圖：迭代值趨近 $y = x$ 與 $y = 0.5x + 0.1$ 的交點。

例題 4：投資帳戶提款

某帳戶每月賺取 1% 利息，並於每月底支取 1000 元：

$$a_{n+1} = 1.01a_n - 1000.$$

其平衡值為

$$a^* = \frac{-1000}{1 - 1.01} = 100000.$$

由於 $1.01 > 1$ ，此平衡點是不穩定的。若初始值恰為 100000，結餘保持不變；高於此值時結餘增加，低於此值時結餘下降，直至模型最終預測負值。此時必須停止遞推，因為帳戶清空後不可能繼續提款。

檢查點：平衡與穩定性

對每個系統求平衡值，並判斷它是否穩定。

1. $x_{n+1} = 0.8x_n + 12$

$$2. y_{n+1} = 1.1y_n - 5$$

運用乘數解釋結論，而非只列出數值表。

5 增長放緩時：邏輯斯諦差分方程

指數增長假設相同的百分比增幅可以無限持續。可是在有限環境中，資源會日漸稀缺，增長通常會放緩。一個簡單的受約束模型是

$$p_{n+1} = p_n + k(M - p_n)p_n,$$

其中 M 是承載容量， k 控制增長速度。

變化量

$$\Delta p_n = k(M - p_n)p_n$$

包含兩個因子：

- p_n ：生物數量越多，可繁殖的新個體越多；
- $M - p_n$ ：接近上限時，剩餘容量變小。

例題 5：酵母培養

假設

$$p_{n+1} = p_n + 0.00082(665 - p_n)p_n, \quad p_0 = 9.6.$$

首幾個數值約為

$$9.6, 14.8, 22.6, 34.5, 52.4, 78.7, 116.6, \dots$$

增長先加速，隨後在數量接近 665 時放緩。這種 S 形模式是邏輯斯諦增長的特徵。

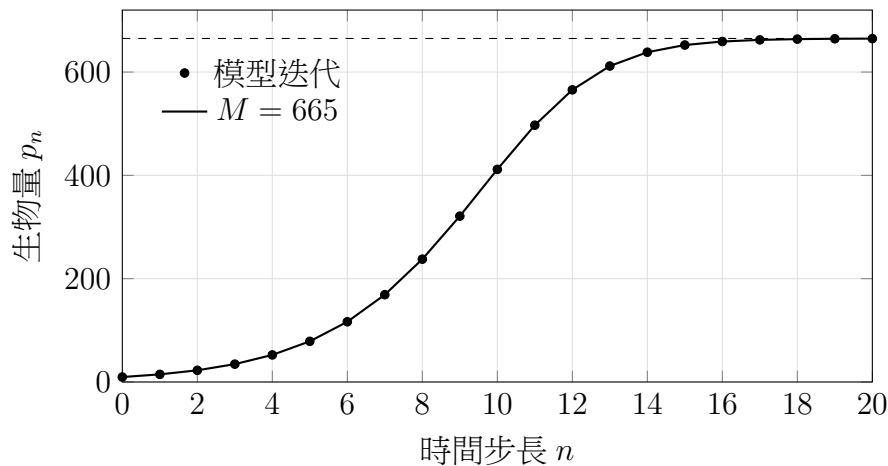


圖 5: 數量趨近承載容量，而非無限增長。

模型檢視：敏感度與解釋

改變 k 主要影響模型以多快速度趨近平衡；改變 M 則直接改變預測的長期水平。因此，相比 k 的中等誤差，最終數量的結論對 M 的不準確估計敏感得多。

優良的競賽報告應在情境中說明這一點，而非只列出百分比。

模型比較

[8 分鐘]

兩個小組為同一酵母數量建立模型。

$$\text{甲組：} p_{n+1} = 1.45p_n,$$

$$\text{乙組：} p_{n+1} = p_n + 0.00082(665 - p_n)p_n.$$

哪個模型較適合短期增長？哪個模型在長期較可信？每個答案各給出一項理由。

6 小型案例：離散 SIR 傳染病模型

最後這個案例預覽差分方程組。它旨在展示如何把上述概念結合於較大的建模問題，而非要求在第一課完整推導。

某宿舍共有 $N = 1000$ 名學生。在第 n 日：

- S_n 為易感染者人數；
- I_n 為現時感染者人數；
- R_n 為已移出傳播鏈的人數（康復或隔離）。

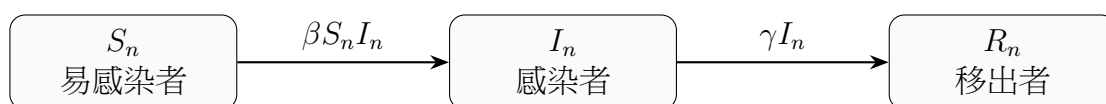


圖 6: SIR 模型中的分艙流動。

在封閉人口、均勻混合、不會再次感染及比率固定等簡化假設下，

$$S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n,$$

$$I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \gamma I_n,$$

$$R_{n+1} = R_n + \gamma I_n.$$

其中 β 是傳播參數， γ 是每日康復比例。當 $\beta = 0.0005$ 、 $\gamma = 0.1$ 且 $(S_0, I_0, R_0) = (999, 1, 0)$ 時，早期再生指標為

$$\mathcal{R}_0 \approx \frac{\beta S_0}{\gamma} = 4.995 > 1,$$

因此感染人數起初增加。

日	S_n	I_n	R_n
0	999.0	1.0	0.0
5	993.6	5.4	1.1
10	965.0	28.1	6.9
15	831.8	132.1	36.1
20	448.9	399.7	151.3
24	157.7	507.0	335.2
30	33.3	357.8	608.9

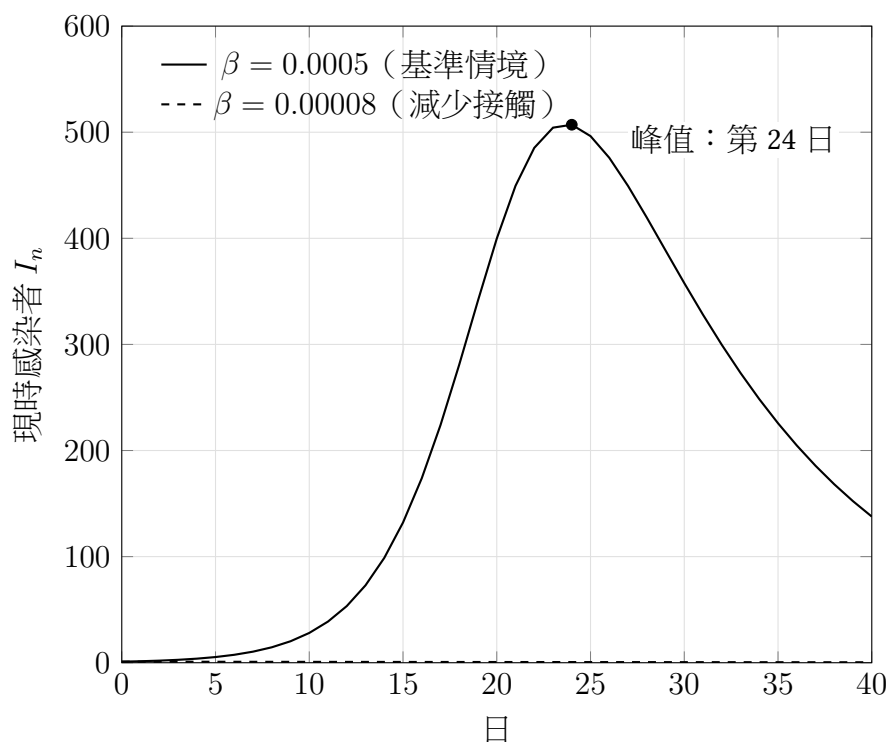


圖 7: 把傳播參數降至門檻以下，可阻止感染人數在初期增長。

競賽式表達

[10分鐘]

利用表格與圖像寫出三句結論：

1. 一句報告基準情境的峰值；
2. 一句描述介入措施的結果；
3. 一句陳述模型限制。

避免聲稱模型「證明」某件事必然發生。

7 課堂總結

應掌握的六個觀念

1. 模型為特定目的而建，且必然是簡化。
2. 參數的單位與解釋和代數運算同樣重要。
3. 對離散時間問題，從 下一個值 = 目前值 + 變化量 開始。
4. 在 $a_{n+1} = ra_n + b$ 中，乘數 r 決定平衡點附近的穩定性。
5. 非線性反饋可以令增長放緩，並產生承載容量。
6. 可信模型包括檢驗、敏感度分析及限制說明。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成句子：

「當_____時，數學模型是有用的；但當_____時，它可能失效。」

8 練習題

核心練習

- 某水箱裝有 800 L 水，每小時流失當時水量的 6%。
 - 寫出體積 V_n 的遞推式。
 - 求 V_5 並描述長期行為。
 - 說明模型最終可能變得不切實際的一項原因。
- 某社團有 120 名會員。每月有現有會員的 8% 退出，並有 15 名新會員加入。
 - 建立 $M_{n+1} = rM_n + b$ 。
 - 求平衡會員數。
 - 判斷平衡是否穩定並解釋原因。

- 某城鎮的回收計劃起初有 200 戶參與，其參與戶數按下式增長：

$$H_{n+1} = H_n + 0.002(1000 - H_n)H_n.$$

解釋 1000 的含義，以及模型為何在接近此值時放緩。

- 某數列滿足 $x_{n+1} = 1.15x_n - 30$ 、 $x_0 = 250$ 。
 - 求平衡值。
 - 計算首四項。
 - 若 x_n 代表金錢，情境是否需要停止規則？加以解釋。
- 以下數據記錄連續多輪宣傳後的下載次數：

80, 116, 169, 244, 351.

檢驗以固定乘數作近似是否合理。估計乘數並預測下一個數值，再評論預測的不確定性。

- 在傳染病模型中， β 只由三日數據估計。解釋為何必須對 β 作敏感度分析；答案須涉及決策，而非只談數學。

練習核對與提示

第 1–5 題可用以下結果核對：

- $V_{n+1} = 0.94V_n$ ， $V_5 \approx 587.12$ L；除非加入物理下限或改變流失機制，否則 $V_n \rightarrow 0$ 。
- $M_{n+1} = 0.92M_n + 15$ 的穩定平衡值為 $M^* = 187.5$ 。
- 數值 1000 是模型所表示的飽和水平。
- $x^* = 200$ ，且 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (257.5, 266.125, 276.044, 287.450)$ 。即使此初值令數列上升，金錢模型仍須設置定義域及停止規則。
- 相鄰下載數量的比率接近 1.45；若該模式延續，一項有理據的下一輪估計約為 508。

第 6 題的完整回應須把 β 的合理變化連繫至預測軌跡、介入時間或資源分配，並說明敏感度範圍。

建模挑戰

從以下情境選一項，撰寫一頁建模簡報，內容包括：目的、變量、假設、遞推式、預期行為、模型效度驗證計劃，以及一項限制。

1. 每天早上兩個共享單車站可用的單車數量。
2. 學校飯堂推行減廢計劃後，每日產生的廚餘量。
3. 新校園應用程式的用戶增長與飽和。

你毋須得出完美的數值答案；評核重點是形成問題及論證的質素。

A 選讀推導： $a_{n+1} = ra_n + b$ 的閉式

本附錄不屬於兩小時核心課堂內容，可供熟習代數推導的學生選讀。

當 $r \neq 1$ 時，令 $a^* = b/(1-r)$ ，並定義 $u_n = a_n - a^*$ 。則

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - a^* \\ &= ra_n + b - a^* \\ &= r(a_n - a^*) \\ &= ru_n. \end{aligned}$$

因此 $u_n = r^n u_0$ ，故

$$\boxed{a_n = a^* + r^n(a_0 - a^*)} = \boxed{\frac{b}{1-r} + r^n \left(a_0 - \frac{b}{1-r} \right)}.$$

此形式清楚呈現穩定性：當 $|r| < 1$ 時， $r^n(a_0 - a^*)$ 趨近零。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）
- 18.03SC 微分方程（MIT OpenCourseWare）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。