

數學建模講義

第 1 講：建立變化模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 解釋為何數學模型是針對特定目的而作的現實簡化；
2. 辨認並檢驗正比關係；
3. 將「未來值 = 目前值 + 變化量」轉化為差分方程；
4. 在情境中解釋參數、初始條件與平衡值；
5. 區分無約束增長與受約束增長；
6. 從模型效度驗證、敏感度與限制三方面評估簡單模型。

1 甚麼是數學模型？

數學模型是為特定目的而建立的數學表述。它可以幫助我們描述系統、解釋機制、預測可能發生的情況，或比較不同決策。模型並非現實的完整複製品：它保留與問題相關的特徵，並有意忽略其他細節。

引入活動：你會建立甚麼模型？

[10 分鐘]

某學校發現飯堂輪候隊伍有時很短，有時卻延伸至建築物外。

二人一組討論：

1. 可以測量甚麼？列出至少四個變量。
2. 「輪候情況惡劣」是指等候時間長、隊伍實際長度大，還是太多學生遲到？
3. 提出兩項你可能採用的簡化假設。
4. 模型可以支援哪一項決策？

建模要點：選擇數學方法之前，先界定問題及真正重要的輸出。

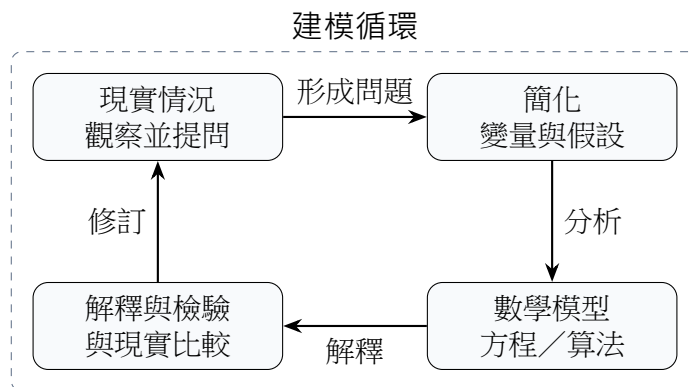


圖 1: 建模是一個反覆修訂的過程。檢驗未通過並非終點，而是指出需要修訂之處。

建模過程中應持續追問的四個問題

1. 目的：需要作出甚麼決策或解釋？
2. 結構：哪些變量互相作用？作用方式如何？
3. 證據：哪些數據或推理支持這項關係？
4. 可信度：如何檢驗結果並陳述限制？

2 第一種簡化關係：正比

若兩個變量 y 與 x 滿足

$$y = kx,$$

則稱兩者成正比，其中 k 是比例常數。其圖像是一條通過原點的直線。 k 的單位十分重要：它說明 x 每增加一個單位時， y 改變多少。

例題 1：彈簧與質量數據

在彈簧上放置不同質量的重物。設 m 為以克計的質量， e 為以厘米計的伸長量。測量數據如下。

m	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
e	1.000	1.875	2.750	3.250	4.375	4.875	5.675	6.500	7.250	8.000	8.750

把最小二乘直線限制為通過原點，所得斜率為

$$k = \frac{\sum m_i e_i}{\sum m_i^2} \approx 0.01622 \text{ cm/g}.$$

因此，一個簡單模型是

$$e = 0.01622m.$$

當質量為 420 g 時，模型預測 $e \approx 6.81 \text{ cm}$ 。

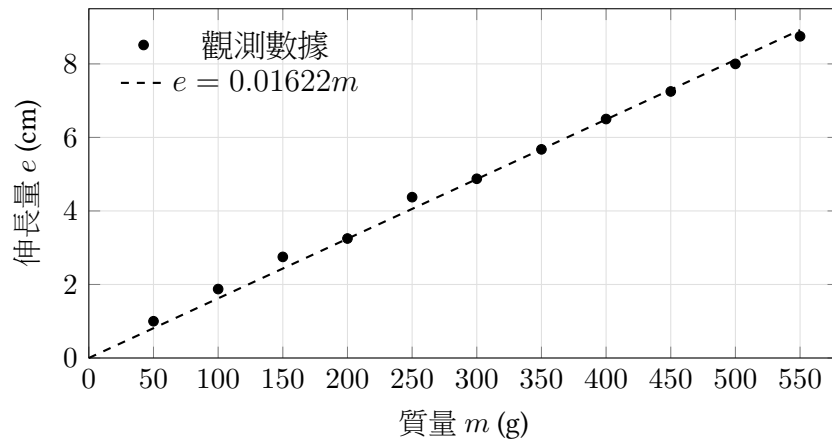


圖 2: 各點接近一條通過原點的直線，因此採用正比關係是合理的。

模型檢視：模型是精確的嗎？

各點並非完全落在直線上，因為測量含有誤差，而真實彈簧在所有載荷下也未必服從同一關係。我們不應寫成「彈簧完全遵循該方程」。較有理據的陳述是：在已測試範圍內，伸長量與質量大致成正比。

檢查點：正比關係

的士收取固定起錶費，另按每公里收費。總車資是否與距離成正比？用一句話解釋。
提示：距離為零時，車資應是多少？

3 建立離散變化模型

當某個量按固定間隔（日、月、世代）記錄時，一個實用的起點是

$$\boxed{\text{下一個值} = \text{目前值} + \text{一個步長內的變化量}.}$$

對數列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ ，其一階差分為

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

差分方程描述下一個值如何取決於目前值；配合初始條件後，便定義了一個離散動力系統。

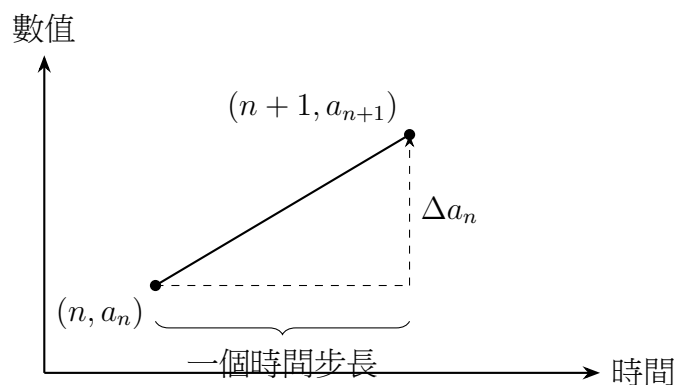


圖 3: 一階差分是相鄰兩次觀測之間的垂直變化量。

例題 2：每月複利

一張存款證的初始金額為 $a_0 = 1000$ 元，每月利率為 1%。每月變化量等於目前結餘的 1%：

$$\Delta a_n = 0.01a_n.$$

因此

$$a_{n+1} = a_n + 0.01a_n = 1.01a_n, \quad a_0 = 1000.$$

首幾個數值為

$$1000, 1010, 1020.10, 1030.30, \dots$$

反覆代入可得到閉式

$$a_n = 1000(1.01)^n.$$

遞推式解釋逐步變化機制；閉式則可迅速回答長期問題。

引導練習：藥物消除

[8分鐘]

某藥物每小時流失當時含量的 20%，初始含量為 640 mg。

1. 清楚定義 a_n ，包括其單位。
2. 寫出變化方程 $\Delta a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 寫出遞推式，並計算 a_1, a_2, a_3 。
4. 不逐項計算，預測其長期行為。

解釋乘數

對 $a_{n+1} = ra_n$ ：

乘數	行為
$r > 1$	正增長
$0 < r < 1$	衰減並趨近 0
$-1 < r < 0$	正負號交替，絕對值縮小
$ r > 1$	絕對值增大；正負號可能交替

必須按情境檢查負值的含義。遞推式在數學上可以成立，但當它預測負人口或負結餘時，已失去現實意義。

4 固定輸入或移除： $a_{n+1} = ra_n + b$

許多系統同時包含成比例的變化及固定輸入或輸出：

$$a_{n+1} = ra_n + b.$$

例子包括定期存款、固定月供、按固定間隔服藥，以及每次補充固定數量的庫存。

平衡值 a^* 是保持不變的數值：

$$a^* = ra^* + b.$$

當 $r \neq 1$ 時，

$$a^* = \frac{b}{1-r}.$$

把遞推式減去平衡值，可得一個特別有用的形式：

$$a_{n+1} - a^* = r(a_n - a^*).$$

因此，每一步與平衡值的距離都乘以 r 。

例題 3：重複服藥

每天結束時，藥物剩餘 50%；隨後病人立即再服用 0.1 mg。設 a_n 為第 n 次服藥後的藥物量，則

$$a_{n+1} = 0.5a_n + 0.1.$$

平衡值為

$$a^* = \frac{0.1}{1 - 0.5} = 0.2 \text{ mg}.$$

由於 $|0.5| < 1$ ，每天與 0.2 的距離都減半。此平衡點是穩定的：附近的解會向它靠近。

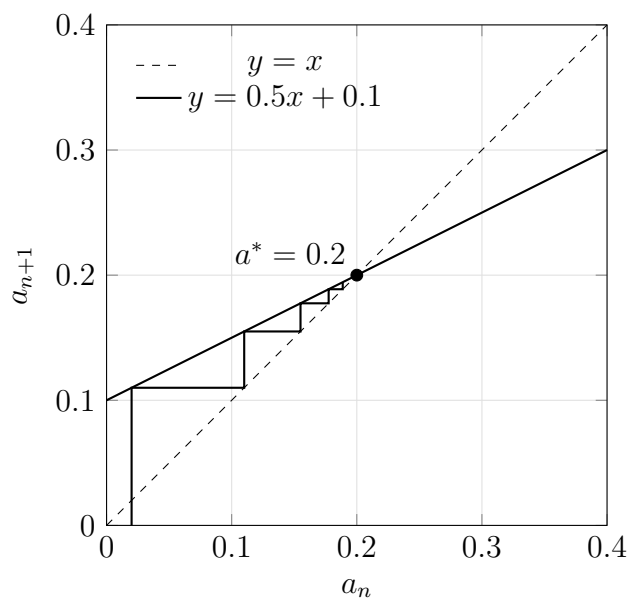


圖 4: 蛛網圖：迭代值趨近 $y = x$ 與 $y = 0.5x + 0.1$ 的交點。

例題 4：投資帳戶提款

某帳戶每月賺取 1% 利息，並於每月底支取 1000 元：

$$a_{n+1} = 1.01a_n - 1000.$$

其平衡值為

$$a^* = \frac{-1000}{1 - 1.01} = 100000.$$

由於 $1.01 > 1$ ，此平衡點是不穩定的。若初始值恰為 100000，結餘保持不變；高於此值時結餘增加，低於此值時結餘下降，直至模型最終預測負值。此時必須停止遞推，因為帳戶清空後不可能繼續提款。

檢查點：平衡與穩定性

對每個系統求平衡值，並判斷它是否穩定。

1. $x_{n+1} = 0.8x_n + 12$

$$2. y_{n+1} = 1.1y_n - 5$$

運用乘數解釋結論，而非只列出數值表。

5 增長放緩時：邏輯斯諦差分方程

指數增長假設相同的百分比增幅可以無限持續。可是在有限環境中，資源會日漸稀缺，增長通常會放緩。一個簡單的受約束模型是

$$p_{n+1} = p_n + k(M - p_n)p_n,$$

其中 M 是承載容量， k 控制增長速度。

變化量

$$\Delta p_n = k(M - p_n)p_n$$

包含兩個因子：

- p_n ：生物數量越多，可繁殖的新個體越多；
- $M - p_n$ ：接近上限時，剩餘容量變小。

例題 5：酵母培養

假設

$$p_{n+1} = p_n + 0.00082(665 - p_n)p_n, \quad p_0 = 9.6.$$

首幾個數值約為

$$9.6, 14.8, 22.6, 34.5, 52.4, 78.7, 116.6, \dots$$

增長先加速，隨後在數量接近 665 時放緩。這種 S 形模式是邏輯斯諦增長的特徵。

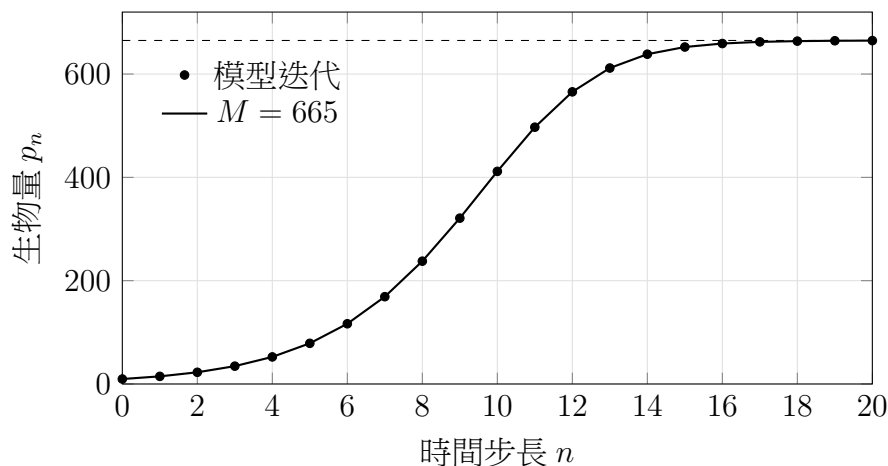


圖 5: 數量趨近承載容量，而非無限增長。

模型檢視：敏感度與解釋

改變 k 主要影響模型以多快速度趨近平衡；改變 M 則直接改變預測的長期水平。因此，相比 k 的中等誤差，最終數量的結論對 M 的不準確估計敏感得多。

優良的競賽報告應在情境中說明這一點，而非只列出百分比。

模型比較

[8 分鐘]

兩個小組為同一酵母數量建立模型。

$$\text{甲組：} p_{n+1} = 1.45p_n,$$

$$\text{乙組：} p_{n+1} = p_n + 0.00082(665 - p_n)p_n.$$

哪個模型較適合短期增長？哪個模型在長期較可信？每個答案各給出一項理由。

6 小型案例：離散 SIR 傳染病模型

最後這個案例預覽差分方程組。它旨在展示如何把上述概念結合於較大的建模問題，而非要求在第一課完整推導。

某宿舍共有 $N = 1000$ 名學生。在第 n 日：

- S_n 為易感染者人數；
- I_n 為現時感染者人數；
- R_n 為已移出傳播鏈的人數（康復或隔離）。

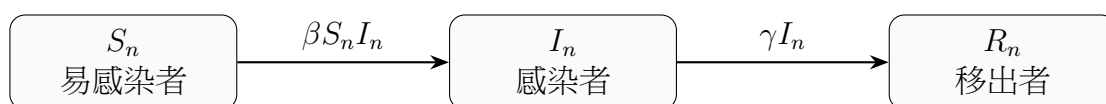


圖 6: SIR 模型中的分艙流動。

在封閉人口、均勻混合、不會再次感染及比率固定等簡化假設下，

$$S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n,$$

$$I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \gamma I_n,$$

$$R_{n+1} = R_n + \gamma I_n.$$

其中 β 是傳播參數， γ 是每日康復比例。當 $\beta = 0.0005$ 、 $\gamma = 0.1$ 且 $(S_0, I_0, R_0) = (999, 1, 0)$ 時，早期再生指標為

$$\mathcal{R}_0 \approx \frac{\beta S_0}{\gamma} = 4.995 > 1,$$

因此感染人數起初增加。

日	S_n	I_n	R_n
0	999.0	1.0	0.0
5	993.6	5.4	1.1
10	965.0	28.1	6.9
15	831.8	132.1	36.1
20	448.9	399.7	151.3
24	157.7	507.0	335.2
30	33.3	357.8	608.9

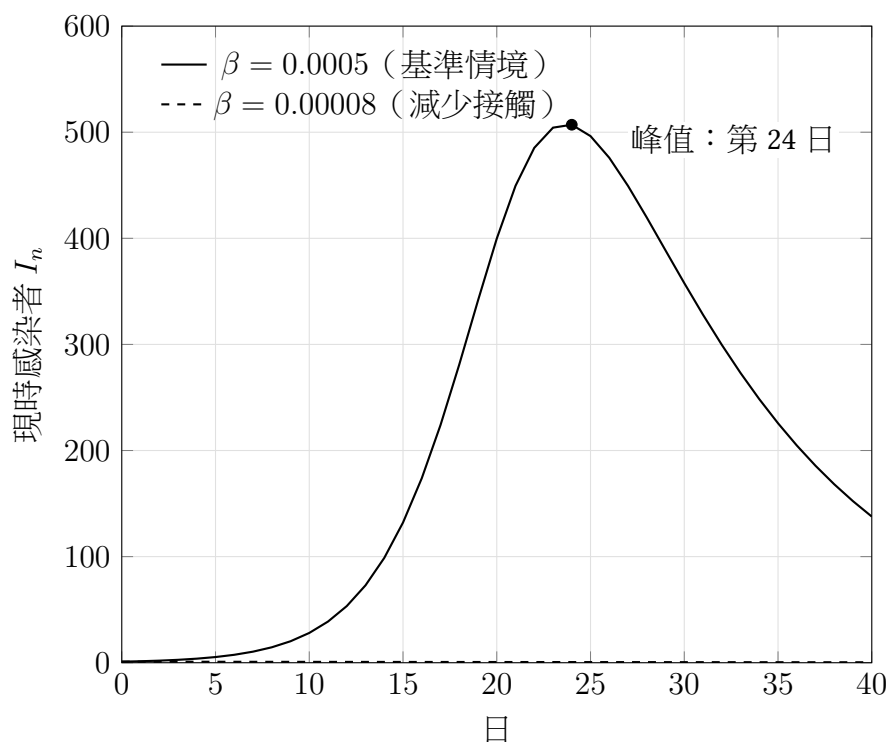


圖 7: 把傳播參數降至門檻以下，可阻止感染人數在初期增長。

競賽式表達

[10分鐘]

利用表格與圖像寫出三句結論：

1. 一句報告基準情境的峰值；
2. 一句描述介入措施的結果；
3. 一句陳述模型限制。

避免聲稱模型「證明」某件事必然發生。

7 課堂總結

應掌握的六個觀念

1. 模型為特定目的而建，且必然是簡化。
2. 參數的單位與解釋和代數運算同樣重要。
3. 對離散時間問題，從 下一個值 = 目前值 + 變化量 開始。
4. 在 $a_{n+1} = ra_n + b$ 中，乘數 r 決定平衡點附近的穩定性。
5. 非線性反饋可以令增長放緩，並產生承載容量。
6. 可信模型包括檢驗、敏感度分析及限制說明。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成句子：

「當_____時，數學模型是有用的；但當_____時，它可能失效。」

8 練習題

核心練習

- 某水箱裝有 800 L 水，每小時流失當時水量的 6%。
 - 寫出體積 V_n 的遞推式。
 - 求 V_5 並描述長期行為。
 - 說明模型最終可能變得不切實際的一項原因。
- 某社團有 120 名會員。每月有現有會員的 8% 退出，並有 15 名新會員加入。
 - 建立 $M_{n+1} = rM_n + b$ 。
 - 求平衡會員數。
 - 判斷平衡是否穩定並解釋原因。

- 某城鎮的回收計劃起初有 200 戶參與，其參與戶數按下式增長：

$$H_{n+1} = H_n + 0.002(1000 - H_n)H_n.$$

解釋 1000 的含義，以及模型為何在接近此值時放緩。

- 某數列滿足 $x_{n+1} = 1.15x_n - 30$ 、 $x_0 = 250$ 。
 - 求平衡值。
 - 計算首四項。
 - 若 x_n 代表金錢，情境是否需要停止規則？加以解釋。
- 以下數據記錄連續多輪宣傳後的下載次數：

80, 116, 169, 244, 351.

檢驗以固定乘數作近似是否合理。估計乘數並預測下一個數值，再評論預測的不確定性。

- 在傳染病模型中， β 只由三日數據估計。解釋為何必須對 β 作敏感度分析；答案須涉及決策，而非只談數學。

練習核對與提示

第 1–5 題可用以下結果核對：

- $V_{n+1} = 0.94V_n$ ， $V_5 \approx 587.12$ L；除非加入物理下限或改變流失機制，否則 $V_n \rightarrow 0$ 。
- $M_{n+1} = 0.92M_n + 15$ 的穩定平衡值為 $M^* = 187.5$ 。
- 數值 1000 是模型所表示的飽和水平。
- $x^* = 200$ ，且 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (257.5, 266.125, 276.044, 287.450)$ 。即使此初值令數列上升，金錢模型仍須設置定義域及停止規則。
- 相鄰下載數量的比率接近 1.45；若該模式延續，一項有理據的下一輪估計約為 508。

第 6 題的完整回應須把 β 的合理變化連繫至預測軌跡、介入時間或資源分配，並說明敏感度範圍。

建模挑戰

從以下情境選一項，撰寫一頁建模簡報，內容包括：目的、變量、假設、遞推式、預期行為、模型效度驗證計劃，以及一項限制。

1. 每天早上兩個共享單車站可用的單車數量。
2. 學校飯堂推行減廢計劃後，每日產生的廚餘量。
3. 新校園應用程式的用戶增長與飽和。

你毋須得出完美的數值答案；評核重點是形成問題及論證的質素。

A 選讀推導： $a_{n+1} = ra_n + b$ 的閉式

本附錄不屬於兩小時核心課堂內容，可供熟習代數推導的學生選讀。

當 $r \neq 1$ 時，令 $a^* = b/(1-r)$ ，並定義 $u_n = a_n - a^*$ 。則

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - a^* \\ &= ra_n + b - a^* \\ &= r(a_n - a^*) \\ &= ru_n. \end{aligned}$$

因此 $u_n = r^n u_0$ ，故

$$\boxed{a_n = a^* + r^n(a_0 - a^*)} = \boxed{\frac{b}{1-r} + r^n \left(a_0 - \frac{b}{1-r} \right)}.$$

此形式清楚呈現穩定性：當 $|r| < 1$ 時， $r^n(a_0 - a^*)$ 趨近零。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）
- 18.03SC 微分方程（MIT OpenCourseWare）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 2 講：建模過程與尺度律

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 把含糊的現實問題轉化為精確的建模目標；
2. 辨認變量、單位、假設及有用的子模型；
3. 區分正比關係與一般線性關係；
4. 透過變量變換檢驗 $y \propto f(x)$ 形式的關係；
5. 運用幾何相似推導面積、體積與重量的尺度律；
6. 從解釋、敏感度與限制三方面評估模型。

1 從含糊問題到建模目標

現實問題很少會以可立即求解的形式出現。建模者必須決定要預測甚麼、答案對誰有用，以及結論預期在哪些條件下成立。這個先收窄問題的步驟稱為形成問題。

引入活動：比例模型足夠嗎？

[10 分鐘]

某學校擬興建有遮蔭的戶外舞台。施工前，學生製作一個 1:20 的比例模型，並在燈下測試。二人一組討論：

1. 模型中的哪些測量可以直接按比例換算至實際舞台？
2. 哪些效應未必以同一方式縮放？
3. 模型可以支援甚麼決策？
4. 哪些證據能令你信任模型？

建模要點：模型可以保留某些關係，卻扭曲另一些關係。我們必須知道哪些量可以按比例改變，以及原因何在。

實用建模流程

對大多數競賽與課堂問題而言，以下六個問題比立即尋找公式更有用。

1. 目的：需要甚麼決策、解釋或預測？
2. 變量與單位：必須測量甚麼？使用甚麼單位？
3. 假設：哪些因素視為不變、忽略或理想化？
4. 結構：問題能否分拆為較小的子模型？
5. 證據：如何估計參數及檢查結果？

6. 表達：甚麼結論有充分理據？它可能在哪些情況失效？

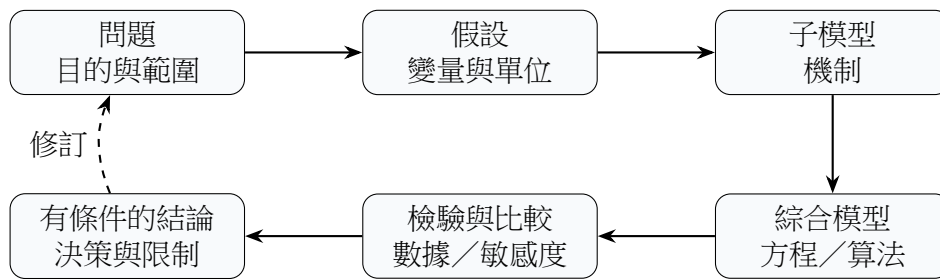


圖 1: 模型由一連串互相關連的決定發展而成，而非孤立地選取公式。

檢查點：可建模的問題

把含糊問題「這條道路有多安全？」改寫為較精確的建模問題。改寫後必須指出一個輸出量，以及答案適用的至少一項條件。

2 案例研究：車輛煞停距離

考慮問題：汽車安全停下來需要多少距離？一個實用的初步模型把過程分成兩個機制：

$$\text{總煞停距離} = \text{反應距離} + \text{制動距離}.$$

這是分解的例子：以較簡單子模型表示複雜系統，再把各子模型的輸出組合起來。

例題 1：建立煞停距離模型

設 v 為以米每秒計的初速度， t_r 為以秒計的駕駛者反應時間， a 為以米每二次方秒計的制動減速度大小。

反應子模型。假設汽車在反應時段內大致以固定速度行駛：

$$d_r = t_r v.$$

制動子模型。假設煞車啟動後減速度固定。由 $0 = v^2 - 2ad_b$ ，

$$d_b = \frac{v^2}{2a}.$$

綜合模型。

$$d(v) = t_r v + \frac{v^2}{2a}.$$

對基準駕駛者，取 $t_r = 1.2 \text{ s}$ ，乾燥路面的減速度為 $a = 6.5 \text{ m/s}^2$ ，

$$d(v) = 1.2v + 0.0769v^2.$$

在 50 km/h ($v = 13.89 \text{ m/s}$) 時，預測煞停距離約為 31.5 m ；在 100 km/h ($v = 27.78 \text{ m/s}$) 時，約為 92.7 m 。因此，速度加倍時所需距離接近三倍，而非只有兩倍。

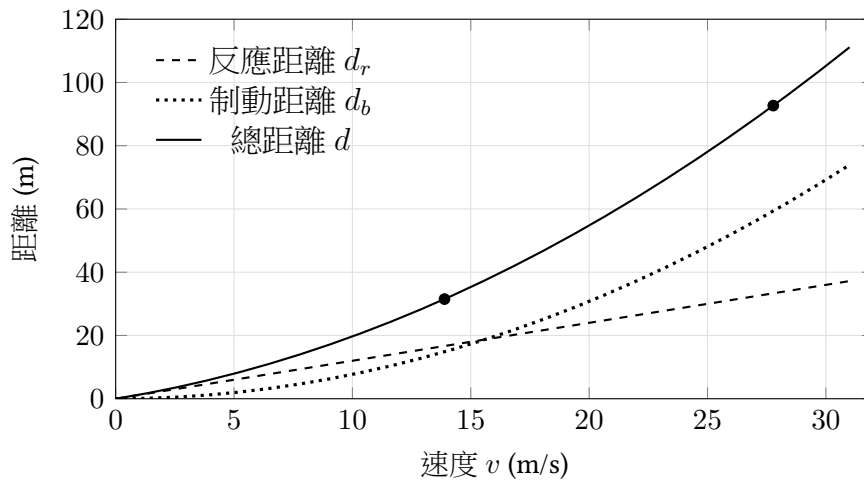


圖 2: 速度越高，二次制動項的影響越顯著。

檢查點：制動距離何時佔主導？

求制動距離首次等於反應距離時的正速度，並以 m/s 與 km/h 表示答案。這個門檻對高速駕駛有甚麼意義？

得到方程並不代表模型已完整。我們必須追問：當假設作合理改變時，結論是否仍然穩定？

例題 2：80 km/h 時的敏感度

在 80 km/h 時， $v = 22.22$ m/s。比較四種情境：

情境	t_r (s)	a (m/s ²)	預測距離 (m)
基準：駕駛者警覺、路面乾燥	1.2	6.5	64.7
反應較慢	1.8	6.5	78.0
路面濕滑	1.2	3.5	97.2
反應較慢且路面濕滑	1.8	3.5	110.5

在此速度下，結論對可用減速度的敏感程度高於反應時間的中等改變。這並非表示反應時間不重要，而是說路面與輪胎狀況在這項特定比較中佔主導。

模型檢視：模型忽略了甚麼？

模型假設地面水平、減速度固定、反應時段結束後立即全力制動，且行駛方向不變；亦把 t_r 與 a 視為已知常數。現實中，兩者會隨疲勞、分心、天氣、輪胎狀況、路面坡度與制動技術而變化。

因此，有理據的結論必須附帶條件：在所述反應時間與減速度假設下，所需煞停距離隨速度非線性增加。

改良模型

[8 分鐘]

從路面坡度、雨水、輪胎磨損或駕駛者疲勞中，選一項被忽略的因素。

1. 它會影響哪個參數或子模型？
2. 你會用新變量表示該因素，還是改變現有參數？
3. 估計此改變需要甚麼數據？

3 廣義正比與變量變換

正比模型不一定採用 $y = kx$ 的形式。更一般地，

$$y \propto f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = kf(x).$$

若此關係合理，以變換後的變量 $f(x)$ 為橫軸、 y 為縱軸作圖，應得到一條近似通過原點的直線。

線性不一定等於正比

關係 $y = mx + c$ 在學校代數中是線性的，但只有在 $c = 0$ 時才是正比。含起錶費的的士車資與距離呈線性關係，卻不成正比。

同樣地，以 x 為橫軸時， $y = kx^2$ 的圖像並非直線；然而 y 與 x^2 成正比，改以 x^2 為橫軸後便成為直線。

例題 3：開普勒第三定律

設 R 為行星以天文單位（AU）計的平均軌道半徑， T 為以地球年計的軌道週期。開普勒第三定律指出

$$T \propto R^{3/2}.$$

以地球為基準， $R = 1$ 且 $T = 1$ ，故比例常數約為 1：

$$T \approx R^{3/2}.$$

對木星而言， $R = 5.203$ AU，因此

$$T \approx 5.203^{3/2} \approx 11.87 \text{ 年},$$

與觀測值 11.86 年接近。

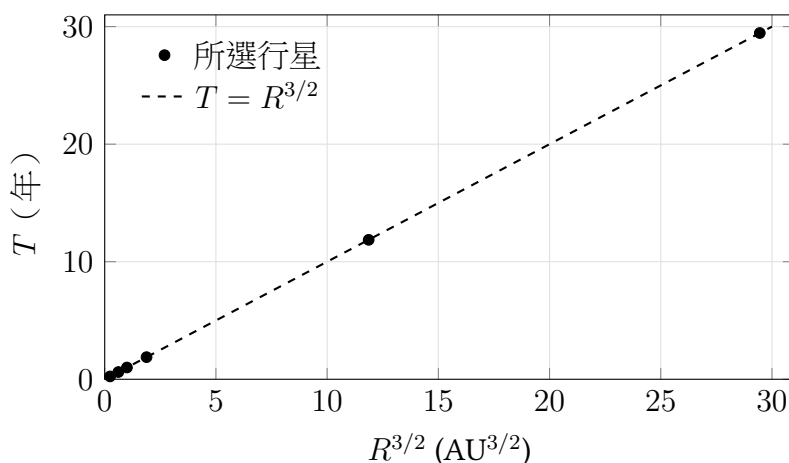


圖 3: 變換橫軸變量後，開普勒關係近似為正比。

檢查點：選擇合適的變換

對每項擬議關係，說明應在橫軸繪畫甚麼量，才可檢驗正比關係。

1. $F \propto v^2$
2. $P \propto 1/V$
3. $N \propto e^{rt}$ ，其中 r 已知

4 幾何相似與尺度律

若兩個物體形狀相同，且每組對應長度都乘以同一比例因子 λ ，則稱兩者幾何相似。
若所有長度都乘以 λ ，則每個面積乘以 λ^2 ，每個體積乘以 λ^3 ：

$$L \propto \lambda, \quad S \propto \lambda^2, \quad V \propto \lambda^3.$$

對材料與密度相同的物體，質量與重量亦按體積縮放：

$$W \propto V \propto L^3.$$

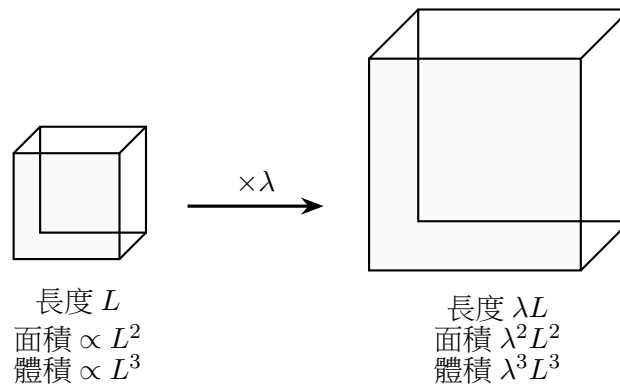


圖 4: 長度、面積與體積並非按同一速率縮放。

尺度換算表

[6分鐘]

在不使用公式表的情況下完成下表。

比例因子 λ	長度因子	面積因子	體積因子
2			
3			
$\frac{1}{2}$			

再解釋為何高度加倍的儲水箱，容量不只是原來的兩倍。

例題 4：潛艇比例模型

一艘長 7 m 的模型與長 70 m 的潛艇幾何相似，因此實物的比例因子為 $\lambda = 10$ 。

- 對應長度乘以 10。
- 表面積乘以 $10^2 = 100$ 。
- 假設密度相同，體積與質量乘以 $10^3 = 1000$ 。

若熱量損失主要與表面積成正比，在相若溫度條件下，實物的熱量損失約為模型的 100 倍，而非 1000 倍。若儲存容量與體積成正比，實物容量則約為 1000 倍。

模型檢視：相似是假設，而非觀測

對數學上相似的形狀，面積與體積定律是精確的；把它們應用於真實物體時，可信程度取決於相似假設。幼年動物與成年動物的比例未必相同；大型橋樑可能需要較厚的支撐；雨滴增大時也會改變形狀。

5 運用尺度模型改良模型

有用的模型往往分階段發展。我們先從最簡單而合理的關係開始，找出遺漏之處，再加以改良。

例題 5：估計魚的重量

假設要在沒有磅秤的情況下估計一條鱸魚的重量 W 。

模型一：只用長度。若所有魚都幾何相似且密度大致相同，則

$$W \propto L^3.$$

此模型方便，但兩條長度相同的魚，身體粗幼可以相差很大。

模型二：長度與圍度。把魚近似為一連串相似截面。截面面積按圍度 G 的平方縮放，因此

$$W \propto LG^2.$$

假設一條 $L = 40 \text{ cm}$ 、 $G = 25 \text{ cm}$ 的魚重 1.25 kg ，則

$$1.25 = k(40)(25)^2 \implies k = 0.00005 \text{ kg/cm}^3.$$

模型預測一條 $L = 50 \text{ cm}$ 、 $G = 30 \text{ cm}$ 的魚重量為

$$W = 0.00005(50)(30)^2 = 2.25 \text{ kg}.$$

第二個模型增加一項測量，以更直接地表示魚身狀況。

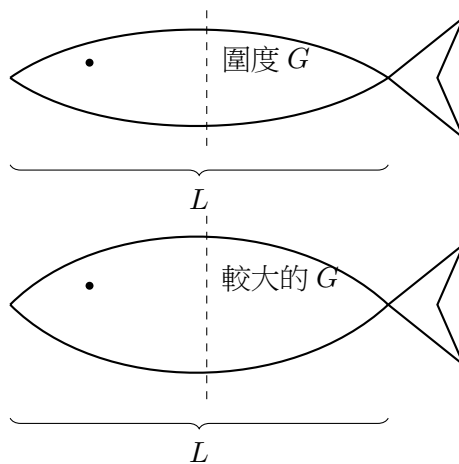


圖 5: 只用長度不能區分身體粗幼不同的魚。

模型檢視：改良後的模型解決了所有問題嗎？

模型 $W = kLG^2$ 仍假設魚的品種、密度與體形可比。圍度測量可能不一致，而只用一條魚校準，也無法估計預測誤差。改良提升了模型的相關性，卻同時增加一項測量及另一個不確定性來源。

檢查點：比較兩個模型

若魚的長度增加 10%，而圍度不變：

1. 模型一 $W \propto L^3$ 的預測增加百分之多少？
2. 模型二 $W \propto LG^2$ 的預測增加百分之多少？

3. 兩個模型為何得出不同結果？

6 最後一項尺度後果：力量與重量

即使未知數值常數，尺度律仍可揭示定性限制。假設幾何相似的動物由性質相若的物料構成。

- 肌肉力量大致與肌肉截面面積成正比：力量 $\propto L^2$ 。
- 體重與體積成正比： $W \propto L^3$ 。

因此

$$\frac{\text{力量}}{\text{重量}} \propto \frac{L^2}{L^3} = \frac{1}{L} \propto W^{-1/3}.$$

巨型螞蟻能保持相對力量嗎？

[10 分鐘]

把一隻螞蟻放大，使每項長度都變為 10 倍，而形狀與材料不變。

1. 肌肉截面面積增加多少倍？
2. 體重增加多少倍？
3. 每單位重量的力量改變多少倍？
4. 說明幾何相似假設可能不適用於真實巨型動物的一項原因。

尺度論證能做與不能做的事

尺度論證常可預測指數或定性趨勢，卻不能確定比例常數。它特別適合比較大小及辨認哪些效應增長得較快，但不能取代校準、模型效度驗證或對底層機制的認識。

選修延伸：相似物體的終端速度

假設幾何相似的下墜物體受到二次阻力。在終端速度下，重量與阻力平衡：

$$mg \propto Av_t^2.$$

密度固定時， $m \propto L^3$ ，迎風面積 $A \propto L^2$ ，因此

$$L^3 \propto L^2 v_t^2 \implies v_t \propto L^{1/2} \propto m^{1/6}.$$

指數很小，表示終端速度隨質量改變得相對緩慢。此結論取決於二次阻力、幾何相似及相若密度，並非適用於所有下墜物體的普遍定律。

7 課堂總結

應掌握的六個觀念

1. 必須把含糊問題收窄為目的、輸出及一組適用條件。
2. 複雜系統往往可由可解釋的子模型組成。
3. 以 $f(x)$ 為橫軸、 y 為縱軸時，正比關係 $y = kf(x)$ 會成為通過原點的直線。
4. 在幾何相似的物體中，長度、面積與體積分別按 λ 、 λ^2 與 λ^3 縮放。

5. 改良模型應針對具體弱點，而非只增加複雜程度。
6. 每項結論都應附帶假設、敏感度分析，以及模型可能失效之處。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成以下兩句：

1. 「今天煞停距離模型中最重要的假設是_____，因為_____。」
2. 「當每項長度都加倍時，_____比_____增長得快，因為_____。」

8 練習題

核心練習

1. 某駕駛者的反應時間為 1.4 s，能以 5.0 m/s^2 減速。
 - (a) 以 m/s 為速度 v 的單位，寫出煞停距離模型。
 - (b) 估計在 72 km/h 時所需距離。
 - (c) 指出一個不確定的參數，並解釋如何測量。
2. 送貨費為固定 25 元，另加每公里 4 元。
 - (a) 費用是否與距離成正比？加以解釋。
 - (b) 寫出線性模型，並解釋兩個常數。
3. 對每項關係，指出一個經變換的橫軸變量，使模型正確時圖像成為通過原點的直線：

$$y \propto x^3, \quad y \propto \sqrt{x}, \quad y \propto \frac{1}{x^2}.$$
4. X 行星的平均軌道半徑為 4 AU。利用 $T \approx R^{3/2}$ 估計其軌道週期。若觀測週期為 8.5 年，以觀測週期為分母計算絕對相對誤差，並提出差異的一個可能原因。
5. 重新設計一個立方體水箱，使每條邊增長 30%。
 - (a) 表面積變為多少倍？
 - (b) 容量變為多少倍？
 - (c) 哪個量的百分比增幅較大？
6. 某紀念碑的 1:25 模型使用 0.80 kg 材料。估計密度相同且幾何相似的實物所需材料，並說明此估計可能不適用於真實結構的原因。
7. 某魚類模型為 $W = kLG^2$ 。一條已測量的魚有 $L = 45 \text{ cm}$ 、 $G = 28 \text{ cm}$ 及 $W = 1.80 \text{ kg}$ 。
 - (a) 估計 k 。
 - (b) 預測一條 $L = 52 \text{ cm}$ 、 $G = 31 \text{ cm}$ 的魚的重量。
 - (c) 說明兩項預測不確定性來源。
8. 兩隻幾何相似動物的重量比為 8:1。
 - (a) 求其特徵長度之比。

- (b) 求其表面積之比。
- (c) 比較其表面積與體積之比。

練習核對與提示

1. $d(v) = 1.4v + v^2/10$ ；在 72 km/h 時， $v = 20$ m/s，故 $d = 68$ m。
2. 費用為 $25 + 4d$ 元；固定收費非零，故不成正比。
3. 應分別以 x^3 、 $\sqrt{x}$ 及 $1/x^2$ 作橫軸。
4. 模型給出 8 年；相對於 8.5 年，絕對相對誤差約為 5.9%。
5. 表面積乘以 $1.3^2 = 1.69$ ，容量乘以 $1.3^3 = 2.197$ 。
6. 體積縮放給出 $0.80(25^3) = 12500$ kg；實際結構設計與材料厚度未必按幾何相似縮放。
7. $k \approx 5.102 \times 10^{-5}$ kg/cm³，預測約為 2.55 kg；測量誤差與體形差異都是相關不確定性。
8. 長度比及面積比分別為 2:1 與 4:1；較小動物的表面積體積比為較大動物的兩倍。

建模挑戰

選擇一個問題，撰寫一頁建模簡報。

1. 若學生人數增加 50%，學校水箱的尺寸應如何改變？
2. 小型風洞模型能否預測實物車輛所受的空氣動力？
3. 如何利用不需磅秤的測量估計水果重量？

重點是模型的邏輯，不要求得出完整校準的數值答案。

一頁建模簡報規劃表

目的與輸出	模型將支援甚麼決策或預測？將報告甚麼量？
變量與單位	定義可測量的量，並區分輸入與輸出。
假設	說明哪些因素視為不變、忽略或幾何相似。
子模型 / 尺度律	提出至少兩項關係，並解釋各自為何合理。
校準	指出估計未知常數所需的數據。
模型效度驗證	解釋哪項觀測或比較可檢驗模型是否適合指定用途。
敏感度	指出一項應改變的假設或參數。
限制	說明結論不應用於哪些情況。

檢查點：提交前檢查

提交前，在簡報中給出主要結論的句子下劃線；圈出每個帶單位的數值；並在最強烈影響結果的假設旁加上星號。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）
- 《國際單位制指南》：量值、物理量與量綱（NIST）
- 行星資料表——相對地球數值（NASA NSSDCA）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 3 講：模型擬合與殘差分析

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 區分模型擬合與插值；
2. 計算並解釋殘差；
3. 以最小二乘法擬合正比模型與直線模型；
4. 利用變量變換，把簡單的指數或幕次關係線性化；
5. 利用圖像、殘差模式、誤差指標及留出數據比較擬合模型；
6. 說明為何數值上擬合良好的模型仍可能不適用。

1 從擬議關係到擬合模型

第 2 講利用物理推理提出以下關係：

$$d_b \propto v^2$$

用以描述制動距離與速度。這類陳述描述了模型的形式，卻尚未確定比例常數；真實觀測亦不大可能完全落在數學曲線上。因此，我們需要系統方法估計參數，並判斷擬議關係是否可信。

引入活動：三條直線、三個故事

[10 分鐘]

圖中有六個數據點，以及不同小組繪畫的三條候選擬合直線。

二人一組討論：

1. 「最佳擬合」可以有甚麼含義？
2. 正誤差應否與負誤差互相抵消？
3. 一個誤差很大的點，是否應比多個小誤差更重要？
4. 選擇直線前還需要甚麼資料？

建模要點：不能只憑外觀或單一數值選擇擬合模型；準則必須符合模型用途。

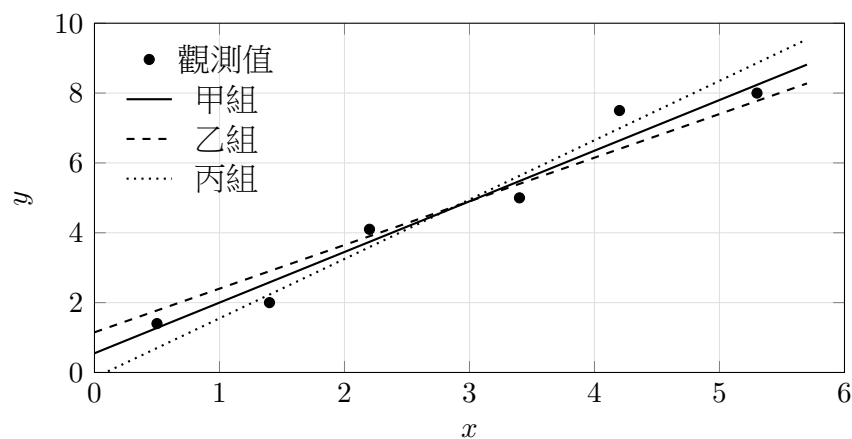


圖 1: 不同擬合準則可以偏好不同模型，因此必須說明擬合目的。

擬合、插值與預測

- 在模型擬合中，先由理論或先前推理提出模型族，再用數據估計參數；曲線毋須通過每個點。
- 在插值中，所建曲線通過指定數據點，通常用於估計點與點之間的數值；這是第 4 講的主題。
- 擬合模型可用於預測，但在觀測範圍外預測屬於外推，必須格外謹慎。

2 殘差與差異來源

假設 x_i 的觀測值為 y_i ，模型預測 $\hat{y}_i = f(x_i)$ 。殘差定義為

$$r_i = y_i - \hat{y}_i.$$

正殘差表示模型低估觀測值；負殘差表示模型高估觀測值。

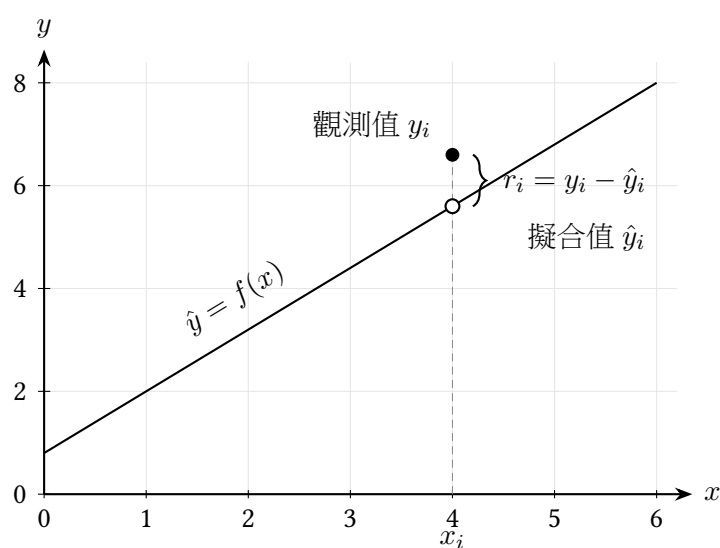


圖 2: 在 x_i 處，殘差是觀測值 y_i 與擬合值 $\hat{y}_i = f(x_i)$ 之間帶正負號的垂直差。

差異不一定源於擬合失敗

數據與模型的差異可以來自多種來源：

1. 測量誤差：精度有限、記錄錯誤或自然變異；
2. 建模誤差：遺漏變量或函數形式不合適；
3. 參數不確定性：現有數據不能精確確定參數；
4. 數值誤差：計算過程中的捨入或近似。

再精確的擬合算法，也不能補救不良模型結構或不可靠數據。

檢查點：正負號與單位

某模型預測煞停距離為 42.3 m，觀測距離則為 45.0 m。

1. 計算殘差。
2. 模型是高估還是低估？
3. 殘差的單位是甚麼？

3 擬合通過原點的正比模型

若理論指出

$$y = kx,$$

便不應自動擬合一般直線 $y = ax + b$ ，因為非零截距會與擬議機制矛盾。對數據 (x_i, y_i) ， k 的最小二乘估計使下式最小：

$$S(k) = \sum_{i=1}^m (y_i - kx_i)^2.$$

微分並令 $S'(k) = 0$ ，得到

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}.$$

例題 1：校準制動距離模型

第 2 講提出 $d_b = kv^2$ ，其中 v 是以 m/s 計的速度， d_b 是以 m 計的制動距離。令

$$X = v^2.$$

模型便成為 $d_b = kX$ ，即關於變換後變量 X 的正比關係。

v (m/s)	5	10	15	20	25	30
$X = v^2$	25	100	225	400	625	900
d_b (m)	2.0	7.6	17.9	30.1	49.2	68.5

利用最小二乘公式，

$$k = \frac{\sum X_i d_i}{\sum X_i^2} = \frac{109277.5}{1421875} \approx 0.07685.$$

因此

$$d_b \approx 0.07685v^2.$$

在減速度固定時， $d_b = v^2/(2a)$ ，故擬合係數對應於

$$a \approx \frac{1}{2(0.07685)} \approx 6.51 \text{ m/s}^2.$$

因此，擬合參數具有物理解釋，而非只是一個數值常數。

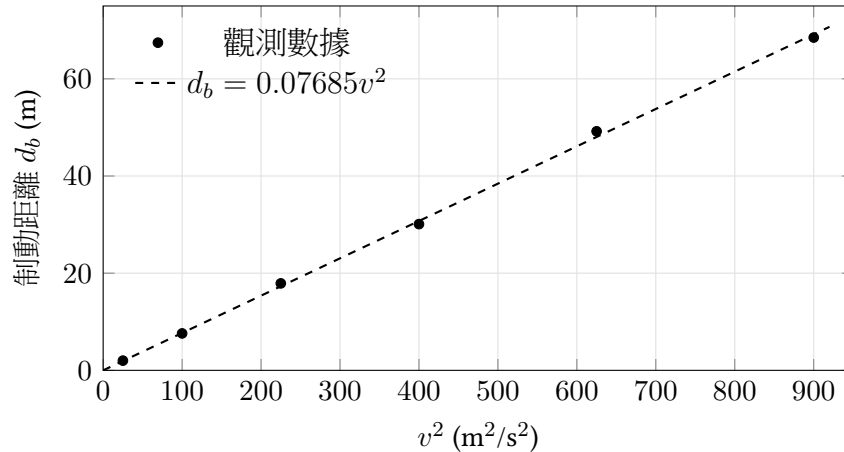


圖 3: 以 v^2 為橫軸繪畫 d_b ，可把擬議的二次關係化為通過原點的直線。

模型檢視：應否強制截距為零？

當 $v = 0$ 時，物理推理要求 $d_b = 0$ ，故強制直線通過原點有充分理據。在其他問題中，非零基線可能是真實的：儀器可以有偏移，送貨費亦可包含固定收費。擬合約束必須源於情境，而非只為方便。

殘差檢查

[8 分鐘]

當 $v = 25 \text{ m/s}$ 時，擬合模型預測

$$\hat{d}_b = 0.07685(25)^2 \approx 48.03 \text{ m}.$$

觀測值為 49.2 m 。

1. 計算殘差。
2. 說明模型低估還是高估。
3. 提出差異的一項物理原因。

4 擬合一般直線

當非零截距合理時，擬合

$$y = ax + b.$$

最小二乘直線使下式最小：

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)^2.$$

解的一個方便形式是

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

例題 2：校準力感測器

把以 kg 計的已知質量 x 放在感測器上，產生輸出電壓 y 。

x (kg)	0	1	2	3	4	5
y (V)	0.18	1.72	3.19	4.76	6.25	7.81

此處 $\bar{x} = 2.5$ 、 $\bar{y} = 3.985$ ，

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 26.655, \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 17.5.$$

因此

$$a \approx 1.523, \quad b \approx 0.177,$$

校準模型為

$$y \approx 1.523x + 0.177.$$

截距有實際意義：感測器空載時讀數約為 0.18 V，而非零。強制模型通過原點會掩蓋此偏移。

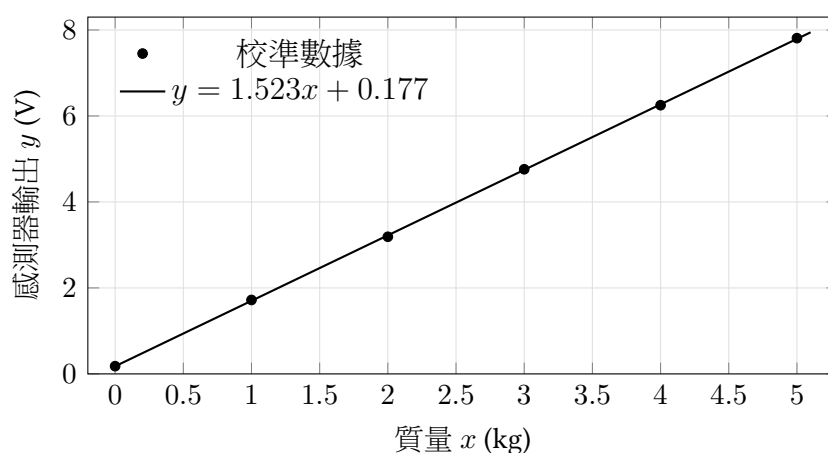


圖 4: 擬合截距表示感測器偏移；參數應按原情境解釋。

為何使用平方？

最小二乘法使下式最小：

$$\text{SSE} = \sum r_i^2,$$

即誤差平方和。平方可防止正、負殘差互相抵消，亦會更強烈懲罰大殘差。這令方法在數學上方便，卻也對離群值敏感。

5 誤差指標與殘差圖

沒有單一誤差指標能回答所有問題。三種常用摘要為

$$\text{MAE} = \frac{1}{m} \sum |r_i|, \quad \text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum r_i^2}, \quad \max |r_i|.$$

平均絕對誤差容易解釋；均方根誤差對大誤差懲罰更強；最大誤差則聚焦最壞情況。三者的單位都與響應變量相同。

對制動距離擬合，

$$\text{MAE} \approx 0.54 \text{ m}, \quad \text{RMSE} \approx 0.66 \text{ m}, \quad \max |r_i| \approx 1.17 \text{ m}.$$

這些數值只描述已觀測的校準範圍，不能證明模型在更高速度或不同道路上仍然準確。

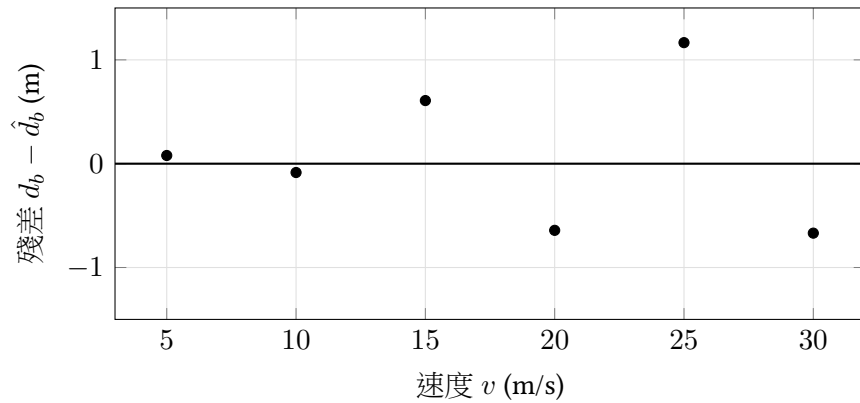


圖 5: 應檢查殘差有否系統性模式，而非只把它們平均為一項統計量。

檢查點：閱讀殘差圖

假設殘差在低 x 時為正、中段為負、高 x 時再次為正。

1. 散佈是否隨機？
2. 彎曲模式對擬合直線有何啟示？
3. 記錄更多小數位能否解決主要問題？

6 把指數模型線性化

某些模型族經變換後會成為線性。對指數衰減模型

$$C = Ae^{-kt},$$

取自然對數可得

$$\ln C = \ln A - kt.$$

因此，以 t 為橫軸、 $\ln C$ 為縱軸的圖像應近似線性，斜率為 $-k$ ，截距為 $\ln A$ 。

例題 3：電池容量衰減

在相同負載下重複測試一枚電池，並把容量 C 記錄為初始值的百分比。

循環區段 t	0	1	2	3	4	5
容量 C (%)	100	82	68	55	46	37

對 $(t, \ln C)$ 擬合所得最小二乘直線約為

$$\ln C = 4.607 - 0.19765t.$$

取指數後得到

$$C \approx 100.2e^{-0.19765t}.$$

擬合模型預測每個循環區段後，容量乘以

$$e^{-0.19765} \approx 0.821$$

即每個區段平均減少當時剩餘容量的約 17.9%。

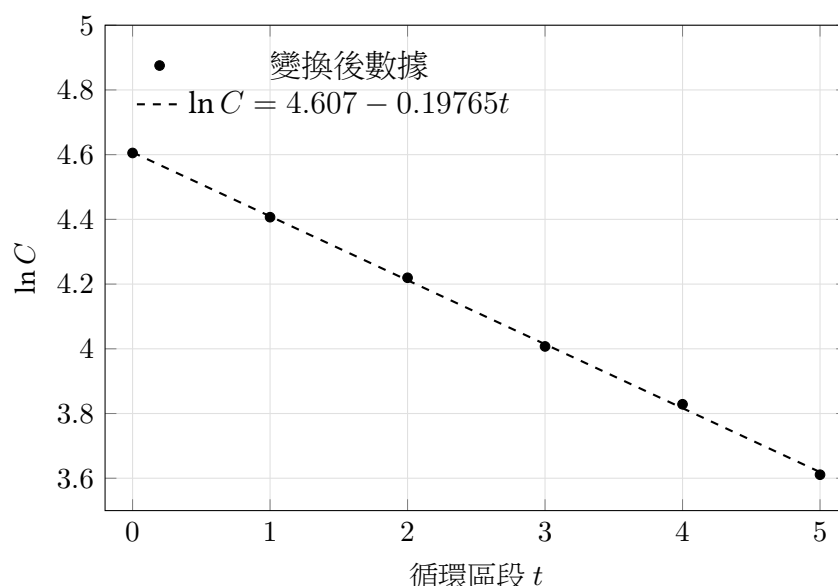


圖 6: 線性化使參數估計更方便，但仍須在原容量尺度上檢查所得模型。

模型檢視：變換會改變擬合準則

在 $\ln C$ 上使用最小二乘法，是把對數之間的平方差而非容量之間的平方差最小化，因而相對重視較小的數值。因此：

1. 只在模型形式與數據容許時才作變換；
2. 把擬合模型轉回原變量；
3. 在原尺度上計算殘差與誤差指標；
4. 使用同一響應變量比較候選模型。

選擇變換

[7分鐘]

說明應繪畫哪些變量，才能檢驗每個擬議模型。

1. $y = Ae^{bx}$
2. $y = Ax^n$
3. $y = A/x$

對每種情況，指出哪個斜率或截距具有參數解釋。

7 選擇模型：擬合、結構與模型效度驗證

不能只因某模型的校準誤差最小便選擇它。我們還要判斷它是否符合機制、殘差是否呈現結構，以及能否預測未用於擬合參數的數據。

例題 4：線性還是指數衰減？

利用 $t = 0$ 至 $t = 5$ 的六個電池觀測值：

- 指數擬合為 $C \approx 100.2e^{-0.19765t}$ ，校準 RMSE 約為 0.39 個百分點；
- 最小二乘直線為 $C \approx 95.81 - 12.46t$ ，校準 RMSE 約為 2.93 個百分點。

擬合時留起 $t = 6$ 的數值 $C = 30.5\%$ ，用作模型效度驗證。

$$\hat{C}_{\text{exp}}(6) \approx 30.61, \quad \hat{C}_{\text{lin}}(6) \approx 21.07.$$

指數模型在留出點的表現好得多，亦不會預測負容量。在此範圍內，數值證據與機制都支持指數衰減。

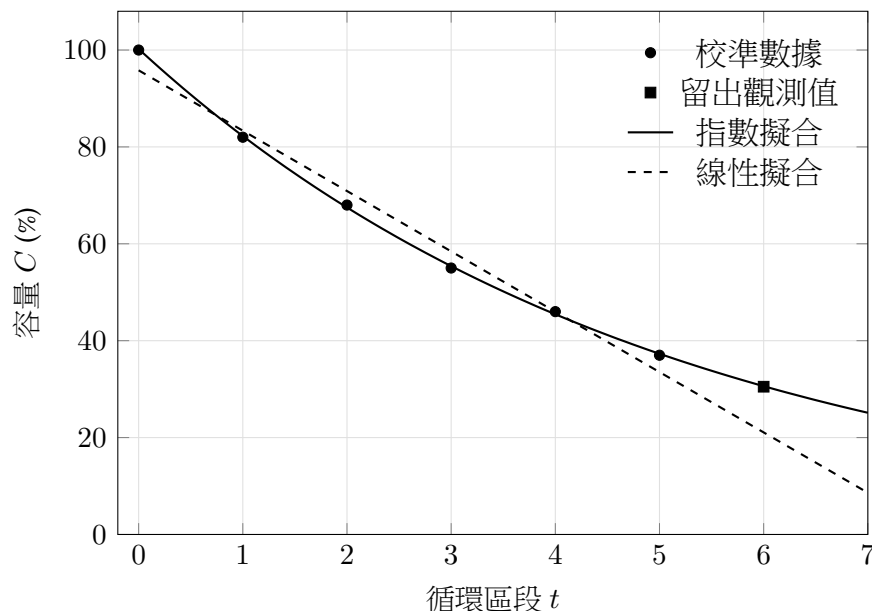


圖 7: 校準誤差、模型效度驗證表現與長期合理性都支持指數模型。

實用模型選擇檢核表

接受擬合模型前，應追問：

1. 機制：函數形式是否符合假設或支配關係？
2. 尺度：是否在原響應變量上評估誤差？
3. 殘差：殘差是否細小且沒有系統性模式？
4. 模型效度驗證：模型能否預測未用於擬合的觀測？
5. 範圍：預定預測位於觀測範圍內還是範圍外？
6. 可解釋性：參數與結論在情境中是否合理？

競賽式表達

[10分鐘]

為電池例子撰寫一段四句的模型選擇說明：

1. 指出所比較的兩個模型；
 2. 報告一項校準指標；
 3. 解釋留出數據的結果；
 4. 陳述結論的一項限制或條件。
- 避免聲稱高質素擬合「證明」模型正確。

選修延伸：現代模型審核：測量不確定性與可識別性

殘差細小不代表每個擬合參數都已充分確定。若 x_i 含測量誤差，卻被視為精確值，普通最小二乘斜率可能產生偏差；此時殘差混合了響應雜訊、輸入不確定性、模型形式誤差與參數不確定性。應記錄儀器分辨率與重複測量的變異，再把合理擾動傳播至擬合結果。

對模型 $f(x; \theta)$ ，只有當現有觀測能區分各參數的效應時，參數才具實際可識別性。一項實用局部診斷是敏感度矩陣

$$J_{ij} = \frac{\partial f(x_i; \theta)}{\partial \theta_j}.$$

若 J 的兩欄近乎成比例，不同參數組合便會產生幾乎相同的擬合曲線。增加小數位或降低訓練誤差都不能消除這種含糊性。應報告參數區間或剖面、在已述測量不確定性下測試擬合，並在相互競爭的參數效應差異最大之處收集觀測。即使個別參數不可識別，預測仍可能穩定，因此須分開審核參數主張與預測主張。

8 課堂總結

應掌握的七個觀念

1. 模型擬合在擬議模型族內估計參數；插值是另一項任務。
2. 殘差等於觀測值減預測值，單位與響應變量相同。
3. 通過原點或容許截距等擬合約束，必須由情境支持。
4. 最小二乘法把殘差平方和最小化，因而對大誤差與離群值敏感。
5. 殘差圖可揭示單一誤差統計量掩蓋的系統性結構。
6. 變換可簡化擬合，卻會改變誤差準則；必須返回原變量檢查。
7. 可信模型結合機制、校準、模型效度驗證、解釋及已陳述限制。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成以下兩句：

1. 「RMSE 細小仍不足以接受模型，因為_____。」
2. 「只有當_____時，我才會強制擬合直線通過原點。」

9 練習題

核心練習

1. 某模型預測用水需求為 82、91 及 106 L，相應觀測值為 85、88 及 110 L。
 - (a) 計算三個殘差。
 - (b) 求 MAE 與 RMSE。
 - (c) 哪個觀測對 SSE 的貢獻最大？
2. 以下數據描述彈簧的力 F 與伸長量 x ：

x (cm)	1	2	3	4	5
F (N)	1.9	4.2	6.0	8.1	10.3

以最小二乘法擬合 $F = kx$ 。解釋 k 的單位，並計算 $x = 4 \text{ cm}$ 時的殘差。

3. 某溫度感測器給出以下讀數：

x (實際°C)	0	10	20	30	40
y (感測器°C)	1.2	10.8	20.5	30.6	40.1

解釋為何應容許截距。利用試算表或計算機擬合直線，並解釋兩個參數。

4. 說明每個模型所需的變換，並解釋變換後呈直線可支持甚麼：

- (a) $y = Ae^{bx}$;
 (b) $y = Ax^n$;
 (c) $y = A/(B + x)$.

5. 兩個模型有以下以分鐘計的殘差：

$$A : (-1.0, -0.8, 0.2, 0.4, 1.2), \quad B : (-0.2, -0.1, 0.0, 0.1, 3.0).$$

計算並比較兩者的 MAE、RMSE 與最大誤差。MAE、RMSE 及避免嚴重最壞情況各自偏好哪個模型？解釋此處為何必須先說明損失量度，才可談「平均表現」。

6. 某擬合二次曲線的殘差在零附近隨機正負交替，而擬合直線的殘差呈明顯 U 形。解釋這有何啟示。為何單憑「二次曲線有較多參數」不足以結論？
7. 某人口模型用 2018–2024 年數據擬合，再用於預測 2045 年。解釋為何訓練 RMSE 細小不能證明 2045 年預測可信，並提出兩項額外檢查。

練習核對與提示

- 殘差為 $(3, -3, 4) \text{ L}$ ； $\text{MAE} = 3.33 \text{ L}$ ， $\text{RMSE} \approx 3.37 \text{ L}$ ，而第三項觀測對 SSE 的貢獻最大。
- $k = 2.04 \text{ N/cm}$ ；在 $x = 4 \text{ cm}$ 時，殘差為 $8.1 - 8.16 = -0.06 \text{ N}$ 。
- 容許截距的擬合為 $y \approx 0.976x + 1.12$ ；截距表示零負載偏移。
- 應分別使用 $(x, \ln y)$ 、 $(\ln x, \ln y)$ 及 $(x, 1/y)$ ；直線關係支持相應模型族，但不能單獨完成模型效度驗證。
- 對 A ， $\text{MAE} = 0.72$ 、 $\text{RMSE} \approx 0.81$ 、最大誤差 $= 1.2$ ；對 B ，三者分別為 0.68 、 1.35 及 3.0 。故 MAE 偏好 B ，RMSE 與最壞情況控制則偏好 A 。
- 直線的 U 形殘差顯示遺漏曲率；接受二次曲線前，須比較留出資料表現及殘差結構。
- 可信的長期預測檢查包括時間留出測試，並至少加入機制審視、情境敏感度或替代模型族比較其中一項。

建模挑戰

選擇一組小組可收集或取得的數據：冷卻溫度、輪候時間、植物生長、裝置電池衰減、交通行程時間，或其他獲准情境。

撰寫一頁擬合簡報，內容包括：

- 問題、變量、單位與擬議模型族；
- 容許或排除截距的理由；
- 擬合參數值，以及一幅以原變量繪畫的圖；

4. 殘差圖及至少兩項誤差指標；
 5. 一項模型效度驗證策略及一項限制；
 6. 為非專業決策者撰寫的簡短結論。
- 目標並非透過增加項數取得盡可能低的誤差，而是建立有理據的模型。

A 選讀推導：最小二乘直線

本附錄不屬於兩小時核心課堂內容，可供熟習偏微分的學生選讀。

對 $y = ax + b$ ，把下式最小化：

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)^2.$$

令兩個偏導數皆等於零，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum x_i (y_i - ax_i - b) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum (y_i - ax_i - b) = 0.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}a \sum x_i^2 + b \sum x_i &= \sum x_i y_i, \\ a \sum x_i + mb &= \sum y_i.\end{aligned}$$

這些是正規方程。求解它們等同於使用課堂中的中心化平均公式。

B 選讀延伸：最小二乘法的替代準則

最小二乘法並非唯一有理據的擬合準則。

- L^1 準則把 $\sum |r_i|$ 最小化，對單一大型離群值較不敏感。
- L^∞ 或極小化極大準則把 $\max |r_i|$ 最小化，適用於最壞誤差最重要的情況。

合適準則取決於決策。醫療安全模型、預測模型與工程校準問題，未必以相同方式衡量誤差。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《工程統計手冊》（NIST / SEMATECH）
- 《基礎統計學》第二版（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 4 講：經驗模型、插值與樣條

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 區分插值、平滑與外推；
2. 建立並解釋兩個觀測值之間的線性插值式；
3. 以拉格朗日形式建立二次插值多項式；
4. 利用差分表辨認簡單多項式結構；
5. 解釋為何精確的高次插值式在數據點之間可能表現欠佳；
6. 比較分段線性插值與自然三次樣條，並選擇合適的經驗方法。

1 先有數據、後有公式

第 3 講先提出模型族，再由數據估計參數。然而，在許多實際情況中，我們尚未掌握可信機制，可能只有若干時間或位置的測量，並需要估計它們之間的合理數值。這便引出經驗模型：主要由觀測數據建立的數學表述。

引入活動：曲線應否通過每個點？

[10 分鐘]

課室感測器每五分鐘記錄一次二氧化碳濃度：

時間 (min)	0	5	10	15	20
CO ₂ (ppm)	612	648	701	694	760

二人一組討論：

1. 你會如何估計第 12 分鐘的濃度？
2. 估計曲線應否通過每個記錄值？
3. 在這裏，測量雜訊與完全吻合觀測值，哪一項較重要？
4. 用同一方法預測第 60 分鐘是否有充分理據？

建模要點：模型用途與數據可靠性決定精確插值是否可取。

插值、平滑與外推

- 插值建立與指定數據值相符的函數，用以估計觀測範圍內的數值。
- 平滑容許與含雜訊數據有少量偏差，以揭示底層趨勢。
- 外推預測觀測範圍外的數值，依賴單憑數據無法核證的假設。

若觀測含雜訊，或曲線在觀測值之間的行為不合理，插值式即使在數學上精確，在科學上仍

可能不可信。

模型檢視：完全吻合不等於可信

若溫度計只能準確至最接近的整數度，強制複雜曲線通過每個報告值，可能是在模擬捨入雜訊而非溫度。反之，若數據是電腦圖形中的精確幾何坐標，通過每個點可能不可或缺。方法必須由數據生成過程指導。

2 線性插值與分段線性模型

假設兩個可信觀測值為 (x_0, y_0) 與 (x_1, y_1) ，且 $x_0 < x_1$ 。對兩者之間的點 x ，定義相對位置

$$\lambda = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

線性插值式為

$$L(x) = (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

此公式是加權平均： x 越接近 x_0 ， y_0 的權重越大。

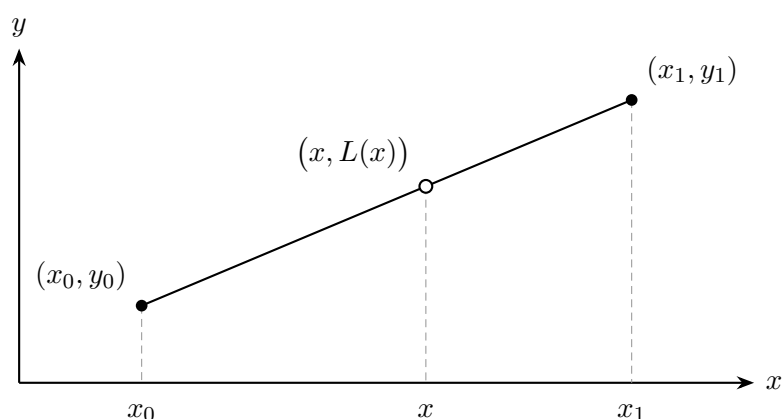


圖 1: 插值點位於連接兩個觀測值的線段上；其橫向位置決定 y_0 與 y_1 的權重。

例題 1：估計兩次讀數之間的溫度

某加熱實驗在 $t = 4$ 分鐘時記錄 38.0°C ，在 $t = 10$ 分鐘時記錄 62.0°C 。估計 $t = 7.5$ 分鐘時的溫度。

相對位置為

$$\lambda = \frac{7.5 - 4}{10 - 4} = \frac{3.5}{6}.$$

因此

$$T(7.5) = 38.0 + \frac{3.5}{6}(62.0 - 38.0) = 38.0 + 14.0 = \boxed{52.0^\circ\text{C}}.$$

此估計假設溫度在這六分鐘內以近似固定速率改變，並非聲稱整個加熱過程都是線性的。

有多個觀測值時，可用線段連接每組相鄰點。所得分段線性插值式連續且易於計算，但斜率會在數據點突然改變。

引導練習：建立分段模型

[10分鐘]

某圖書館記錄已佔用座位數：

$$(0, 20), \quad (2, 44), \quad (5, 68),$$

其中 x 為開館後的小時數。

1. 寫出 $0 \leq x \leq 2$ 上的線性公式。
2. 寫出 $2 \leq x \leq 5$ 上的線性公式。
3. 估計 $x = 1.5$ 與 $x = 3.5$ 時的佔用數。
4. 比較兩段斜率。斜率改變在情境中代表甚麼？

檢查點：插值還是外推？

對 $t = 4$ 與 $t = 10$ 分鐘的溫度觀測，把每項要求分類：

1. 估計 $T(8)$ ；
2. 估計 $T(15)$ ；
3. 估計一小時後的最高溫度。

解釋為何只有一項要求可單憑線性插值回答。

3 通過三點的二次插值

兩點確定一條直線；三個 x 坐標互異的點確定唯一一個次數不超過二的多項式。拉格朗日形式可直接建立此多項式。

對三點 (x_0, y_0) 、 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) ，

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x),$$

其中

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

每個基多項式均滿足 $L_i(x_i) = 1$ ，並在另外兩個節點取零。

例題 2：二次插值式

建立通過下列三點的多項式：

$$(0, 1), \quad (1, 3), \quad (2, 2).$$

基函數為

$$L_0(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{2}, \quad L_1(x) = -x(x - 2), \quad L_2(x) = \frac{x(x - 1)}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x) \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1. \end{aligned}$$

當 $x = 1.5$ 時，

$$P_2(1.5) = \boxed{2.875}.$$

代入可運算核證 $P_2(0) = 1$ 、 $P_2(1) = 3$ 與 $P_2(2) = 2$ 完全成立。

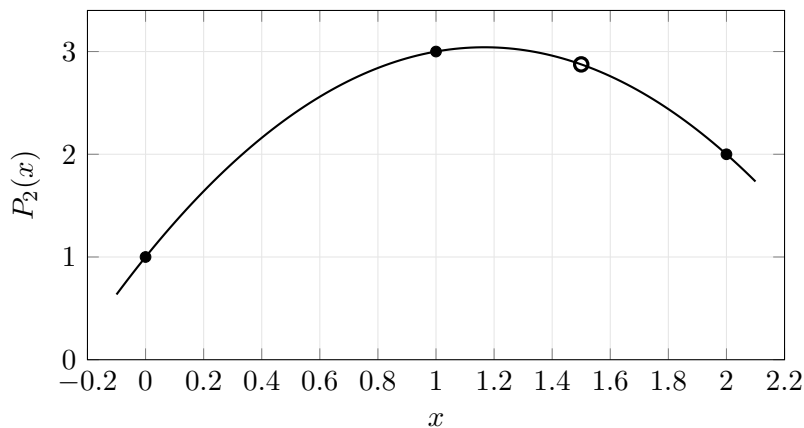


圖 2: 實線曲線為 $P_2(x) = -1.5x^2 + 3.5x + 1$ 。實心點是插值節點；空心點是 $x = 1.5$ 時的估計。

模型檢視：點與點之間的曲線代表甚麼？

插值條件唯一確定二次曲線，卻不能證明真實過程為二次。不同物理機制可以產生相同三個測量，卻在其間取不同數值。插值提供方便曲線；科學解釋仍須依據情境。

4 以差分表作診斷

對等距的 x 值，逐階差分可揭示低次多項式結構：

- 一階差分固定，提示線性模型；
- 二階差分固定，提示二次模型；
- 三階差分固定，提示三次模型。

對完全符合多項式的數據，此結果精確成立；對含雜訊觀測，則只近似成立。

例題 3：辨認二次模式

考慮

x	0	1	2	3	4
y	2	5	10	17	26

差分表為

y	2	5	10	17	26
Δy		3	5	7	9
$\Delta^2 y$			2	2	2

二階差分固定，故數據落在二次曲線上。當間距為一，首項係數是固定二階差分的一半，故

$a = 1$ 。寫成

$$y = x^2 + bx + c$$

再利用 $y(0) = 2$ 與 $y(1) = 5$ ，得 $c = 2$ 及 $b = 2$ 。因此

$$y = x^2 + 2x + 2.$$

差分表能做與不能做的事

差分表是診斷工具，而非真理證書。對測量數據，高階差分往往會放大雜訊。此方法最適合從準確且等距的數據辨認簡單模式。對不等距節點，應使用均差；附錄 A 提供選讀介紹。

模式還是雜訊？

[8 分鐘]

對每個數列計算足夠階數的差分，以提出簡單模型。

1. 4, 9, 16, 25, 36

2. 3.0, 6.1, 11.9, 21.2, 34.0

對第二個數列，解釋為何「近似二次」比「完全二次」更有理據。

5 高次多項式為何可能失效

給定 $n + 1$ 個相異點，存在唯一一個次數不超過 n 且通過所有點的多項式。此定理只保證存在性，並不保證良好行為。次數增加時，全域多項式可在節點之間劇烈振盪，尤其接近端點之處。

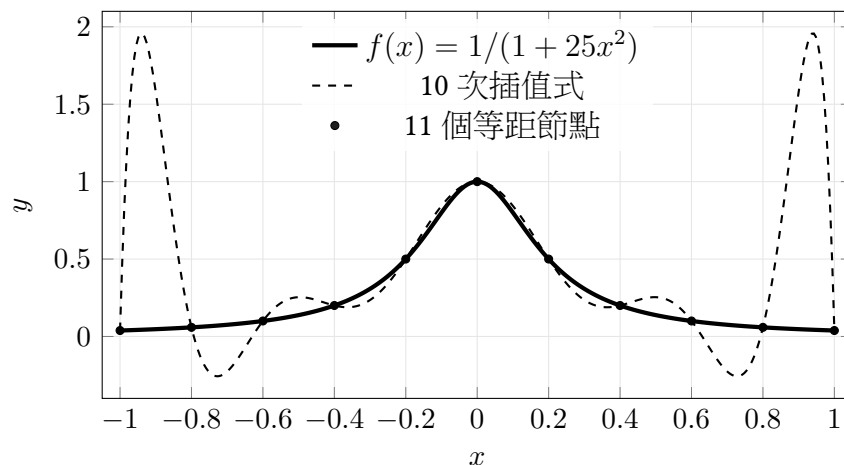


圖 3: 多項式吻合每個節點，卻在節點之間嚴重振盪；這稱為龍格現象。

模型檢視：零殘差陷阱

在插值節點上，每個殘差都是零。因此，只在這些節點計算的 SSE、MAE 與 RMSE 亦為零，即使曲線在節點之間表現欠佳。評估模型必須考慮觀測之間的行為、對數據擾動的敏感度，以及曲線的預定用途。

可行補救方法包括：減少自由度、平滑含雜訊數據、選擇分佈較佳的節點，或以分段低次多項式取代單一全域多項式。

6 分段插值與三次樣條

樣條在每對相鄰節點之間使用不同多項式。線性樣條以直線段連接各點；三次樣條使用三次多項式片段，並施加平滑連接條件。

對三次樣條 S ：

1. S 通過每個數據點；
2. 相鄰片段在每個內部節點取相同值；
3. 一階導數相同，因此沒有尖角；
4. 二階導數相同，因此曲率平滑改變。

自然三次樣條另在兩個端點滿足 $S'' = 0$ 。

例題 4：通過三點的自然樣條

建立通過下列三點的自然三次樣條：

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (2, 0).$$

令 $M_i = S''(x_i)$ 。自然端點條件給出 $M_0 = M_2 = 0$ 。當等距 $h = 1$ 時，唯一的內部樣條方程為

$$M_0 + 4M_1 + M_2 = 6(y_2 - 2y_1 + y_0) = -12,$$

故 $M_1 = -3$ 。所得樣條為

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

在 $x = 0.5$ 時，樣條給出 $S(0.5) = 0.6875$ ，線性插值則給出 0.5。兩者都不會自動成為「正確」答案；較平滑的三次估計隱含對斜率變化更強的假設。

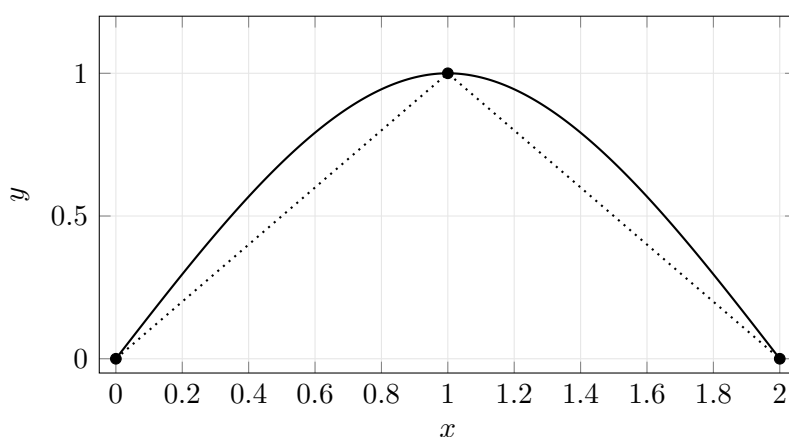


圖 4：點線為線性樣條，實線曲線為自然三次樣條，實心點為節點。兩者插值同一組數據，但只有三次樣條在 $x = 1$ 處的斜率與曲率連續。

7 選擇經驗方法

方法	優點	主要注意事項
線性插值	透明、局部、易於計算	節點有尖角；假設每段速率固定
二次或低次插值	以少量點捕捉曲率	小型數據集不能證明多項式機制
高次全域多項式	通過每個點	振盪、敏感且外推表現差
低次平滑模型	處理含雜訊數據並揭示趨勢	不會完全重現每個觀測
三次樣條	局部、平滑，在多個可信點之間準確	可能過衝；邊界條件很重要

檢查點：哪項性質最重要？

在勘測點測量道路剖面，用以估計車輛運動。你會選擇線性樣條還是三次樣條？說明所選方法的一項優點與一項風險。

模型檢視：三次樣條不會自動保持形狀

三次樣條平滑且通常穩定，但可能在數據點之間過衝，甚至在建模量必須非負時產生負值。對單調或有界數據，專門保持形狀的樣條可能更合適。

方法選擇工作坊

[12分鐘]

為每種情況選擇合適方法，並用一至兩句話論證。

1. 以精確坐標定義製成部件的邊緣。
 2. 每日需求數據含大量隨機變異，目標是揭示每週趨勢。
 3. 溫度感測器在兩個可靠讀數之間失靈兩分鐘。
 4. 十個可信測量描述平滑的道路高程剖面。
 5. 小組希望用五年數據預測其後十年。
- 對最後一種情況，解釋為何任何插值方法單獨使用都不足夠。

實用經驗建模流程

1. 釐清任務是插值、平滑還是外推。
2. 繪畫原始數據，檢查單位、次序、缺失值與離群值。
3. 決定應把觀測視為精確還是含雜訊。
4. 從符合目的的最簡單局部方法開始。
5. 檢查點與點之間的曲線，而非只檢查觀測點。
6. 測試移除或擾動一個數據點時的敏感度。
7. 明確陳述有效區間與任何形狀約束。

8 課堂總結

應掌握的六個觀念

1. 插值估計數據範圍內的數值；外推需要額外假設。
2. 線性插值是兩個觀測值的加權平均。
3. 三個相異節點確定唯一二次曲線，卻未必確定真實機制。
4. 差分表可從等距數據揭示簡單多項式模式。
5. 插值節點上的零殘差不能保證節點之間表現良好。
6. 樣條以平滑、局部、低次片段取代一個不穩定的高次多項式。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成以下兩句：

1. 「當_____時，我會選擇插值而非平滑。」
2. 「通過每個點的曲線仍可能欠佳，因為_____。」

9 練習題

核心練習

1. 某感測器在 $t = 3$ 時讀數為 18.2 單位，在 $t = 9$ 時為 25.4 單位。
 - (a) 用線性插值估計 $t = 5.5$ 時的數值。
 - (b) 陳述計算背後的假設。
 - (c) 解釋為何不應自動在 $t = 15$ 時使用同一公式。
2. 建立通過 $(0, 2)$ 、 $(2, 6)$ 與 $(5, 3)$ 的分段線性插值式。計算 $x = 1$ 、 $x = 3$ 及 $x = 4.5$ 時的值，並指出斜率改變之處。
3. 利用拉格朗日形式求通過 $(0, 2)$ 、 $(1, 1)$ 與 $(3, 5)$ 的二次插值多項式。計算 $x = 2$ 時的值，並運算核證三個插值條件。
4. 為下列數列建立差分表：

$$7, 12, 19, 28, 39, 52.$$
 提出多項式次數，並求以 $n = 0, 1, 2, \dots$ 表示的公式。
5. 某 12 次多項式完全通過 13 個實驗測量。提出三項理由，說明為何低次平滑模型或樣條仍可能更可信。
6. 對三點 $(0, 0)$ 、 $(1, 2)$ 與 $(2, 0)$ ：
 - (a) 寫出線性樣條；
 - (b) 描述三次樣條所需的連續性質；
 - (c) 不計算完整三次樣條，預測其圖像在 $x = 1$ 附近會有何不同。
7. 判斷主要任務是插值、平滑，還是兩者皆非：
 - (a) 估計兩次觀測之間某個未監測小時的降雨量；

- (b) 從含雜訊的每月銷售找出長期趨勢；
- (c) 利用截至 2025 年的記錄預測 2070 年人口；
- (d) 從精確控制點重建電腦繪製曲線。

練習核對與提示

1. 線性插值給出 21.2 單位；它假設 $t = 3$ 至 $t = 9$ 之間的變化率近似固定，不適用於觀測區間之外。
2. 兩段分別為 $2 + 2x$ ($0 \leq x \leq 2$) 及 $8 - x$ ($2 \leq x \leq 5$)；所求值為 4、5 及 3.5，斜率在 $x = 2$ 改變。
3. $P(x) = x^2 - 2x + 2$ ，故 $P(2) = 2$ ；直接代入可核對全部三個節點。
4. 常數二階差分為 2，支持二次式 $y_n = n^2 + 4n + 7$ 。
5. 相關問題包括節點之間的振盪、雜訊放大、端點行為、敏感度及留出資料表現。
6. 線性樣條先為 $2x$ ，再為 $4 - 2x$ 。三次樣條及其一階、二階導數均連續，故在 $x = 1$ 附近把折角平滑化。
7. 分類依次為插值、平滑、兩者皆非（長距離外推），以及插值。

建模挑戰

某學校每五分鐘記錄走廊入口的人流，但有數個讀數缺失，部分記錄值亦可能含點算誤差。撰寫一頁經驗建模簡報，內容包括：

1. 重建缺失數據的目的；
2. 哪些觀測視為可靠或含雜訊；
3. 比較分段線性插值、三次樣條與平滑；
4. 一幅診斷圖或一項診斷計算；
5. 結果的有效區間；
6. 一項敏感度測試及一項限制。

論證質素比使用最複雜方法更重要。

A 選讀延伸：牛頓均差

對不等距節點，以均差取代普通差分：

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

牛頓插值多項式為

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j).$$

與拉格朗日形式不同，加入新數據點時可有效率地擴展牛頓形式。

不等距數據

對 $(0, 1)$ 、 $(1, 3)$ 與 $(3, 7)$ ，

$$f[0, 1] = 2, \quad f[1, 3] = 2,$$

因此

$$f[0, 1, 3] = \frac{2 - 2}{3 - 0} = 0.$$

故 $P_2(x) = 1 + 2x$ ，說明三點雖然間距不等，實際上仍共線。

B 選讀延伸：一般自然樣條系統

令 $x_0 < \cdots < x_n$ 、 $h_i = x_{i+1} - x_i$ 且 $M_i = S''(x_i)$ 。對自然三次樣條， $M_0 = M_n = 0$ ，內部二階導數滿足

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right).$$

這是三對角線性系統，因此即使樣條含許多節點，亦可有效率地計算。此公式有助實作，但不屬於兩小時核心課堂內容。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 插值法使用指南 (SciPy)
- 《微積分》第一冊 (OpenStax)

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 5 講：蒙地卡羅與離散事件模擬

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 區分確定性模型與隨機模型；
2. 把均勻隨機數映射至離散或經驗概率分佈的結果；
3. 建立並解釋簡單的蒙地卡羅估計量；
4. 解釋為何需要重複模擬，以及模擬誤差為何下降緩慢；
5. 利用到達、開始服務、等候及離開時間追蹤單服務台隊列；
6. 設計包含輸出、重複實驗、模型效度驗證、敏感度與限制的模擬實驗。

1 為何要模擬？

前幾講以方程或曲線表示系統。這些方法仍很有價值，但有些系統包含次序無法精確預測的不確定事件：顧客不規則到達、服務時間長短不一，設備亦可能意外故障。模擬仿照這類系統的運作，並記錄在指定假設下發生的情況。

引入活動：飯堂隊列

[10分鐘]

午膳時間，學生不規則地到達一個飯堂櫃檯；部分訂單所需時間遠較其他訂單長。學校正考慮增設第二個櫃檯。

二人一組辨認：

1. 兩個在學生之間難以預測地變化的量；
2. 兩個描述系統目前狀態的量；
3. 學校作決策前應檢查的三項輸出；
4. 一項可能令模擬不切實際的因素。

建模要點：模擬不只是隨機數；它需要明確的輸入假設、更新規則、輸出，以及檢查可信度的計劃。

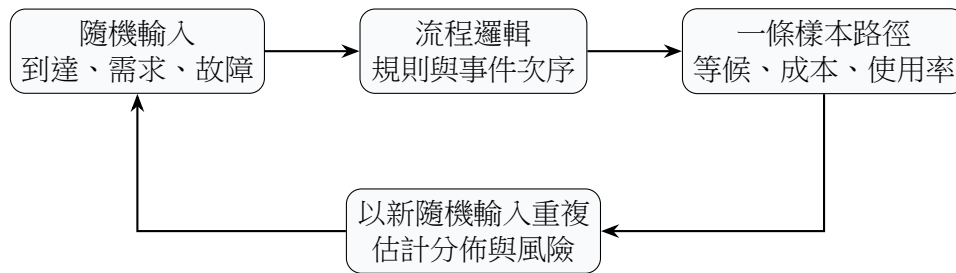


圖 1: 模擬把隨機輸入與確定性更新規則結合。一次運行給出一段可能歷史；重複運行則揭示可能結果的範圍。

模擬的核心語言

- 狀態變量描述某時刻的系統，例如隊列長度或庫存水平。
- 事件改變狀態，例如顧客到達、服務完成或貨物送達。
- 樣本路徑是系統的一段模擬歷史。
- 重複實驗是在相同政策與假設下獨立運行一次。
- 隨機種子可重現同一偽隨機序列，有助除錯與公平比較。

產生隨機輸入後，電腦執行確定性計算。因此，模擬是有結構的實驗，而非隨意猜測。

2 從均勻隨機數到模型輸入

隨機變量把數值指派給隨機實驗的每個可能結果。要模擬離散隨機變量，可按累積概率分割區間 $[0, 1)$ ，並生成 $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$ 。

假設服務時間 S 的可能值為 $s_1, \dots, s_k$ ，概率分別為 $p_1, \dots, p_k$ 。令

$$F_j = p_1 + \dots + p_j.$$

當 $F_{j-1} \leq U < F_j$ 時取 $S = s_j$ ，其中 $F_0 = 0$ 。這是離散逆變換法。

例題 1：模擬服務時間

小食櫃檯的歷史觀測顯示

服務時間 S (min)	2	3	4	5
$P(S = s)$	0.20	0.35	0.30	0.15

累積概率為 0.20、0.55、0.85 與 1.00，因此

$$S = \begin{cases} 2, & 0 \leq U < 0.20, \\ 3, & 0.20 \leq U < 0.55, \\ 4, & 0.55 \leq U < 0.85, \\ 5, & 0.85 \leq U < 1. \end{cases}$$

對 $U = 0.07, 0.48, 0.61, 0.93$ ，模擬服務時間分別為 2, 3, 4, 5 分鐘。

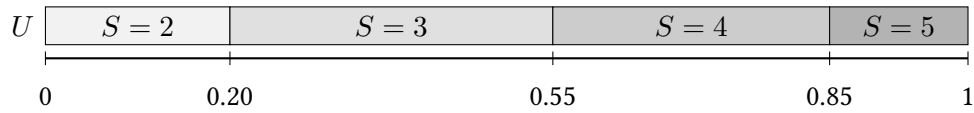


圖 2: 每個區間的長度等於相應結果的概率；概率越大，在 $[0, 1)$ 佔據的部分越多。

引導練習：到達間隔

[10分鐘]

學生到達間隔服從下列分佈：

$A \text{ (min)}$	2	3	4	5
$P(A = a)$	0.15	0.35	0.35	0.15.

1. 建立累積概率表與區間映射。
2. 把 $U = 0.08, 0.32, 0.71, 0.94, 0.51$ 轉化為到達間隔。
3. 解釋固定種子為何有助比較一個與兩個櫃檯。

模型檢視：輸入分佈是模型的一部分

模擬可以從不良輸入模型產生看似精確的輸出。歷史頻率未必能代表考試日、特別餐單或學生行為改變後的情況。概率、變量之間的相依關係，以及數據所代表的時段都必須有充分理據。

3 蒙地卡羅估計

蒙地卡羅模擬透過重複隨機實驗估計某個量。考慮從單位正方形均勻抽取的點。落在四分之一圓 $x^2 + y^2 \leq 1$ 內的概率等於其面積 $\pi/4$ 。若 n 個點中有 C 個落在圓內，則

$$\frac{C}{n} \approx \frac{\pi}{4}, \quad \boxed{\hat{\pi} = 4 \frac{C}{n}}.$$

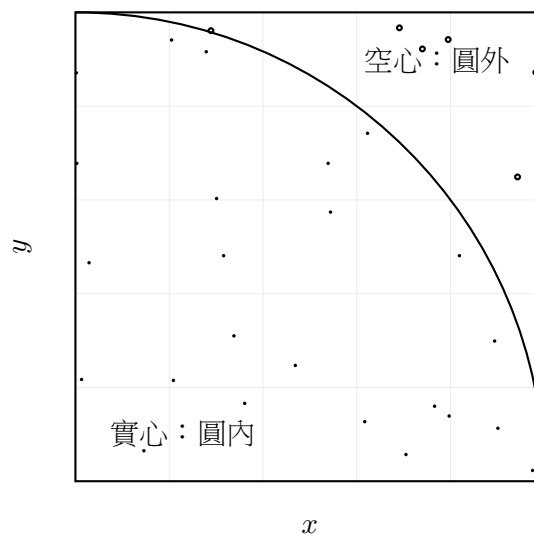


圖 3: 30 個可重現樣本點：24 個落在四分之一圓內，6 個在圓外。圖像只代表一條樣本路徑，並不保證準確。

例題 2： π 的一次估計

在圖 3 中， $C = 24$ 且 $n = 30$ ，故

$$\hat{\pi} = 4 \left(\frac{24}{30} \right) = \boxed{3.20}.$$

此估計合理但粗略。不同種子會產生不同點數。因此，報告 3.20 時應同時提供 n 、隨機數程序，最好亦提供重複運行的結果。

對獨立樣本，蒙地卡羅不確定性通常按下列速率下降：

$$\text{典型誤差} \propto \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

因此，要把典型誤差縮小 2 倍，約需 4 倍樣本；要縮小 10 倍，約需 100 倍樣本。

檢查點：收斂

某模擬使用 2,500 個獨立樣本。要把典型蒙地卡羅誤差降至目前的五分之一，約需多少樣本？利用平方根規則解釋。

重複實驗與不確定性

增加單次運行內的觀測數與增加獨立重複實驗次數，回答的是不同問題。長時間運行可估計穩態表現；多次重複實驗則揭示運行之間的變異。至少應報告平均值與一項離散程度指標，並保留各次重複結果，而非只保存總平均。

4 隊列的離散事件模擬

在離散事件模擬中，狀態只在事件發生時改變。對單服務台隊列，令

- A_i 為顧客 i 的到達時間；
- S_i 為所需服務時間；
- B_i 為開始服務時間；
- D_i 為離開時間；
- $W_i = B_i - A_i$ 為等候時間。

更新方程為

$$B_i = \max(A_i, D_{i-1}), \quad D_i = B_i + S_i, \quad W_i = B_i - A_i,$$

其中 $D_0 = 0$ 。最大值表達隊列邏輯：只有當顧客已到達且服務台空閒時，服務才開始。



圖 4: 隊列由事件次序支配。隨機性來自到達與服務時間；更新邏輯則是確定性的。

例題 3：手動追蹤一個櫃檯

六名顧客的到達時間為

$$A_i = (0, 3, 5, 10, 12, 16)$$

服務時間為

$$S_i = (4, 5, 3, 4, 2, 5)$$

單位均為分鐘。套用更新方程得到：

顧客 i	1	2	3	4	5	6
到達 A_i	0	3	5	10	12	16
服務 S_i	4	5	3	4	2	5
開始 B_i	0	4	9	12	16	18
等候 W_i	0	1	4	2	4	2
離開 D_i	4	9	12	16	18	23

平均等候時間為

$$\bar{W} = \frac{0 + 1 + 4 + 2 + 4 + 2}{6} = \boxed{2.17 \text{ min}},$$

最大等候時間為 4 分鐘。這些數值只描述這條包含六名顧客的樣本路徑。

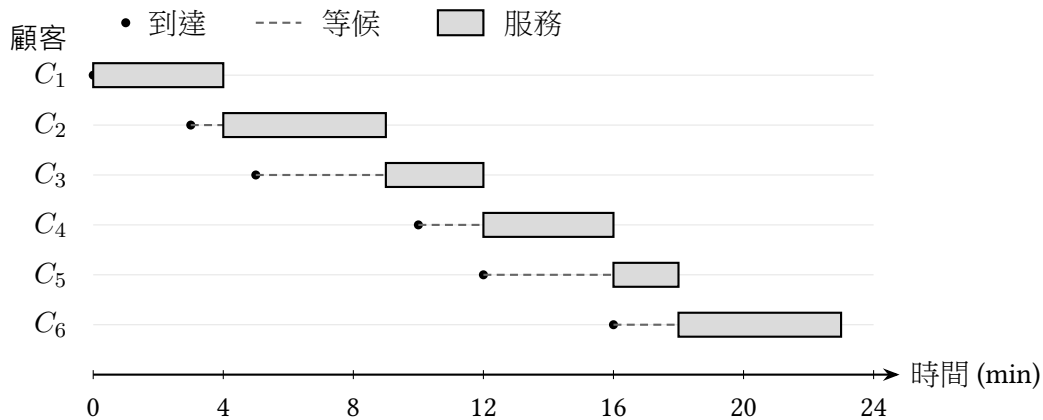


圖 5: 以顧客為中心的隊列時間線。實心點標示到達，虛線段表示等候，陰影方塊表示服務時段。

政策比較：增設第二個櫃檯

[15分鐘]

沿用例題 3 的到達與服務時間，把每名到達顧客分配至最先空間的櫃檯。

1. 完成包含櫃檯編號、開始時間、等候時間與離開時間的表格。
2. 求平均及最大等候時間。
3. 解釋為何單一樣本路徑不足以支持永久為第二個櫃檯安排人手。

5 從一次運行到決策

模擬研究是在模型上進行的實驗。運行前，應定義政策選項、輸入分佈、表現指標、模擬長度、重複次數與比較方法。

隊列的一項實用初步檢查是交通強度

$$\rho \approx \frac{\text{平均服務時間}}{c \times \text{平均到達間隔}},$$

其中 c 為服務台數目。若 $\rho > 1$ ，工作到達速度快於系統處理速度，隊列會傾向增長，而非穩定於長期分佈。

例題 4：詳細模擬前先檢查容量

假設平均到達間隔為 3.5 分鐘，平均服務時間為 4.7 分鐘。
對一個櫃檯，

$$\rho_1 = \frac{4.7}{1(3.5)} \approx 1.34 > 1.$$

櫃檯平均容量不足。長時間模擬會顯示等候增加，但關鍵結論屬結構性：在這些假設下，一個櫃檯無法應付需求。

對兩個櫃檯，

$$\rho_2 = \frac{4.7}{2(3.5)} \approx 0.67 < 1.$$

系統有可能穩定，但仍需模擬等候時間變異。容量檢查應配合而非取代詳細模擬。

模型檢視：不要把模擬平均值誤作普遍事實

「平均等候 = 2.17 分鐘」這類結果取決於輸入分佈、排隊規則、人手政策、運作時段與隨機樣本。可信報告應提供：

1. 每項隨機輸入的假設與數據來源；
2. 重複實驗的次數與長度；
3. 平均值，連同變異或百分位數；
4. 對不確定假設的敏感度；
5. 算法的運算／程式核證，以及與真實觀測比較的模式效度驗證。

模擬研究設計**[10分鐘]**

學校希望比較一個櫃檯、兩個櫃檯，以及一個櫃檯配合精簡餐單。
撰寫簡短實驗計劃，列明：

1. 隨機輸入及其估計方法；
2. 至少四項輸出；
3. 模擬時域與重複次數；
4. 一項使用共同隨機種子的公平比較技巧；
5. 一項模型效度驗證檢查及一項敏感度測試。

運算 / 程式核證與模型效度驗證

運算 / 程式核證追問：「我們是否正確實作模型？」可手動追蹤小型案例、檢查守恆規則，並以固定種子重現結果。

模型效度驗證追問：「模型是否足以就指定用途表示真實系統？」可比較模擬與觀測的隊列長度、等候、使用率與到達模式。程式即使通過核證，仍可能模擬了錯誤系統。

暫態暖機與重複實驗層級的不確定性

若長期模擬從人為設定的空系統開始，初段通常存在暫態：早期觀測主要反映初始化，而非穩態運作。研究穩態問題時，應選定並說明暖機（或 burn-in）期 b ，捨棄 b 之前的觀測，並檢查結論對鄰近 b 值是否穩健。若研究的是有限時域，例如從空隊列開始的一個真實午膳時段，則不應捨棄初段，因為該初始狀態正是所建模系統的一部分。

對 R 次獨立重複實驗，先為每次重複計算一個輸出 Y_r 。令重複實驗平均為 $\bar{Y}$ 、樣本標準差為

s_Y ，則近似雙側 $100(1 - \alpha)\%$ 置信區間為

$$\bar{Y} \pm t_{1-\alpha/2, R-1} \frac{s_Y}{\sqrt{R}}.$$

不確定性的分析單位是整次重複實驗，而非同一次運行中互相關聯的每名顧客或每個時間步。報告時須一併交代初始化、暖機規則、運行長度、重複次數及區間方法。

6 課堂總結

應掌握的六個觀念

1. 模擬把隨機輸入與確定性流程規則結合。
2. 可透過累積概率把均勻隨機數映射至經驗結果。
3. 一次蒙地卡羅運行只是一個可能結果，而非答案本身。
4. 典型蒙地卡羅誤差只按 $1/\sqrt{n}$ 下降。
5. 在隊列中， $B_i = \max(A_i, D_{i-1})$ 捕捉事件次序。
6. 決策需要重複實驗、不確定性摘要、運算／程式核證、模型效度驗證及敏感度分析。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成以下兩句：

「固定隨機種子很有用，因為_____。」

「第二個種子或獨立重複實驗是必要的，因為_____。」

7 練習題

核心練習

1. 維修時間 T 服從下列分佈：

T (h)	1	2	3	5
$P(T = t)$	0.10	0.40	0.35	0.15.

建立區間映射，並把 $U = 0.04, 0.36, 0.71, 0.92$ 轉化為維修時間。

2. 某四分之一圓模擬在 $n = 10,000$ 個點中得到 $C = 7,824$ 個圓內點。
 - (a) 估計 π 。
 - (b) 若樣本量乘以 25，典型蒙地卡羅誤差應改變多少倍？
 - (c) 解釋為何每次個別運行的實際誤差未必都下降。
3. 對單服務台隊列，到達時間為

$$A = (0, 2, 6, 7, 11),$$

服務時間為

$$S = (3, 5, 2, 4, 3).$$

建立開始時間、等候與離開的完整表格。求平均等候、最大等候及在系統內的平均時間。

4. 某服務台的平均到達間隔為 6 分鐘，平均服務時間為 8 分鐘。
 - (a) 計算一個及兩個服務台時的 ρ 。
 - (b) 模擬前可得出甚麼結論？
 - (c) 尚欠甚麼重要資料？
5. 解釋以下各項陳述為何不足：
 - (a) 「模擬運行一次，得出平均等候 4.2 分鐘。」
 - (b) 「程式沒有編碼錯誤，所以模型有效。」
 - (c) 「直方圖吻合上月數據，所以全年都會正確。」
 - (d) 「兩櫃檯系統的平均等候較短，所以自動成為最佳政策。」
6. 某小組使用完全相同的到達與服務需求序列比較兩項人手政策。解釋此共同隨機數設計為何令比較更清晰，以及小組為何仍應使用多個種子。

練習核對與提示

1. 區間為 $[0, 0.10)$ 、 $[0.10, 0.50)$ 、 $[0.50, 0.85)$ 及 $[0.85, 1)$ ；輸出為 $(1, 2, 3, 5)h$ 。
2. $\hat{\pi} = 3.1296$ 。把 n 乘以 25，典型誤差除以 5；但抽樣變異不保證每次運行的誤差單調改善。
3. (B_i, W_i, D_i) 依次為 $(0, 0, 3)$ 、 $(3, 1, 8)$ 、 $(8, 2, 10)$ 、 $(10, 3, 14)$ 、 $(14, 3, 17)$ 。平均等候 = 1.8 min，最大等候 = 3 min，平均逗留時間 = 5.2 min。
4. $\rho_1 = 8/6 \approx 1.33$ ， $\rho_2 = 8/12 \approx 0.67$ 。單一服務台的平均容量不足；兩個服務台可能穩定，但仍須考慮輸入分佈、相依性、排隊規則及時間變化。
5. 四項陳述依次忽略重複實驗不確定性、模型效度驗證、時間穩定性，以及成本、公平或其他目標。
6. 共同隨機數可降低配對政策差異的雜訊；仍須使用多個獨立種子估計不確定性，避免只對某個種子成立的結論。

建模挑戰

為以下其中一個系統撰寫一頁模擬簡報：

1. 學校飯堂隊列；
2. 共享單車站的單車可用量；
3. 熱門文具的每日庫存；
4. 小型診所的病人到達。

內容包括：目的、狀態變量、事件、隨機輸入、輸入數據計劃、流程邏輯、輸出、政策選項、重複實驗計劃、模型效度驗證、敏感度及一項限制。不要求完整電腦程式。

A 選讀算法：單服務台隊列

本附錄不屬於兩小時核心課堂內容，把事件方程轉化為偽代碼。

隊列模擬偽代碼

1. 設上一名顧客離開時間 $D \leftarrow 0$ ，並初始化輸出列表。
2. 對顧客 $i = 1, \dots, n$ ：
 - (a) 生成或讀取到達間隔與服務時間；
 - (b) 更新到達時間 A_i ；
 - (c) 設 $B_i \leftarrow \max(A_i, D)$ ；
 - (d) 設 $W_i \leftarrow B_i - A_i$ ；
 - (e) 設 $D_i \leftarrow B_i + S_i$ ，並更新 $D \leftarrow D_i$ ；
 - (f) 記錄等候時間、系統內時間、隊列長度與服務台狀態。
3. 計算該次重複實驗的摘要統計量。
4. 使用獨立種子重複，並跨重複實驗作摘要。

B 選讀說明：四分之一圓估計量的標準誤差

若樣本點 j 位於四分之一圓內，令 $I_j = 1$ ；否則令 $I_j = 0$ 。則 I_j 服從 $p = \pi/4$ 的伯努利分佈，且

$$\hat{\pi} = 4\bar{I}.$$

因此

$$\text{SE}(\hat{\pi}) = 4\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \frac{1.64}{\sqrt{n}}.$$

這是估計量的標準差，而非保證的誤差界。例如，把 n 從 100 增至 10,000，可令標準誤差縮小 10 倍。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 離散事件模擬文件（SimPy）
- 《工程統計手冊》（NIST / SEMATECH）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 6 講：線性規劃與決策最佳化

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 從現實情境辨認決策變量、目標函數與約束條件；
2. 建立雙變量線性規劃；
3. 繪畫可行域並找出極點；
4. 利用頂點代入與目標等值線求解最大化及最小化模型；
5. 從幾何辨認不可行、無界與多重最優情況；
6. 解釋整數性、線性、確定性與可分性為何是建模假設，而非事實；
7. 建立含預算及邏輯約束的小型二元規劃；
8. 在情境中解釋緊約束、鬆弛量、影子價格與最優性範圍。

1 從情境到決策模型

最佳化始於決策，而非算法。建模者須先決定哪些量可控制、甚麼結果重要，以及甚麼限制可選方案。一般約束最佳化模型形式為

$$\text{最佳化 } f(\mathbf{x}) \quad \text{約束條件} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq b_i.$$

當目標與所有約束均為線性時，模型稱為線性規劃。

引入活動：規劃一週生產

[10分鐘]

某學校工場為展覽製作展示架與儲物箱。兩種產品的貢獻不同，並共用有限木材與人力。二人一組決定：

1. 決策變量應代表甚麼；
2. 應把哪個量最大化；
3. 哪些資源限制須成為約束；
4. 12.4 個箱這類分數答案是否有意義。

建模要點：數學結構應反映實際需要實施的決策。

最佳化模型的四項元素

1. 決策變量：決策者可控制的量。
2. 目標函數：需要最大化或最小化的數值成效指標。
3. 約束條件：資源、政策、物理或邏輯限制。

4. 定義域限制：情境要求的非負、整數、二元或有界數值。

任何一項元素未明確說明，模型都不完整。

例題 1：建立木匠問題

木匠每張桌的貢獻為 \$25，每個書櫃為 \$30。桌需 20 板呎木材及 5 人工小時；書櫃需 30 板呎及 4 人工小時。每週可用 690 板呎與 120 人工小時。

令

$$x = \text{桌子數量}, \quad y = \text{書櫃數量}.$$

目標是每週貢獻

$$\text{最大化 } P = 25x + 30y.$$

資源約束為

$$20x + 30y \leq 690 \quad (\text{lumber}),$$

$$5x + 4y \leq 120 \quad (\text{labor}),$$

$$x, y \geq 0 \quad (\text{nonnegativity}).$$

若只能製作完整產品，應另列 $x, y \in \mathbb{Z}$ 。我們先解連續模型，再檢查所得決策能否實施。

檢查點：建立模型

某餅店製作普通與高級蛋糕，貢獻分別為 \$18 與 \$26。每個普通蛋糕需 2 小時準備及 1 小時裝飾；高級蛋糕需 3 小時準備及 2 小時裝飾。每週可用 36 準備小時與 20 裝飾小時。

定義變量並寫出完整線性規劃，包括單位與定義域限制。

2 可行域

每個不等式描述一個半平面。可行域是同時滿足所有約束的點集。可行點是在模型假設下可實施的方案；不可行點則違反至少一項限制。

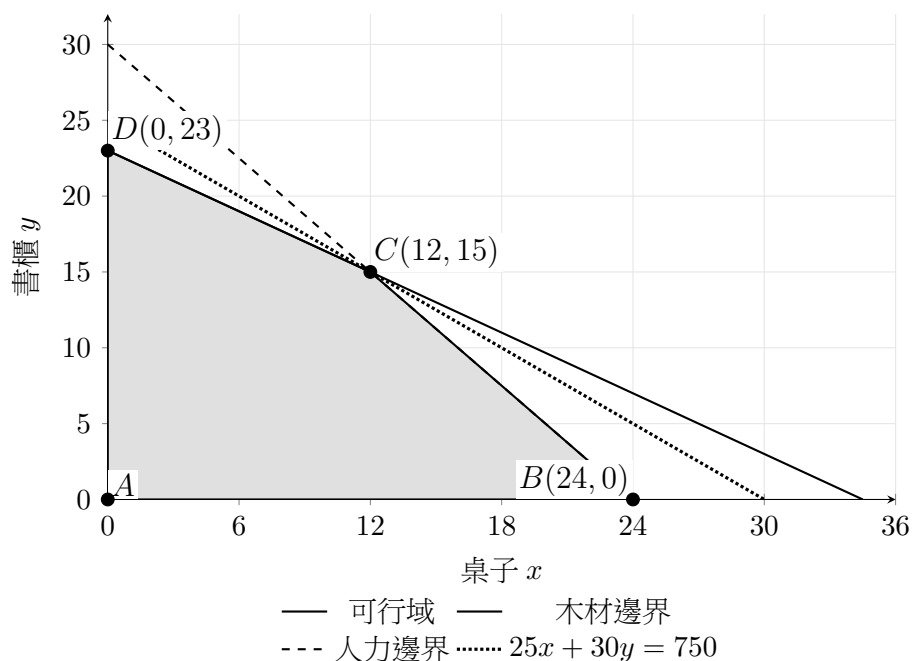


圖 1: 可行域是所有約束的重疊區。點線是仍接觸可行域的最高平行目標等值線。

若集合中任意兩點的連線仍完全位於集合內，則稱集合為凸集。線性半平面的交集為凸集，故線

性規劃的可行域皆為凸集。

頂點為何重要？

線性目標有一族平行等值線。沿改善方向移動等值線時，與有界凸多邊形的最後接觸會在頂點發生；若有多重最優解，則沿整條邊接觸。

因此，雙變量線性規劃只需在可行極點計算目標值。此結論依賴線性，對非線性目標一般不成立。

例題 2：以極點求解

可行極點為

$$A = (0, 0), \quad B = (24, 0), \quad C = (12, 15), \quad D = (0, 23).$$

計算 $P = 25x + 30y$ ：

點	P (美元)
A	0
B	600
C	750
D	690

故連續模型的最優解為

$$x = 12, \quad y = 15, \quad P = 750.$$

在 C ，兩項資源約束均取等號，因此木材與人力全數用盡。

引導圖解

[15分鐘]

對檢查題中的餅店模型：

1. 利用截距繪畫每條邊界線；
2. 辨認每條線的可行一側；
3. 列出所有可行極點；
4. 在每個極點計算目標值；
5. 以完整句子陳述最優方案。

3 最小化與最低要求

最佳化問題不一定追求最大利潤。學校可最小化人手成本，運輸公司可最小化燃料用量，膳食模型則可在滿足最低營養要求下最小化成本。「至少」形式的約束通常產生 $\geq$ 不等式，因此可行域可能位於邊界線上方，亦未必包含原點。

例題 3：最低成本送貨車隊

送貨服務可按日租用貨車與客貨車。貨車成本 \$120，可運 8 板貨物；客貨車成本 \$70，可運 4 板。至少須運送 48 板，並至少有 8 輛車覆蓋路線。

令 x 為貨車數， y 為客貨車數。連續模型為

$$\text{最小化 } C = 120x + 70y \quad \text{約束條件} \quad 8x + 4y \geq 48, \quad x + y \geq 8, \quad x, y \geq 0.$$

第一項約束除以 4 得 $2x + y \geq 12$ 。相關下界極點為

$$(0, 12), \quad (4, 4), \quad (8, 0).$$

其成本分別為 \$840、\$760 與 \$960。故連續模型最優解為

$$x = 4, \quad y = 4, \quad C = 760.$$

此處把目標線向較低成本方向移動，直至首次接觸可行域。

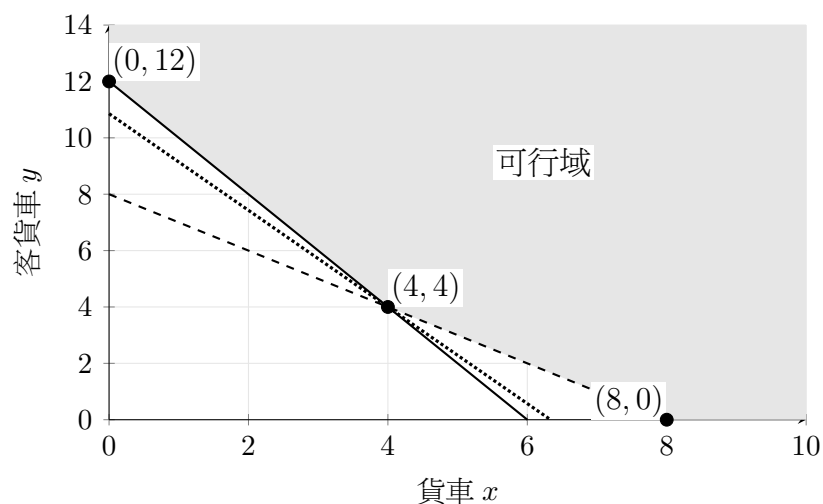


圖 2: 有最低要求時，可行域位於約束上方。最低成本等值線首先在 (4, 4) 接觸可行域。

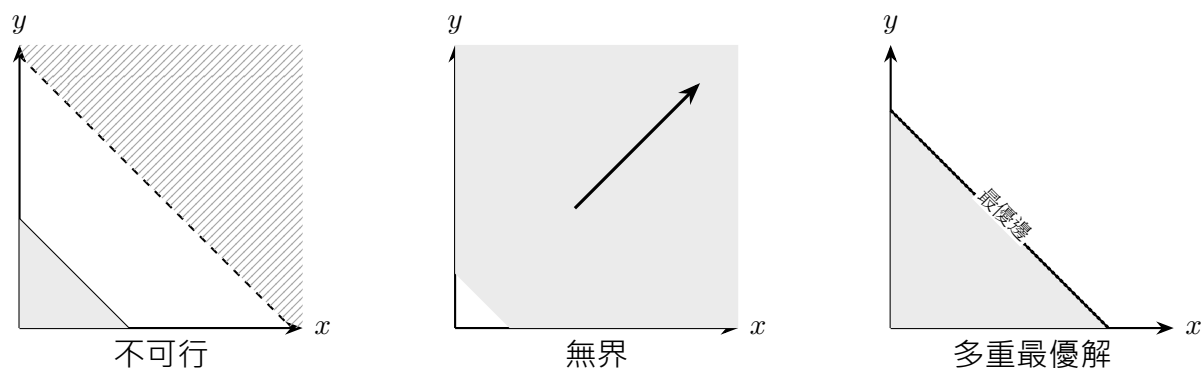
檢查點：最大化還是最小化？

為每種情況提出合理目標，並說明應最大化還是最小化：

1. 在滿足最低科目覆蓋下安排溫習課；
2. 分配宣傳預算以增加預期報名人數；
3. 選擇應急物資，同時使總重量盡量小。

4 三種特殊結果

正確建立的線性規劃不一定有唯一有限最優頂點；報告答案前應檢查幾何情況。



所需區域沒有重疊

目標可無限改善

目標與一條邊平行

圖 3: 解釋解答前，先檢查模型是否不可行、無界，或整條邊都是最優解。

如何報告特殊情況

- 不可行：要求不能同時滿足。應重查數據或協商約束。
- 無界：模型容許無限改善，通常因缺少上限、成本或容量。
- 多重最優解：多項決策在數學上等價，可按風險、公平或易於實施等次要準則選擇。

模型檢視：可行點不會自動成為合理決策

數學只檢查已陳述約束。可行生產方案仍可能不可接受，因模型遺漏需求上限、儲存、合約最低量、設置成本、不確定性或公平。最佳化不取代判斷，而是把所述權衡明確化。

5 緊約束、鬆弛量與假設問題

在候選解中，若約束取等號，則稱為緊約束；否則具有鬆弛量。對資源約束

$$a_1x + a_2y \leq b,$$

鬆弛量為 $b - (a_1x + a_2y)$ 。

例題 4：解釋鬆弛量

在 $B = (24, 0)$ ：

$$\begin{aligned} \text{已用木材} &= 20(24) = 480, & \text{木材鬆弛量} &= 690 - 480 = 210, \\ \text{已用人力} &= 5(24) = 120, & \text{人力鬆弛量} &= 120 - 120 = 0. \end{aligned}$$

人力約束為緊約束，而有 210 板呎木材未用。由於人力已耗盡，只增加木材不能在局部改善方案。

在最優解 $C = (12, 15)$ ，兩項鬆弛量均為零；在目前係數下，兩種資源都是瓶頸。

影子價格估計增加一單位緊約束資源所帶來的最優目標值增幅，前提是改變足夠小，使同一對約束仍為活躍約束。

例題 5：資源邊際價值

在木匠問題最優解，兩項緊約束為

$$20x + 30y = b_L, \quad 5x + 4y = b_H.$$

木材與人力的影子價格 u 與 v 滿足

$$20u + 5v = 25, \quad 30u + 4v = 30,$$

因為在邊際上，一件產品使用資源的指派價值須等於其貢獻。求解得

$$\boxed{u = \frac{5}{7} \approx 0.71 \text{ 元/板呎}}, \quad \boxed{v = \frac{15}{7} \approx 2.14 \text{ 元/人工小時}}.$$

因此，一個額外人工小時的局部價值高於一板呎額外木材。按此局部模型，為一個額外人工小時支付 \$3 不合算，支付 \$1 則可能合算。

例題 6：桌子貢獻的最優性範圍

假設桌子貢獻由 \$25 改為 c_T ，書櫃仍為 \$30。目標等值線斜率為

$$-\frac{c_T}{30}.$$

在目前最優解 $C = (12, 15)$ ，兩條緊約束邊的斜率為 $-5/4$ （人力）及 $-2/3$ （木材）。目標斜率位於兩者之間時，同一頂點仍為最優：

$$-\frac{5}{4} \leq -\frac{c_T}{30} \leq -\frac{2}{3}.$$

變號並求解得

$$20 \leq c_T \leq 37.5.$$

在此區間內，即使總貢獻改變，建議產量仍為 $(12, 15)$ 。在端點，目標線與一條邊平行，出現多重最優解；區間外則由另一頂點成為最優。

敏感度工作坊**[8分鐘]**

使用斜率，而非重新計算每個目標值。

1. 若桌子貢獻升至 \$34，產品組合會否改變？
2. 若升至 \$40，哪個相鄰頂點應變得較佳？
3. 最優性範圍為何比只測試一個替代係數更有用？

檢查點：鬆弛量與邊際價值

某解剩餘 40 kg 材料未用，但用盡所有人工小時。

1. 哪項約束為緊約束？
2. 哪項資源的局部影子價格應為零？
3. 為何「購買影子價格較高的資源」仍需有效範圍與成本比較？

模型檢視：敏感度是局部的

影子價格不是普遍市場價值。若資源改變足夠多，最優頂點可能轉變，舊影子價格便不再適用。敏感度分析應同時報告邊際價值及其解釋仍有效的範圍。

6 整數決策何時重要

連續線性規劃容許分數值，適合公斤、小時或比例等可分割量，卻未必適合人、車輛、項目或不可分產品。加入 $x_j \in \mathbb{Z}$ 得整數規劃；限制 $x_j \in \{0, 1\}$ 則得二元規劃。

例題 7：捨入為何可能失敗

考慮

$$\text{最大化 } 7x + 10y \quad \text{約束條件} \quad 3x + 5y \leq 14, \quad x, y \geq 0,$$

其中 x 與 y 計算不可分割的包裝數。

連續模型偏好 $(14/3, 0)$ ，目標值為 $98/3 \approx 32.67$ 。把 x 捨入至 5 會違反容量約束，因 $3(5) = 15 > 14$ 。向下捨入至 $(4, 0)$ 得 28，但整數可行點 $(3, 1)$ 用盡容量並得 31。

結論：先求連續解再捨入，可能得到不可行或非最優決策。

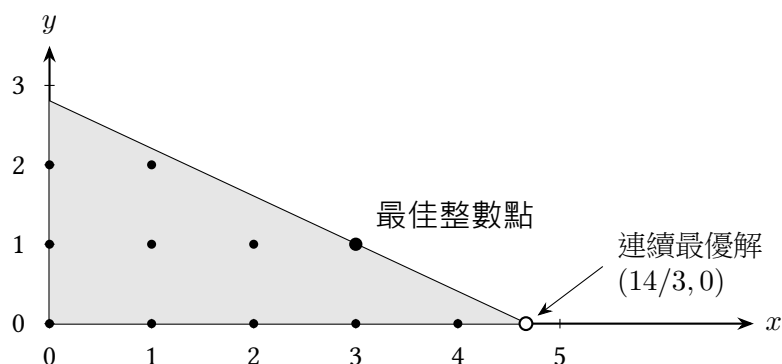


圖 4: 整數可行性以晶格點集取代連續區域；最佳整數點不一定由連續最優解捨入得到。

例題 8：二元項目選擇

學生會考慮五個項目，成本與估計效益分數如下：

項目	成本	效益分數
A：自修中心	4	8
B：預約系統	5	12
C：朋輩輔導	3	7
D：身心健康活動	4	9
E：設備基金	6	11

令 $z_A, \dots, z_E \in \{0, 1\}$ 表示是否選擇。學生會預算為 12，最多選三項；B 須連同 A，C 與 D 不可同時選：

$$\begin{aligned}
 &\text{最大化 } B = 8z_A + 12z_B + 7z_C + 9z_D + 11z_E, \\
 &4z_A + 5z_B + 3z_C + 4z_D + 6z_E \leq 12, \\
 &z_A + z_B + z_C + z_D + z_E \leq 3, \\
 &z_B \leq z_A, \\
 &z_C + z_D \leq 1.
 \end{aligned}$$

此問題規模小，可枚舉可行組合。最佳候選為

選擇	成本	效益
$A + B + C$	12	27
$D + E$	10	20
$A + E$	10	19
$C + E$	9	18
$A + D$	8	17

故最優選擇為 $A + B + C$ ，效益分數 27。

分層最佳化工作坊

[15 分鐘]

選擇一條路線。

核心路線：對建議選擇 $A + B + C$ 核證每項約束，再解釋為何禁止單獨選 B。

挑戰路線：假設預算降至 10，以系統枚舉找出新最優組合，並報告哪項邏輯約束變得重要。

延伸路線：加入「D 與 E 必須恰選其一」的條件，寫出相應二元方程，並討論原最優解是否仍可行。

7 假設與表達

標準線性規劃假設實用，但要求嚴格：

- 比例性：活動量加倍，資源用量與貢獻亦加倍。
- 可加性：總效應為各項總和，不含交互或設置效應。
- 可分性：連續變量可取分數值。
- 確定性：所有係數視為已知常數。

模型檢視：線性何時成疑？

批量折扣、逾時補貼、固定設置成本、不確定需求、產品交互、擠塞與規模經濟都違反簡單線性。實用的初步模型仍可為線性，但須明確陳述假設與預定範圍。

競賽式結論

[8分鐘]

為木匠撰寫四句建議：

1. 報告最優生產方案與貢獻；
2. 指出緊約束資源；
3. 陳述一項實用敏感度結果；
4. 承認一項可能改變決策的假設。

避免聲稱模型「證明」此決策在現實中最佳。

選修延伸：現代模型審核：多目標、公平與持份者

不少公共決策不能如實地以單一利潤分數表示。一個透明的初步模型可使用加權目標

$$\max \lambda P(x) + (1 - \lambda)B(x), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

其中 P 量度效率， B 量度另一項已述目標，例如可及性或服務質素。權重 λ 是價值判斷，而非測量定律。應改變權重、展示所得權衡，並辨認在合理據範圍內仍可接受的決策。

總體最優解可以掩蓋不公平負擔。令 $s_g(x)$ 表示持份者群組 g 所獲服務。為每個群組加入公平下限 $s_g(x) \geq s_{\min}$ ，或採用最大最小目標 $\max \min_g s_g(x)$ ，可把一項分配原則明確化；但這並不能證明該原則在倫理上已充分。提出建議前，應說明由誰界定目標、誰得益、誰承擔成本或風險、哪些群組未被數據涵蓋，以及受影響持份者如何質疑假設。除總目標外亦須報告各群組結果；若未有已述準則與持份者審視，不應把數學上可行的分配稱為公平。

8 課堂總結

應掌握的十個觀念

1. 最佳化把決策轉化為變量、目標、約束與定義域限制。
2. 可行解滿足每項已述約束；可行不保證實務上合適。
3. 無論最大化或最小化，雙變量線性規劃均可透過計算可行極點求解。
4. 模型可能不可行、無界或有多重最優解；每種結果解釋不同。
5. 緊約束辨認目前瓶頸；鬆弛量量度未用容量。

6. 影子價格提供局部邊際價值，而非永久價格。
7. 最優性範圍描述目標係數可改變多少而不改變建議頂點。
8. 整數或是／否決策需要整數或二元變量；直接捨入不安全。
9. 依賴與不相容等邏輯要求可寫成二元變量的線性約束。
10. 最優答案取決於線性、可分性、確定性及遺漏因素等假設。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成以下兩句：

「數學最優解是_____。」

「實施前，我會檢查_____。」

9 練習題

核心練習

1. 農夫種植小麥與玉米。小麥每英畝賺 \$200，使用 3 人工日及 2 肥料單位；玉米每英畝賺 \$300，使用 2 人工日及 4 肥料單位。最多有 45 英畝、100 人工日與 120 肥料單位。
 - (a) 定義變量並建立線性規劃。
 - (b) 繪畫可行域並求所有極點。
 - (c) 求最優種植方案並辨認緊約束。
2. 對木匠模型，計算 A 、 B 、 C 與 D 各項資源的鬆弛量。解釋為何 B 的未用木材不表示可增加桌子來改善 B 。
3. 某送貨方案使用貨車 x 與客貨車 y ：

$$\text{最小化 } 120x + 70y \quad \text{約束為} \quad 8x + 4y \geq 48, \quad x + y \geq 8, \quad x, y \geq 0.$$

解釋每個係數、繪畫可行域並求連續最優解，再討論整數性是否重要。

4. 有學生聲稱：「 x 坐標最大的點必定使所有利潤函數最大化。」利用等值線解釋錯誤。
5. 對以下情況勾畫可行域並解釋結果：(a) 互相矛盾的約束；(b) 無界最大化問題；(c) 多重最優解。
6. 對木匠模型，推導使 $(12, 15)$ 保持最優的書櫃貢獻 c_B 範圍，並解釋端點情況。
7. 預算為 10 時重新求解二元項目模型。使用精簡枚舉表，而非列出全部 2^5 種可能。
8. 建立一個線性規劃有多重最優解的例子，並陳述造成此情況的幾何條件。
9. 某報告稱：「一個額外人工小時值 \$2.14，所以 1000 小時值 \$2140。」仔細批判此陳述。

練習核對與提示

1. 令小麥為 x 、玉米為 y ，最大化 $200x + 300y$ ，約束為 $x + y \leq 45$ 、 $3x + 2y \leq 100$ 、 $2x + 4y \leq 120$ 及非負性。頂點為 $(0, 0)$ 、 $(100/3, 0)$ 、 $(20, 20)$ 及 $(0, 30)$ ； $(20, 20)$ 最優，目標值為 10000，人工與肥料約束均緊束。
2. A, B, C, D 的木材／人工鬆弛量依次為 $(690, 120)$ 、 $(210, 0)$ 、 $(0, 0)$ 及 $(0, 28)$ 。在 B ，人工限

制了增加桌子。

3. 送貨問題的最優解為 $(4, 4)$ ，成本為 760；整數性原則上重要，但不改變此解。
4. 最大化頂點取決於等值線斜率，而非單憑最大坐標。
5. 應分別檢查可行集是否為空、目標能否無限增長，以及目標線是否平行於緊束邊。
6. 書櫃貢獻範圍為 $20 \leq c_B \leq 37.5$ ；端點使相鄰邊上出現多重最優解。
7. 預算為 10 時， $A + B$ 與 $D + E$ 的效益同為 20；兩者均可行且最優。
8. 例如，在非負性及 $x + y \leq 4$ 下最大化 $x + y$ ，則 $x + y = 4$ 上每一點均最優。
9. 影子價格 2.14 只適用於目前最優基底及資源範圍；把它外推至 1000 小時缺乏理據。

建模挑戰

某學校須決定提供多少個標準與密集溫習工作坊。兩類均使用教師時間、課室與有限印刷預算，對學生的效益估計亦不同。

撰寫一頁最佳化簡報，內容包括：

1. 決策目的與持份者；
2. 具單位及定義域限制的變量；
3. 一個目標與至少三項約束；
4. 線性與效益分數背後的假設；
5. 圖解或計算求解計劃；
6. 一項敏感度問題及一項實施限制。

形成問題與解釋的質素，比取得某個特定數值最優解更重要。

A 選讀延伸：單純形法的作用

單純形法是用於較大型線性規劃的代數方法。它從一個可行極點開始，反覆移至目標值較佳的相鄰極點。鬆弛變量把不等式轉為方程，樞軸運算則改變目前基底。

對木匠模型，單純形法沿下列路徑：

$$(0, 0) \longrightarrow (0, 23) \longrightarrow (12, 15),$$

其後停止，因為沒有相鄰移動可改善目標。完整表解法宜在學生理解形成問題、幾何、特殊情況與解釋後另課教授。

B 選讀延伸：無導數搜尋

若一維非線性目標在已知區間上為單峰，可用黃金分割搜尋最佳化。這與線性規劃不同：它收窄包含一個最優點的區間，而非在可行多面體頂點之間移動；留待後續數值最佳化課堂。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 線性規劃指南（NEOS Guide）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 7 講：決策理論與風險

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 區分決策選項與自然狀態；
2. 計算並解釋重複風險決策的期望值；
3. 以逆推法建立並求解簡單決策樹；
4. 利用貝葉斯定理在取得新資料後更新概率；
5. 計算完全資訊期望值；
6. 在概率未知時運用拉普拉斯、最大最小、最大最大、赫維茨及最小最大遺憾準則；
7. 解釋數學最優決策為何可能取決於風險承受程度、重複性與後果。

1 為何需要決策理論？

前幾講常假設模型輸入已知。真實決策中，部分輸入並不確定：天氣會變、市場需求可高可低、投標可獲接納或被拒，醫學檢測亦可能正確或誤導。決策理論提供一套有系統的方法，在結果取決於不確定未來狀態時選擇行動。

決策模型分開三項元素：

1. 選項：決策者可選擇的行動。
2. 自然狀態：決策者不能控制的不確定條件。
3. 報酬：每個選項與狀態組合產生的後果。

引入活動：攤位應售賣甚麼？

[10 分鐘]

學校籌款攤位可售賣熱咖啡或冰茶。寒冷日咖啡收入較高，溫暖日則冰茶較高；明日天氣未確定。

二人一組討論：

1. 有哪些選項？有哪些自然狀態？
2. 哪些資訊會改變決策？
3. 這是重複決策還是一次性決策？
4. 你較重視最大化平均利潤，還是避免極差結果？

建模要點：計算前，先辨認誰作選擇、甚麼不確定，以及哪項後果重要。

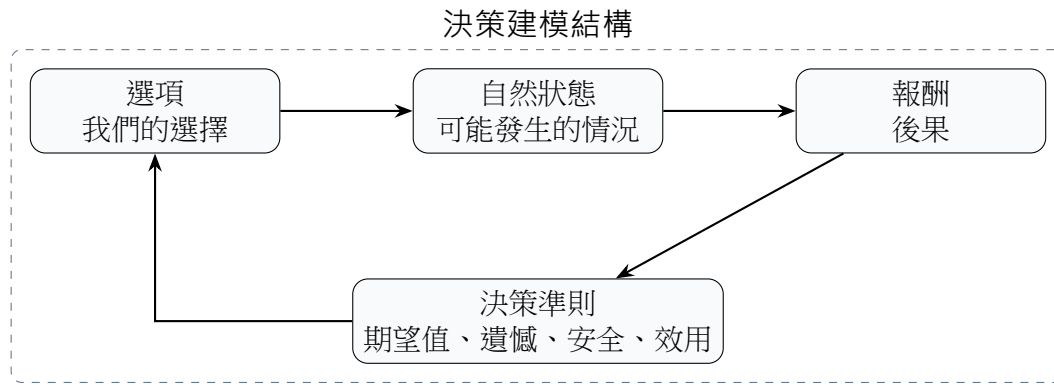


圖 1: 決策模型結合選擇、不確定狀態、後果及評判準則。

重複決策與一次性決策

期望值是長期平均。在同類決策重複多次時最具說服力，例如保險公司售出大量保單。對下行風險很大的一次性決策，最高期望值未必是最可接受的選擇。此區分並非次要的哲學問題，而會決定應使用期望值、風險規避準則還是遺憾準則。

2 重複風險決策的期望值

若隨機結果的報酬為 $w_1, w_2, \dots, w_n$ ，概率為 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，且 $\sum p_i = 1$ ，其期望值為

$$E = \sum_{i=1}^n p_i w_i.$$

E 不一定是可能結果；它是在同一概率模型下多次重複時預期的平均報酬。

例題 1：骰子遊戲

遊戲每次收費 \$1。若兩枚公平骰子點數和為 7，玩家共收取 \$6；否則沒有收入。故點數和為 7 時淨報酬為 \$5，其餘為 -\$1。

共有 36 個等可能結果，其中 6 個點數和為 7，因此

$$P(\text{點數和} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

期望淨報酬為

$$E = 5 \left(\frac{1}{6} \right) + (-1) \left(\frac{5}{6} \right) = 0.$$

就期望值而言，此遊戲是公平的。這不代表每位玩家收支平衡，而是多次遊玩後平均淨收益趨近零。

模型檢視：期望值不是承諾

學生可能說：「期望值是零，所以我不會贏也不會輸。」這是錯的。單次遊戲結果為 \$5 或 -\$1；期望值描述重複試驗分佈的中心，而非一次試驗的結果。

例題 2：天氣概率已知的攤位決策

承辦商須為明日學校運動會選擇一種產品。

	寒冷日	溫暖日
咖啡	\$4000	\$1000
冰茶	\$1500	\$5000

預報給出 $P(\text{寒冷}) = 0.30$ ，故 $P(\text{溫暖}) = 0.70$ 。

$$E(\text{咖啡}) = 0.30(4000) + 0.70(1000) = 1900.$$

$$E(\text{冰茶}) = 0.30(1500) + 0.70(5000) = 3950.$$

按期望值應售賣冰茶。

寒冷天氣的損益平衡概率滿足

$$4000p + 1000(1 - p) = 1500p + 5000(1 - p).$$

解得 $p = \frac{4000}{6500} \approx 0.615$ 。只有寒冷日概率超過約 61.5% 時，咖啡才較佳。

檢查點：期望值

準備投標成本為 \$2000。若獲接納，扣除準備成本後淨利潤為 \$18,000；若被拒，公司損失 \$2000。

1. 以接納概率 p 寫出期望值。
2. 求 p 的損益平衡值。
3. 解釋 $p = 0.15$ 時公司應否投標。

3 決策樹與逆推法

當決策後接一個或多個不確定事件時，決策樹很有用。方形節點表示決策，圓形節點表示不確定性，終端值表示報酬。

逆推法

由右至左求解決策樹：

1. 在每個機會節點計算各分支期望值。
2. 在每個決策節點保留期望值最佳的分支。
3. 以所得數值取代已解節點，再繼續向左。

此法稱為逆推，因為先簡化樹的未來部分，再選擇較早行動。

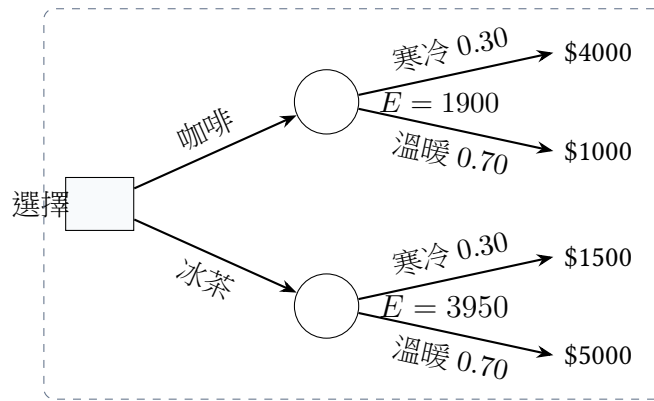


圖 2: 攤位例子的決策樹。逆推法選擇期望值較大的分支。

例題 3：廠房規模決策

公司可興建大型廠房、小型廠房，或不興建；需求可能為高、中或低。

選項	高需求 (0.25)	中需求 (0.40)	低需求 (0.35)
大型廠房	200000	100000	-120000
小型廠房	90000	50000	-20000
不興建	0	0	0

$$E(\text{大型}) = 0.25(200000) + 0.40(100000) + 0.35(-120000) = 48000.$$

$$E(\text{小型}) = 0.25(90000) + 0.40(50000) + 0.35(-20000) = 35500.$$

$$E(\text{不興建}) = 0.$$

按期望值，大型廠房最佳；但低需求時損失 \$120,000，建議應提及風險而非只報告平均值。

模型檢視：風險概況

兩個選項可以有相近期望值，卻有很不同的下行風險。完整決策分析應報告：

1. 期望值；
2. 最佳與最壞情況報酬；
3. 虧損概率；
4. 決策是重複還是一次性；
5. 決策者的風險承受程度。

4 資訊、貝葉斯定理與 EVPI

資訊只有在能改變決策時才有價值。決策理論可為資訊價值設定上限；資訊不完美時，亦可計算是否值得購買。

完全資訊

完全資訊期望值為

$$EVPI = E(\text{得知狀態後的最佳行動}) - E(\text{目前最佳行動}).$$

它是完美無誤資訊的最高合理價格；任何不完美預報或調查的價值都不應超過 EVPI。

例題 4：廠房規模決策的 EVPI

沒有資訊時，大型廠房的最佳期望值為 \$48,000。

有完全資訊時，公司會在得知真實需求狀態後選擇最佳行動：

狀態	最佳行動	報酬
高	大型廠房	\$200000
中	大型廠房	\$100000
低	不興建	\$0

因此，

$$E(\text{完全資訊}) = 0.25(200000) + 0.40(100000) + 0.35(0) = 90000.$$

$$\text{EVPI} = 90000 - 48000 = 42000.$$

對此決策，任何市場研究報告即使完美，價值亦不超過 \$42,000。

資訊不完美時，利用貝葉斯定理更新概率。若 $H_1, \dots, H_n$ 為可能狀態， F 為證據，則

$$P(H_i | F) = \frac{P(F | H_i)P(H_i)}{\sum_j P(F | H_j)P(H_j)}.$$



貝葉斯更新：新證據先改變概率模型，然後才評估決策。

圖 3: 貝葉斯定理利用證據，把信念由先驗概率更新為後驗概率。

例題 5：以貝葉斯更新市場研究

對廠房問題，假設市場報告為利好 F 或不利 U ，其歷史準確性如下：

狀態	$P(F \text{狀態})$	$P(U \text{狀態})$
高需求	0.70	0.30
中需求	0.50	0.50
低需求	0.20	0.80

先計算

$$P(F) = 0.70(0.25) + 0.50(0.40) + 0.20(0.35) = 0.445.$$

利好報告後的後驗概率為

$$P(H | F) = \frac{0.70(0.25)}{0.445} \approx 0.393,$$

$$P(M | F) = \frac{0.50(0.40)}{0.445} \approx 0.449,$$

$$P(L | F) = \frac{0.20(0.35)}{0.445} \approx 0.157.$$

使用未取整的後驗概率重新評估利好報告後的大型廠房，得

$$E(\text{大型} | F) \approx 104719.$$

小型廠房約得 \$54,719，故利好報告支持大型廠房。

對不利報告， $P(U) = 0.555$ 且

$$P(H | U) \approx 0.135, \quad P(M | U) \approx 0.360, \quad P(L | U) \approx 0.505.$$

使用未取整的後驗概率，

$$E(\text{大型} | U) \approx 2523, \quad E(\text{小型} | U) \approx 20090,$$

故不利報告支持小型廠房。報告能在某些情況改變決策，因此有用。

檢查點：資訊價值

在市場研究例子中，利好報告後選大型廠房，不利報告後選小型廠房。

1. 計算使用報告時的期望值： $0.445E_F + 0.555E_U$ 。
2. 減去無報告時最佳期望值 \$48,000，得到 EVSI。
3. 報告價格 \$10,000 時應否購買？\$25,000 時呢？

5 概率未知時

有時無法指派可信概率，期望值便可能營造虛假精確感；此時可用代表不同不確定性態度的替代準則。

貫穿例子：投資報酬

某學生社團有資金作一年期投資，報酬以千元計。

選項	快速增長	正常增長	緩慢增長
股票	10	6.5	-4
債券	8	6	1
儲蓄	5	5	5

三種經濟狀態均無可靠概率。

準則	規則	例子中的決策
拉普拉斯 最大最小	視各狀態等可能並計算每列平均。 找每列最壞報酬，再選最佳的最壞報酬。	債券／儲蓄同為 5.0。 儲蓄。
最大最大 赫維茨	找每列最佳報酬，再選最佳者。 使用 $\alpha(\text{最佳}) + (1 - \alpha)(\text{最壞})$ 。	股票。 取決於 α ； $\alpha = 0.6$ 時為債券。
最小最大遺憾	建立遺憾矩陣並最小化最大遺憾。	債券。

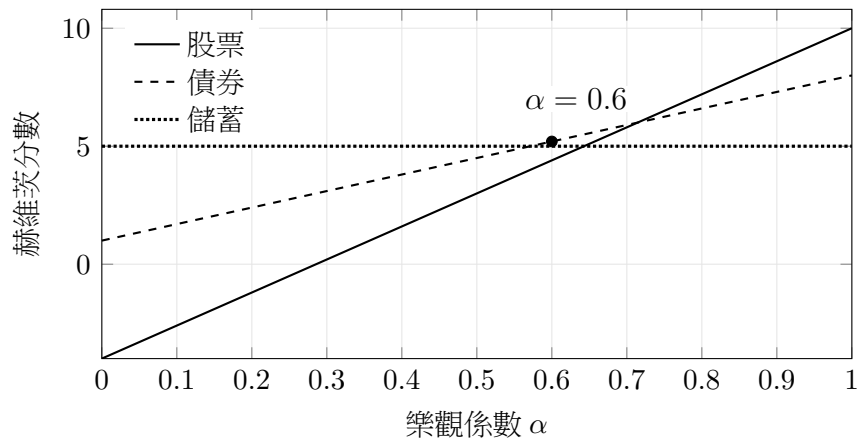


圖 4: 赫維茨分數隨樂觀係數改變；所選方案取決於決策者的風險態度。

例題 6：最小最大遺憾

對每個狀態，以該欄最佳報酬減去每項報酬。

	快速	正常	緩慢	最大遺憾
股票	$10 - 10 = 0$	$6.5 - 6.5 = 0$	$5 - (-4) = 9$	9
債券	$10 - 8 = 2$	$6.5 - 6 = 0.5$	$5 - 1 = 4$	4
儲蓄	$10 - 5 = 5$	$6.5 - 5 = 1.5$	$5 - 5 = 0$	5

最小的最大遺憾為 4，故選債券。此準則追問：「日後揭示真實狀態時，哪項決策可限制因未選該狀態最佳行動而產生的遺憾？」

決策工作坊

[15分鐘]

使用投資例子。

1. 核心路線：運用拉普拉斯、最大最小、最大最大與最小最大遺憾，各用一句解釋其態度。
2. 挑戰路線：求赫維茨選擇由儲蓄轉債券、由債券轉股票時的 α 。
3. 延伸路線：若社團不能容忍任何虧損可能，哪些準則尊重此限制？哪項忽略它？

6 綜合小案例：不確定需求下的庫存

當建模者須連接業務規則、不確定需求與建議時，決策理論最有用。以下例子刻意保持可手算規模，但結構與大型庫存決策相同。

例題 7：季節性 T 恤庫存

學校社團可訂購 10、20 或 30 件節慶 T 恤。每件成本 \$50，售價 \$80；未售出者可按 \$20 清貨。需求超過庫存時，每個未滿足需求造成 \$10 商譽損失。估計需求為：

$$P(D = 10) = 0.30, \quad P(D = 20) = 0.40, \quad P(D = 30) = 0.30.$$

對訂購量 Q 與需求 D ，報酬為

$$80 \min(Q, D) + 20 \max(Q - D, 0) - 50Q - 10 \max(D - Q, 0).$$

得到報酬矩陣：

訂購量	$D = 10$	$D = 20$	$D = 30$	期望值
$Q = 10$	300	200	100	$0.30(300) + 0.40(200) + 0.30(100) = 200$
$Q = 20$	0	600	500	$0.30(0) + 0.40(600) + 0.30(500) = 390$
$Q = 30$	-300	300	900	$0.30(-300) + 0.40(300) + 0.30(900) = 300$

按期望值，最佳訂購量為 $Q = 20$ 。

不同風險準則給出更細緻的結論：

- 最大最小選 $Q = 10$ ，因其最壞報酬仍為 \$100。
 - 最大最大選 $Q = 30$ ，因高需求時可賺 \$900。
 - 最小最大遺憾選 $Q = 20$ ：最大遺憾為 \$400，低於 $Q = 10$ 或 $Q = 30$ 的最大遺憾。
- 因此，同一報酬矩陣可按社團重視平均利潤、下行保障還是遺憾控制而支持不同建議。

敏感度檢查

[8分鐘]

在 T 恤例子中，假設高需求 $D = 30$ 的概率增加，低需求 $D = 10$ 的概率下降。不重算每項準則，先預測哪個訂購量更吸引，再在下列概率下計算期望值：

$$P(D = 10) = 0.20, \quad P(D = 20) = 0.40, \quad P(D = 30) = 0.40.$$

解釋決策是否改變。

模型檢視：報酬矩陣中的隱藏假設

報酬矩陣看似精確，但每個數字均依賴售價、清貨價、商譽損失與需求概率等假設。若輸入估計薄弱，報告應加入敏感度檢查，而非把最終訂購量說成確定。

7 撰寫有理據的決策建議

決策理論不會消除判斷，而是把判斷明確化。建模報告不應只陳述期望值最大的分支，亦應說明建議成立的假設。

模型檢視：決策模型常見錯誤

1. 把猜測概率視為測量事實。
2. 對一次性災難決策使用期望值，卻不討論風險。
3. 忘記從 EVSI 減去資訊成本。
4. 混淆決策與機會節點：前者由建模者選擇，後者由自然決定。
5. 報告準則結果，卻不解釋其代表的風險態度。

競賽式結論

對廠房規模案例，精簡結論可以是：

按先驗需求概率，大型廠房的期望值最高，為 \$48,000；若管理層願意接受低需求時可能損失 \$120,000，便建議選擇大型廠房。完全資訊最多值 \$42,000，故成本高於此數的市場研究應立即拒絕。由於大型廠房建議對低需求損失及高需求的估計概率敏感，我們亦建議報告風險概況；若管理層高度規避風險，應考慮小型廠房。

選修延伸：現代模型審核：平均表現與尾部風險

期望報酬描述平均表現，卻不描述罕見損失可以有多嚴重。把損失寫成 $L = -W$ 。對置信水平 α ，風險值 $\text{VaR}_\alpha(L)$ 是損失的 α 分位數；條件風險值則概括該門檻以外的尾部。對連續損失分佈，

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = E[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)].$$

因此， $\text{CVaR}_{0.95}$ 是最壞 5% 情況的平均損失。在有限模擬中，可取最壞 5% 模擬損失的平均作估計，並報告尾部所含觀測數。

期望損失回答「平均而言會怎樣？」； CVaR 回答「進入不利尾部後，結果有多差？」兩者互補，不可互換。有理據的比較應報告期望報酬、虧損概率、一項明確尾部指標，以及對不確定概率的敏感度。極端觀測稀少時， CVaR 本身亦不確定，故應使用置信區間或重複模擬，不可把含雜訊的尾部估計當作保證的安全界。

課堂總結

1. 決策模型分開選項、自然狀態、概率與報酬。
2. 期望值是長期平均，最適合重複決策。
3. 決策樹以逆推求解：機會節點算期望值，決策節點取最佳選擇。
4. 貝葉斯定理按證據更新概率。
5. EVPI 是資訊價值上限； EVS 須與資訊成本比較。
6. 概率未知時，不同準則代表不同風險與不確定性態度。

檢查點：課末小結

[2分鐘]

完成句子：

「當_____時，期望值是有用準則；但當_____時，它可能誤導。」

8 練習題

核心練習

1. 遊戲收費 \$2；玩家以 0.20 概率贏取 \$12，否則沒有收入。計算期望淨報酬，並判斷是否公平。
2. 食物攤位須選擇麵食或三文治。利潤如下：

	下雨 ($p = 0.40$)	天晴 ($p = 0.60$)
麵食	3200	1600
三文治	1800	3600

計算兩個期望值，並求下雨的損益平衡概率。

3. 對例題 3 廠房問題，計算每個選項的虧損概率。這會否改變建議的表達方式？
4. 醫學篩查有 $P(+ \mid D) = 0.95$ 、 $P(+ \mid \text{無} D) = 0.08$ ，患病率 $P(D) = 0.02$ 。求 $P(D \mid +)$ ，並解釋高敏感度檢測為何仍可有中等陽性預測值。
5. 對投資報酬矩陣，以 $\alpha = 0.3$ 及 $\alpha = 0.8$ 運用赫維茨準則，解釋決策為何改變。

6. 為下列報酬矩陣建立遺憾矩陣，並運用最小最大遺憾：

	S_1	S_2	S_3
A	20	5	8
B	12	12	12
C	4	18	10

練習核對與提示

1. 期望淨報酬為 $0.20(10) + 0.80(-2) = 0.40$ 元，故按期望值而言，此遊戲對主辦者並不公平。
2. 麵食與三文治的期望利潤分別為 2240 及 2880；下雨的損益平衡概率為 $10/17 \approx 0.588$ 。
3. 大型、小型及不興建的虧損概率分別為 0.35、0.35 及 0；報告亦須交代損失幅度。
4. $P(D | +) = 0.019 / (0.019 + 0.0784) \approx 0.195$ ；患病率低時，假陽性相對於真陽性的數量仍可很大。
5. 當 $\alpha = 0.3$ ，股票、債券及儲蓄的赫維茨分數為 0.2、3.1 及 5，故選儲蓄；當 $\alpha = 0.8$ ，分數為 7.2、6.6 及 5，故選股票。
6. 遺憾矩陣各列為 $A : (0, 13, 4)$ 、 $B : (8, 6, 0)$ 及 $C : (16, 0, 2)$ ；最大遺憾為 13、8 及 16，故最小最大遺憾選 B 。

建模挑戰

選擇以下一項，撰寫一頁決策分析簡報，包括：選項、自然狀態、報酬表、概率假設（如有）、所選準則、建議、敏感度評論及一項限制。

1. 學校社團決定舉辦戶外籌款、室內活動或取消。
2. 學生隊伍決定向建模競賽提交穩妥、具風險的創新，或混合項目。
3. 小商店決定季節貨品庫存 10、20 或 30 件。

答案應解釋所選準則為何適合情境。

A 選讀延伸：期望效用

期望值把每一元同等看待。現實中，損失 \$100,000 的痛苦可超過損失 \$50,000 的兩倍。期望效用以效用函數 $u(w)$ 取代報酬 w ，並選擇下式最大的方案：

$$E[u(W)] = \sum_i p_i u(w_i).$$

凹效用函數表示風險規避：決策者已有較多財富時，額外一元的價值較低；臨界門檻附近的損失則可能不可接受。因此，即使大型廠房期望貨幣價值較高，風險規避管理者仍可能選小型廠房。

B 選讀延伸：樣本資訊期望值

若報告可為利好或不利，使用樣本資訊的期望值為

$$E(\text{使用報告}) = P(F) \max_a E(a \mid F) + P(U) \max_a E(a \mid U).$$

因此

$$\text{EVSI} = E(\text{使用報告}) - E(\text{無報告時的最佳決策}).$$

只有 EVSI 超過成本時才應購買報告。若成本已計入終端報酬，不要再次扣除。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《基礎統計學》第二版（OpenStax）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模課程

第 8 講：博弈論與策略建模

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

到本課結束時，讀者應能夠：

1. 解釋策略模型與一般決策模型的區別；
2. 在一個博弈中識別玩家、策略、收益和假設；
3. 透過最大最小值 (**maximin**)、最小最大值 (**minimax**) 和偏好箭線圖找出純策略解；
4. 使用混合策略解決沒有鞍點的 2×2 零和博弈；
5. 解釋博弈價值是保證的長期回報，而非單次博弈中的承諾；
6. 使用納許均衡 (**Nash equilibrium**) 分析部分衝突博弈，並解釋囚徒困境；
7. 判斷何時應將博弈論作為適當的建模工具，並說明其限制。

1 為何是博弈論？

在第 7 講中，決策者面對不確定的自然狀態，例如天氣、市場需求或研究報告；自然界並不會刻意智勝決策者。在博弈論中，至少有另一名玩家也在決策，而且對方可能在推測我們會怎樣行動後改變策略。一個博弈是策略相互作用的數學模型。它必須明確：

- 玩家；
- 每個參與者的可能策略；
- 每個策略組合產生的收益；
- 每個參與者在做決策時所知道的資訊。

啟動：一般決策還是博弈？

[8 分鐘]

對於每種情況，決定是決策理論模型還是博弈論模型更合適。

1. 一家商店在雨季前決定訂購多少把傘。
 2. 兩家餐廳決定是否提供午餐折扣。
 3. 守門員在十二碼罰球中選擇撲向哪一邊。
 4. 一所學校決定是否僱用一個或兩個額外的食堂職員。
- 對於博弈情況，識別參與者及其可能的策略。

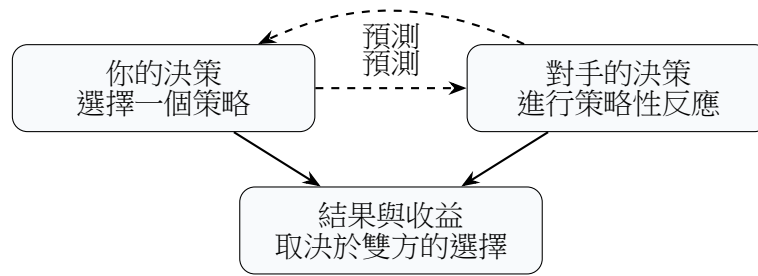


圖 1: 博弈與一般決策的不同之處在於另一方也在進行推理。

總衝突與部分衝突

完全衝突博弈通常稱為零和博弈，其中一方的所得恰好等於另一方的所失。十二碼罰球、石頭剪刀布或搜尋與躲藏問題，常以這種方式建模。部分衝突博弈允許雙方共同獲利或損失。廣告戰爭、軍備競賽、定價決策和環境協議通常具有這種結構。

2 總衝突博弈中的純策略

在雙人零和博弈中，我們從行玩家的角度寫出收益矩陣。行玩家希望數值較大；欄玩家希望數值較小。

純策略、最大最小值與最小最大值

純策略是固定的選擇，例如總是選擇第 1 行。對收益矩陣 $A = (a_{ij})$ ：

$$\text{行玩家的最大最小值} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad \text{欄玩家的最小最大值} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

如果這兩個數相等，則該博弈具有一個鞍點。對應的格子是一個穩定的純策略解：任何一方單獨改變都無法改善。

範例計算 1：具有鞍點的地點競爭

兩家相互競爭的商店選擇大型地區 L 或小型地區 S 。矩陣中的數值表示商店 A 的市場佔有率（百分比）。

商店 A \ 商店 B	B: L	B: S	行最小值
A: L	60	68	60
A: S	52	60	52
欄最大值	60	68	

行玩家選擇 L ，可保證至少取得 60；欄玩家選擇 L ，可把 A 的收益限制於最多 60。因此

$$\max\{60, 52\} = 60 = \min\{60, 68\}.$$

在 (L, L) 處存在一個鞍點，博弈值為 $V = 60$ 。結論並非僅是「雙方都選擇 L 」；而是：A 可保證 60% 的市場份額，而 B 可阻止 A 超出 60%。

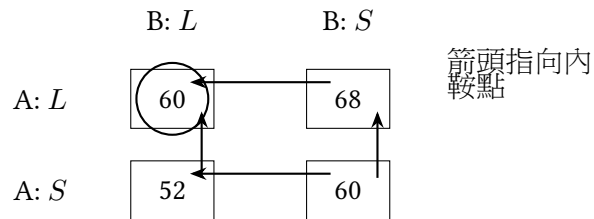


圖 2: 純策略鞍點的偏好箭線圖。垂直箭頭表示 A 的偏好；水平箭頭表示 B 的偏好。

檢查點：純策略檢查

[5 分鐘]

對下列矩陣求出行最小值與欄最大值，並判斷是否存在鞍點。

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

請用文字而非僅僅計算來解釋結果。

範例計算 2：支配策略

在求解博弈前，應先找出理性玩家不會採用的策略。如果另一行在每一欄給予行玩家的收益都不少於本行，並在至少一欄嚴格較高，本行便是被支配策略。同理，若另一欄在每一行給予行玩家的收益都不高於本欄，並在至少一行嚴格較低，本欄便被支配。考慮行玩家的利得矩陣：

	C_1	C_2	C_3
R_1	4	2	5
R_2	3	1	4
R_3	1	6	2

行 R_1 支配 R_2 ，因為 $4 > 3$ 、 $2 > 1$ 且 $5 > 4$ 。因此，行玩家不應選擇 R_2 。移除它後，從欄玩家的角度比較欄 C_1, C_2, C_3 。欄玩家偏好較小的收益，所以數值較大的欄並不吸引。支配關係不一定能直接解出博弈，但可簡化模型，並經常在計算前揭示策略結構。

模型檢視：不要過快移除策略

只有當支配關係對對手每種可能反應都成立時，才可移除被支配策略。不能只因某策略「通常較差」便把它刪去。在數學建模報告中，必須清楚列出支配比較。

3 當不存在純策略穩定時：混合策略

如果不存在鞍點，任何固定策略都可能被對手利用；解決方法是隨機化。混合策略為各個純策略分配概率。核心並不只是籠統地追求「不可預測」，而是要令對手在其純策略之間無差異，因而無法利用可預測的偏好。

例題 3：擊球員與投手

擊球員猜測投手會投快速球 F 或曲球 C ，而投手亦選擇投快速球或曲球。矩陣中的數值是擊球率。

擊球員 \ 投手	投手：F	投手：C	行最小值
猜測 F	.400	.200	.200
猜測 C	.100	.300	.100
欄最大值	.400	.300	

最大最小值是 .200，而最小最大值是 .300。由於它們不相等，不存在純策略鞍點。設 x 為擊球員猜測快速球的概率。若投手投快速球，擊球員的期望擊球率為

$$E_F(x) = .400x + .100(1 - x) = .100 + .300x.$$

若投手投曲球，

$$E_C(x) = .200x + .300(1 - x) = .300 - .100x.$$

擊球員要把兩條直線中較小的一個值最大化；最佳選擇出現在兩線交點：

$$.100 + .300x = .300 - .100x \Rightarrow x = 0.5.$$

博弈價值為

$$V = .100 + .300(0.5) = .250.$$

因此，擊球員應以 0.5 的概率猜測快速球，並以 0.5 的概率猜測曲球。這可保證長期擊球率為 .250。

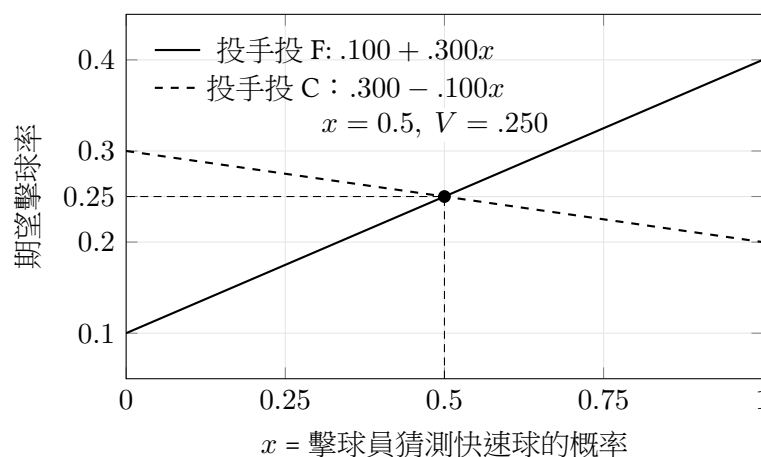


圖 3: 擊球員的混合策略把兩條對手反應線的下包絡線最大化。

透過無差異性解決 2×2 零和博弈

對收益矩陣

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

設 x 為行玩家選擇第 1 行的概率。要求行玩家的最佳混合策略，可令欄玩家的兩種純策略反應無差異：

$$ax + c(1 - x) = bx + d(1 - x).$$

要求欄玩家的最佳混合策略，設 y 為欄玩家選擇第 1 欄的概率，並令行玩家的兩種純策略反應無差異：

$$ay + b(1 - y) = cy + d(1 - y).$$

此方法在檢查不存在鞍點後有效。

範例 4：掠食者與獵物

獵物動物選擇躲藏或逃跑。掠食者選擇伏擊或追逐。數值為獵物的生存概率。

獵物 \ 掠食者	伏擊	追逐
躲藏	0.30	0.60
逃跑	0.50	0.40

不存在鞍點。設 x 為獵物躲藏的概率。如果掠食者伏擊，

$$E_A(x) = 0.30x + 0.50(1 - x) = 0.50 - 0.20x.$$

如果掠食者追逐，

$$E_P(x) = 0.60x + 0.40(1 - x) = 0.40 + 0.20x.$$

令它們相等得到

$$0.50 - 0.20x = 0.40 + 0.20x \Rightarrow x = 0.25.$$

獵物應躲藏 25%，逃跑 75%。保證的生存概率為

$$V = 0.50 - 0.20(0.25) = 0.45.$$

對於掠食者，設 y 為伏擊的概率。使獵物的兩行相等：

$$0.30y + 0.60(1 - y) = 0.50y + 0.40(1 - y) \Rightarrow y = 0.5.$$

掠食者應以 50% 的概率伏擊，以 50% 的概率追逐。

模型檢視：混合策略意味甚麼？

混合策略不表示玩家無所適從，而是玩家刻意隨機化，以免被對手利用。當互動重複多次，或不可預測性本身具有策略價值時，這個結果才特別有意義。在單次高風險博弈中，玩家仍可能按矩陣未有表示的資訊選擇純策略行動。

4 對抗自然的博弈：保守保證

有時「對手」並非具策略性的玩家，例如市場需求、經濟狀況、天氣或機器故障。若概率已知，第 7 講的期望值方法較合適；若概率未知，而決策者重視可保證的底線，則可把自然狀態視作對手。

例題 5：低產量或高產量

一家公司選擇低產量或高產量，經濟則可能景氣低迷或景氣良好。收益以千美元計。

公司 \ 經濟	景氣低迷	景氣良好	最差情況
低產量	500	300	300
高產量	100	900	100

純策略最大最小決策會選擇低產量，保證收益為 300；但混合策略或可保證更高收益。令 x 為選擇低產量的概率。在景氣低迷時，保證收益為

$$E_P(x) = 500x + 100(1 - x) = 100 + 400x.$$

在景氣良好時，

$$E_G(x) = 300x + 900(1 - x) = 900 - 600x.$$

令兩者相等：

$$100 + 400x = 900 - 600x \Rightarrow x = 0.8.$$

公司應使用 80% 的小產量和 20% 的大產量，保證

$$V = 100 + 400(0.8) = 420.$$

這比純策略最大最小決策所保證的 300 更高。

檢查點：決策理論或對抗自然？

[5 分鐘]

在產量例題中，假設可取得可靠概率： $P(\text{景氣低迷}) = 0.30$ 且 $P(\text{景氣良好}) = 0.70$ 。公司是否仍應採用保守的混合策略？計算低產量與高產量的期望值，並與博弈論的保證收益比較。

5 部分衝突與納許均衡

零和博弈只是策略模型的一類。在許多現實情況中，雙方都可能從合作中受益，但每一方亦有單方面背叛的誘因。對部分衝突博弈，我們把收益寫成有序對 (行玩家收益, 欄玩家收益)。

納許均衡

若沒有任何玩家能透過單方面改變策略來提高自身收益，該策略組合便是納許均衡。在偏好箭線圖中，納許均衡是所有相關偏好箭頭共同指向的格子。

例題 6：以軍備競賽說明囚徒困境

兩個國家分別選擇解除武裝或擴充軍備。收益以偏好分數表示，其中 4 最佳，1 最差。

國家 A \ 國家 B	B 解除武裝	B 擴充軍備
A 解除武裝	(3, 3)	(1, 4)
A 擴充軍備	(4, 1)	(2, 2)

若 B 解除武裝，A 偏好擴充軍備，因為 $4 > 3$ ；若 B 擴充軍備，A 仍偏好擴充軍備，因為 $2 > 1$ 。因此，擴充軍備是 A 的支配策略。由對稱性可知，這也是 B 的支配策略，所以納許均衡是 (擴充軍備, 擴充軍備)，收益為 (2, 2)。然而，(解除武裝, 解除武裝) 得到 (3, 3)，對雙方來說都更好。這就是困境：個體理性的選擇導致集體較差的結果。

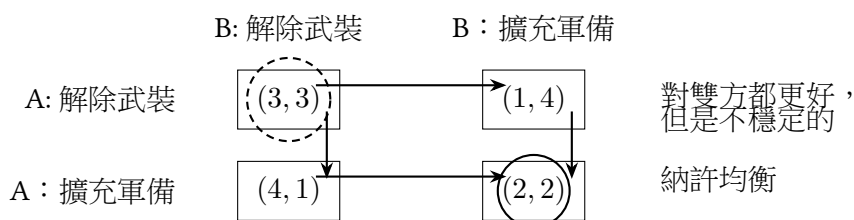


圖 4: 在囚徒困境中，納許均衡並非社會上最佳的結果。

模型檢視：一個常見的建模錯誤

不要把所有衝突都稱為囚徒困境。真正的囚徒困境要求：每名玩家都有背叛的支配策略；相互背叛是納許均衡；相互合作對雙方都比相互背叛更好。許多衝突其實是協調博弈、膽小鬼博弈或談判博弈。

6 差異化策略建模工作室

策略建模工作室

[20分鐘]

根據準備程度選擇一條路線。所有組都應以簡短的書面建議結束。核心路線：價格競爭。兩家飲品攤位選擇低價或高價。收益是每週利潤（以百元計）。

	攤位 B 低價	攤位 B 高價
攤位 A 低價	(6, 6)	(10, 3)
攤位 A 高價	(3, 10)	(8, 8)

繪製偏好箭線圖並找出所有納許均衡。結果對雙方整體而言是否有效率？挑戰路線：抽查博弈。一名學生選擇溫習或不溫習，一名教師則選擇抽查或不抽查。從學生角度記錄的收益是：

	抽查	不抽查
溫習	4	3
不溫習	-2	5

將此視為零和簡化。找出學生的最佳混合策略和遊戲的價值。延伸路線：一般表述。對於矩陣

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

寫出行玩家最大化保證利潤 V 的線性規劃。你不需要求解它，但每個約束都必須有明確的含義。

檢查點：競爭式溝通

[8分鐘]

為本講其中一個博弈寫一段四句的結論：

1. 確定建議的策略；
2. 說明博弈值或均衡結果；
3. 解釋建議背後的策略原因；
4. 表述模型的一個限制。

避免僅寫「我們選擇第 1 行」而沒有解釋對手預計會做甚麼。

7 課程總結

八個記憶點

1. 博弈論描述其他理性玩家會作出反應的決策情境。
2. 收益矩陣必須清楚說明所記錄的是哪一方的收益。
3. 在零和博弈中，行玩家最大化收益，欄玩家則把它最小化。
4. 當最大最小值等於最小最大值時，便存在純策略鞍點。
5. 若沒有鞍點，混合策略可避免固定選擇被對手利用。
6. 在 2×2 零和博弈中，可透過令對手無差異求出最佳混合策略。
7. 在部分衝突博弈中，納許均衡可以穩定但欠缺效率。
8. 只有當收益矩陣和理性假設可信時，博弈論才可提供可靠的策略洞見。

檢查點：離堂檢核

[2分鐘]

完成以下句子：「當 _____ 時，博弈論模型有用；但當 _____ 時，它可能失效。」

8 練習題

核心練習

1. 對每個零和矩陣求出行最小值與欄最大值，並判斷是否存在鞍點。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 一名守門員選擇左或右。一名射手選擇左或右。條目是得分機率：

	守門員 L	守門員 R
射擊 L	0.55	0.90
射擊 R	0.85	0.60

檢查是否存在鞍點。如果不存在，找出射手的最佳混合策略和博弈價值。

3. 一家公司面對不確定需求，選擇保守或進取的生產方式。收益以千元計：

	低需求	高需求
保守	40	60
激進	10	100

把需求視為自然狀態。求出最佳純策略最大最小決策，再判斷混合策略能否保證更高收益。

4. 為工作室中的定價博弈繪製偏好箭線圖。任何一方是否有支配策略？納許均衡是否具帕累托效率？
5. 在本講的囚徒困境矩陣中，解釋為甚麼 (解除武裝, 解除武裝) 並非納許均衡，即使它對兩國都較有利。

- 給出一個不應建模為零和博弈的現實情境。解釋若強行以零和收益矩陣描述，會遺失甚麼重要資訊。

建模挑戰

選擇一個情境，準備一頁策略建模簡報，內容包括玩家、策略、收益表、假設、均衡或建議策略，以及模型限制。

- 兩所學校決定是否在同一週末或不同的週末舉辦開放日。
 - 兩家配送公司決定是否進入一個新地區。
 - 一個學生團隊選擇一個競賽主題，同時預期其他團隊可能會選擇甚麼。
- 即使沒有確切的數值數據，簡報亦應對收益值作定性論證。

9 額外課堂問題庫

延伸練習

- 搜尋路線之爭。救援隊搜尋北面或南面，而迷路的遠足者在不知道搜索方案下選擇其中一條路徑。救援隊的收益是他們在一小時內找到遠足者的概率：

	徒步者北	徒步者南
搜尋北面	0.80	0.30
搜尋南面	0.40	0.70

把它視為對抗自然的博弈。求出純策略最大最小方案，以及令成功概率最大的混合策略。

- 罰球解釋。一個團隊聲稱：「我們的射手應該總是射右，因為平均得分率更高。」解釋為甚麼這個論點在策略博弈中可能失敗。請在你的解釋中利用守門員可能的反應。
- 情境中的支配關係。在定價博弈中，其中一行在數學上被支配。提出一個公司在現實中仍可能考慮該策略的原因，並解釋這是否表示收益矩陣並不完整。
- 重複互動。回顧飲品攤位定價博弈。解釋重複的博弈、聲譽或學校規定如何改變均衡結果。說明一回合博弈的哪個假設已經改變了。

策略建模簡報範本

對於競賽式的回應，學生可使用以下結構：

- 玩家：誰作出策略決策？
- 策略：每名玩家實際可行的行動是甚麼？
- 收益：每名玩家重視甚麼？數值收益有甚麼依據？
- 解的概念：這是零和博弈、對抗自然的博弈，還是部分衝突博弈？應採用哪種方法？
- 結果：說明鞍點、混合策略、博弈值或納許均衡。
- 解釋：結果對現實情境有甚麼建議？
- 限制：哪些假設最脆弱？

A 可選延伸：較大零和博弈的線性規劃表述

對 $m \times n$ 零和矩陣 $A = (a_{ij})$ ，設 x_i 為行玩家選擇第 i 行的概率。行玩家要把保證收益 V 最大化：

$$\begin{aligned} &\text{最大化 } V \\ &\text{使得 } V \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i, \quad j = 1, \dots, n, \\ &\quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ &\quad x_i \geq 0. \end{aligned}$$

每個不等式表示：即使欄玩家選擇第 j 欄，期望收益亦必須至少為 V 。欄玩家的對偶問題則在類似的約束下最小化 V 。兩者最佳值的相等性與最小最大定理密切相關。

B 可選延伸：重複的囚徒困境

如果僅進行一次囚徒困境，背叛是個人理性的。如果重複多次，合作可以變得穩定。一種簡單的策略是以牙還牙：先合作，然後模仿對手的上一步行動。它獎勵合作並懲罰背叛，但僅在玩家預期未來互動並能可靠地觀察彼此的行動時。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- ECON 159：博弈論（Open Yale Courses）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 9 講：微分方程與動態模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 解釋甚麼時候微分方程比差分方程更為合適；
2. 運用「流入速率減流出速率」或「速率與當前數量成正比」的概念建立一階模型；
3. 求解並解釋指數、邏輯斯諦、冷卻及簡單污染模型；
4. 運用相線把平衡點分類為穩定或不穩定；
5. 運用歐拉法、改良歐拉法／Heun法及 RK4 的概念近似動態模型；
6. 運用零斜線閱讀基本雙種群相平面；
7. 交代動態模型的假設、參數、驗證證據及限制。

1 為何使用微分方程？

差分方程按固定步長更新系統：

$$P_{n+1} = P_n + kP_n.$$

微分方程則描述瞬時變化率：

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

當變化在本質上是連續的，或時間步長小得足以令連續近似更容易解釋時，第二種表達方式較為合適。

引入：選擇時間語言

[12分鐘]

對以下每種情況，判斷使用差分方程還是微分方程較為自然，並提出一項理由。

1. 一個銀行帳戶每月收取一次利息。
2. 一杯熱飲放在桌上後持續冷卻。
3. 一所學校每天早上記錄缺席學生人數。
4. 河流持續把湖中的污染物沖走。

建模要點：數學表述應配合機制的時間特性，而不是只配合我們碰巧擁有的數據表。

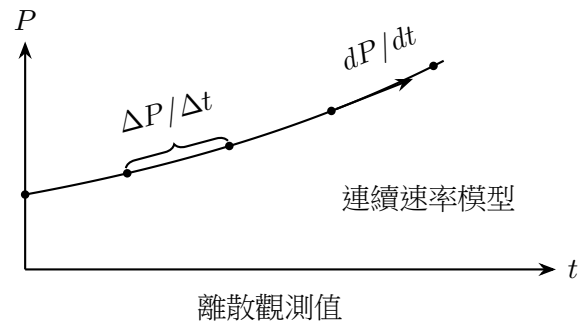


圖 1: 微分方程把許多微小更新理想化為一條瞬時速率定律。

核心詞彙

一階常微分方程具有以下形式：

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

初值問題另外指定起始值 $y(t_0) = y_0$ 。若某個值 y^* 滿足 $f(y^*) = 0$ ，它便是平衡點。若附近的解向它移動，它是穩定的；若附近的解遠離它，它則是不穩定的。

2 指數增長與衰減

最簡單的速率定律假設變化率與當前數量成正比：

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

若 $k > 0$ ，數量按指數增長；若 $k < 0$ ，數量按指數衰減。

已解例題 1：人口增長與外推的風險

假設某人口在 1970 年為 203.2 百萬，在 1990 年為 248.7 百萬。令 t 表示自 1970 年起經過的年數，並假設

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(0) = 203.2.$$

分離變量可得

$$\frac{dP}{P} = k dt \Rightarrow \ln P = kt + C \Rightarrow P(t) = 203.2e^{kt}.$$

利用 1990 年的數值估計 k ：

$$248.7 = 203.2e^{20k} \Rightarrow k = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{248.7}{203.2}\right) \approx 0.0101.$$

模型對 2000 年的預測為

$$P(30) = 203.2e^{0.0101(30)} \approx 274.9 \text{ 百萬}.$$

這是合理的短期估計，但同一模型會預測人口無限增長。只有當資源、政策及人口結構仍與校準期相近時，這條方程才適用。

模型檢視：模型批判： k 隱藏了甚麼？

參數 k 把出生率、死亡率、移民、年齡結構、經濟條件、政策及文化壓縮成一個數值。一份良好的報告不應只指出 $k \approx 0.0101$ ，還應說明為何常數 k 是一項簡化，以及這項假設在多遠的未來仍然可信。

3 邏輯斯諦增長與相線推理

指數增長忽略了資源有限的情況。一種常見的改良是邏輯斯諦模型：

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{M} \right),$$

其中 M 是環境容納量。當 P 接近 M 時，因子 $1 - P/M$ 會降低增長率。

已解例題 2：在指數模型與邏輯斯諦模型之間作選擇

一個封閉池塘的魚群初始數量為 $P(0) = 80$ 。生態學家認為池塘最多可容納 $M = 500$ 條魚，並估計每月增長率為 $r = 0.40$ 。

$$\frac{dP}{dt} = 0.40P \left(1 - \frac{P}{500} \right).$$

邏輯斯諦方程的解為

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-rt}}, \quad A = \frac{M - P_0}{P_0}.$$

此處 $A = (500 - 80)/80 = 5.25$ ，所以

$$P(t) = \frac{500}{1 + 5.25e^{-0.40t}}.$$

當 $t = 6$ 個月時，

$$P(6) = \frac{500}{1 + 5.25e^{-2.4}} \approx 339.$$

未經四捨五入的計算值為三百三十八點七。若採用相同初始增長率，指數模型給出 $80e^{0.40(6)} \approx 882$ ，已超過池塘的容納量。邏輯斯諦模型把這項物理限制寫入方程，因此更為可信。

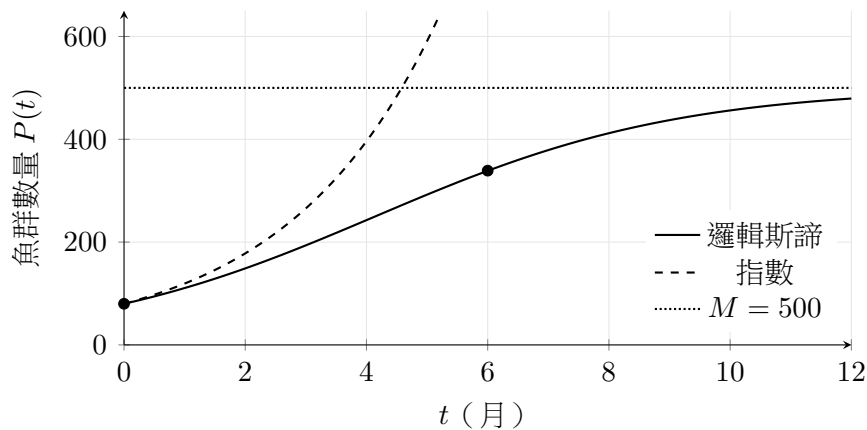
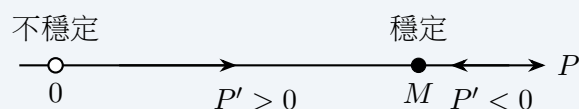


圖 2: 邏輯斯諦模型起初近似指數增長，其後逐漸彎向環境容納量。

邏輯斯諦模型的相線

對自治方程 $P' = rP(1 - P/M)$ 而言，平衡點為 $P = 0$ 及 $P = M$ 。若 $0 < P < M$ ，則 $P' > 0$ ；若 $P > M$ ，則 $P' < 0$ 。因此，0 是不穩定平衡點，而 M 是穩定平衡點。



檢查點：相線檢查

對 $y' = y(3 - y)$ ：

1. 找出所有平衡點；
2. 判斷各區間上 y' 的符號；
3. 把每個平衡點分類為穩定或不穩定；
4. 分別說明 $y(0) = 1$ 、 $y(0) = 5$ 及 $y(0) = -1$ 時的長期行為。

4 速率平衡模型：冷卻與污染

許多微分方程模型都建基於以下原理：

$$\text{變化率} = \text{流入速率} - \text{流出速率}.$$

相對於背誦一系列公式類型，學生更容易記住這條原理。

已解例題 3：牛頓冷卻定律

一杯茶放在溫度為 25°C 的房間時，其溫度為 90°C 。牛頓冷卻定律假設冷卻速率與溫差成正比：

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25), \quad T(0) = 90.$$

方程的解為

$$T(t) = 25 + 65e^{-kt}.$$

若 10 分鐘後溫度為 55°C ，則

$$55 = 25 + 65e^{-10k} \Rightarrow e^{-10k} = \frac{30}{65} \Rightarrow k \approx 0.0773.$$

為求出茶降至 40°C 的時刻：

$$40 = 25 + 65e^{-0.0773t} \Rightarrow t \approx 19.0 \text{ 分鐘}.$$

穩定平衡點是環境溫度 25°C 。

已解例題 4：以流入速率減流出速率描述湖泊淨化

一個湖的體積為 $V = 10^9 \text{ L}$ ，清水以每年 $r = 5 \times 10^7 \text{ L}$ 的速率流入及流出。令 $p(t)$ 表示污染物的克數。若不再有新污染物進入，污染物便以濃度 p/V 流出：

$$\frac{dp}{dt} = 0 - r \frac{p}{V} = -\frac{r}{V}p = -0.05p.$$

因此

$$p(t) = p_0 e^{-0.05t}.$$

污染物減至初始數量的 10% 所需時間為

$$0.10p_0 = p_0 e^{-0.05t} \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{0.05} \approx 46.1 \text{ 年}.$$

這個模型解釋了為何即使污染物停止流入，環境淨化仍可能十分緩慢：相關時間尺度是沖洗時間 $V/r = 20$ 年。

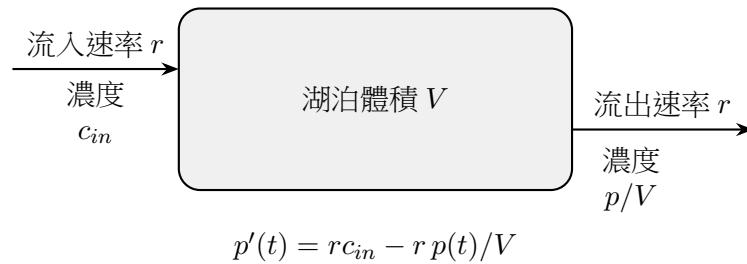


圖 3: 湖泊污染模型可直接由「流入速率減流出速率」建立。

模型檢視：效度驗證與限制

速率平衡模型假設完全混合，即污染物濃度在湖中各處相同。對大型湖泊而言，這項假設可能不成立。報告應討論湖水是否充分混合、流入及流出速率會否隨季節改變，以及污染物會否沉積於底泥後再進入水體。

已解例題 5：重複用藥

某種藥物在濃度高於 $L = 2 \text{ mg/L}$ 時有效，在高於 $H = 8 \text{ mg/L}$ 時則不安全。服藥後，血液濃度按以下方程衰減：

$$C' = -kC, \quad k = 0.18 \text{ hr}^{-1}.$$

若每次服藥令濃度增加 $H - L = 6 \text{ mg/L}$ ，則下一次服藥前的殘餘濃度應逐漸趨近 L 。當重複用藥間隔為 T 時，其極限殘餘濃度為

$$R = \frac{H - L}{e^{kT} - 1}.$$

令 $R = L$ ，可得

$$L = \frac{H - L}{e^{kT} - 1} \Rightarrow e^{kT} = \frac{H}{L} \Rightarrow T = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{H}{L}\right).$$

在本例中，

$$T = \frac{1}{0.18} \ln 4 \approx 7.70 \text{ 小時}.$$

解釋：每 8 小時一次的服藥安排與理想間隔接近，但稍慢；只有在考慮臨床安全範圍及病人差異後，才可判斷是否可接受。

檢查點：用藥間隔解釋

若身體更快排走藥物而令 k 增加，建議的間隔 T 應增加還是減少？請利用公式及日常語言解釋。

5 數值解：從歐拉法到可靠計算

解析公式十分有用，但許多建模常微分方程並無簡潔解法。在競賽及應用專題中，清楚列出微分方程後再以數值方法求解，往往更切合實際。問題並不只是「按一下按鈕」。學生必須理解數值方法正在做甚麼、預期精度如何，以及如何檢查輸出是否可信。

以數值解作為建模工具

數值解在一列時間網格上近似未知解的數值：

$$t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, \dots$$

其中 h 是步長。數值方法把速率定律

$$y' = f(t, y)$$

轉化為一條更新規則，利用 (t_n, y_n) 附近的資訊求出 y_{n+1} 。步長越小，模型更新越頻密，但所需計算量也越大。

以歐拉法作為基準

歐拉法沿着當前點的切線前進：

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

歐拉法能清楚呈現數值積分的機制，因而很有教學價值。然而，它只有一階精度：全域誤差通常為 $O(h)$ ，所以把 h 減半往往只會令誤差約減半。

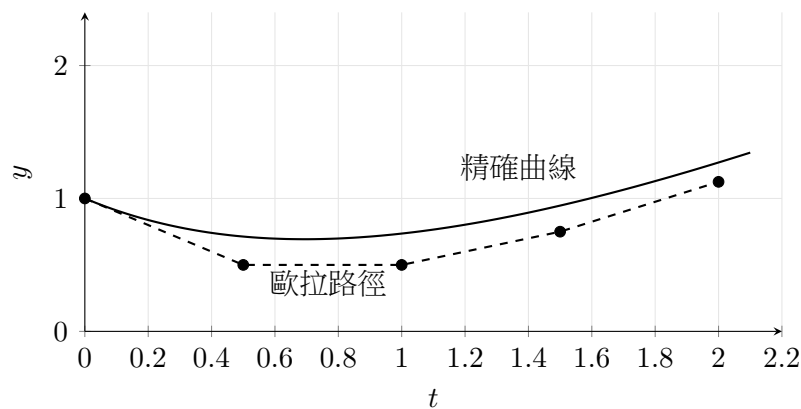


圖 4: 歐拉法以一連串短切線線段取代彎曲的解曲線。

已解例題 6：歐拉近似與步長檢查

用 $h = 0.5$ 在 $0 \leq t \leq 2$ 上近似下列問題的解：

$$y' = t - y, \quad y(0) = 1,$$

並使用更新式

$$y_{n+1} = y_n + 0.5(t_n - y_n).$$

n	t_n	y_n	斜率 $t_n - y_n$	y_{n+1}
0	0.0	1.000	-1.000	0.500
1	0.5	0.500	0.000	0.500
2	1.0	0.500	0.500	0.750
3	1.5	0.750	0.750	1.125

精確解為 $y = t - 1 + 2e^{-t}$ 。當 $t = 2$ 時，精確值 $y(2) \approx 1.271$ ，所以歐拉法的誤差約為 0.146。步長檢查。若改用 $h = 0.25$ 重複歐拉法， $t = 2$ 時的估計約為 1.200，誤差約為 0.070。誤差大約減半，與一階收斂相符。

檢查點：數值方法檢查

為何一次歐拉法計算不足以構成證據？請列出建模者在信任常微分方程的數值結果前應進行的兩項檢查。

改良歐拉法 / Heun 法

歐拉法只使用每一步起點的斜率。若斜率在區間內有所變化，這種處理便可能過於粗略。改良歐拉法又稱 **Heun 法**，它先預測一個暫定終點，再取起點及預測終點斜率的平均值：

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ y_{\text{pred}} &= y_n + hk_1, \\ k_2 &= f(t_n + h, y_{\text{pred}}), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

這是一種二階方法，其全域誤差通常為 $O(h^2)$ 。

已解例題 7：比較歐拉法、Heun 法與 RK4

對同一初值問題 $y' = t - y$ 、 $y(0) = 1$ ，以 $h = 0.5$ 計算至 $t = 2$ 。精確值為 $y(2) = 1.27067$ 。

方法	更新概念	$t = 2$ 時的估計	誤差
歐拉法	只用起點斜率	1.12500	0.14567
改良歐拉法 / Heun 法	取起點及預測終點斜率的平均值	1.30518	0.03451
RK4	四個斜率的加權平均	1.27110	0.00043

重點並不是某一種方法永遠最佳，而是數值方法的選擇確實會影響結果。歐拉法十分適合解釋基本概念；Heun 法及 RK4 則較適合在報告中產生數值結果。

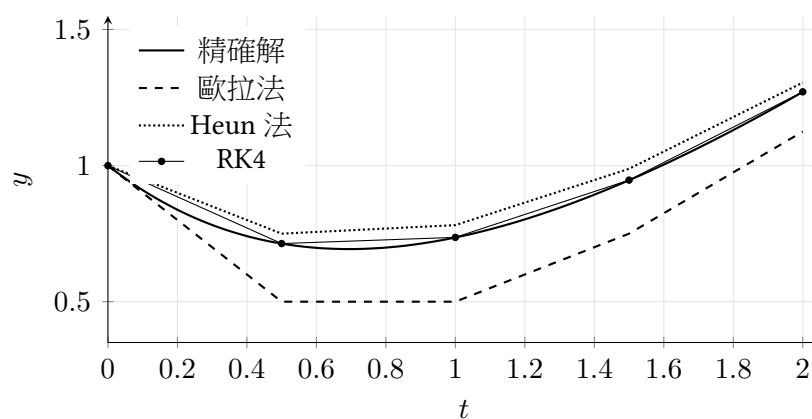


圖 5: 即使步長相同，不同數值方法也可能產生明顯不同的路徑。

四階 Runge–Kutta 法：實用的預設方法

經典四階 Runge–Kutta 法兼顧準確度與簡潔性，每一步在區間內取樣四個斜率：

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

對足夠光滑的問題，RK4 的全域誤差為 $O(h^4)$ 。在學生建模報告中，通常只需說明以 RK4 或標準自適應求解器求解常微分方程，並報告步長或容差檢查。

建模報告的常微分方程數值流程

1. 清楚寫出速率定律。定義變量、單位、參數及初始條件。
2. 選擇方法。課堂示範可用歐拉法；正式報告的數值結果則應使用 Heun 法、RK4 或自適應求解器。
3. 檢查收斂。分別以 h 及 $h/2$ 計算，或收緊求解器容差；結論不應有實質改變。
4. 對照已知行為。數值路徑應符合平衡點、符號、守恆、非負性或環境容納量等性質。
5. 區分數值誤差與建模誤差。更好的求解器不能修正錯誤的機制。

數值方法的穩定性

準確度並非唯一問題。即使微分方程本身簡單而穩定，數值方法仍可能不穩定。考慮

$$y' = -10y, \quad y(0) = 1.$$

真實解 $y = e^{-10t}$ 平滑地衰減至 0。歐拉法給出

$$y_{n+1} = y_n + h(-10y_n) = (1 - 10h)y_n.$$

要使數值解衰減而非爆增，我們需要

$$|1 - 10h| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < h < 0.2.$$

因此，即使真實模型穩定，過大的步長仍可能造成虛假的振盪或爆增。

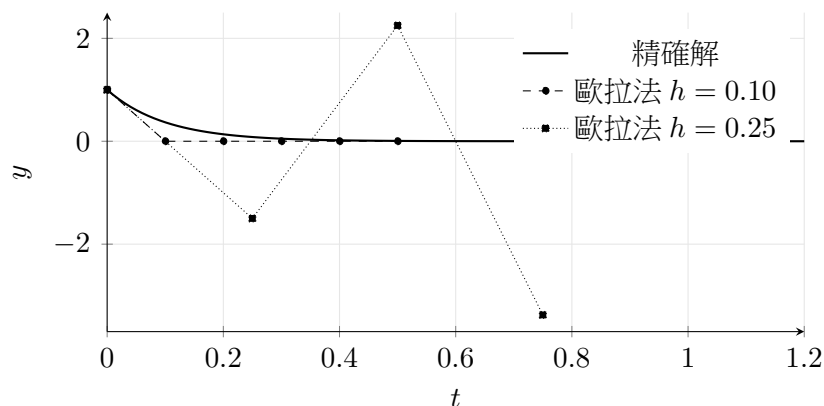


圖 6: 即使衰減方程本身穩定，過大的步長仍可造成虛假的數值不穩定。

模型檢視：競賽報告應如何表述

避免只寫「我們使用歐拉法」。較有力的表述是：

我們以步長 $h = 0.05$ 的 RK4 數值求解常微分方程。把步長縮小至 $h = 0.025$ 後，預測峰值的變化少於 1%，所以相對於參數不確定性，數值誤差很小。模型保持種群非負，並趨向預期的穩定平衡點。

這段文字同時交代了方法、收斂性、定性驗證及限制。

6 系統與相平面：捕食者與獵物

對兩個互動的數量而言，單一相線並不足夠，我們需要使用相平面。其中重要的視覺工具是零斜線，即其中一個導數等於零的曲線。

已解例題 8：捕食者-獵物模型的零斜線

令 $x(t)$ 表示獵物數量， $y(t)$ 表示捕食者數量。一個簡單的 Lotka-Volterra 模型為

$$x' = x(2 - 0.5y), \quad y' = y(-1 + 0.1x).$$

x 的零斜線滿足 $x' = 0$ ，所以 $x = 0$ 或 $y = 4$ ； y 的零斜線滿足 $y' = 0$ ，所以 $y = 0$ 或 $x = 10$ 。正平衡點為

$$(x^*, y^*) = (10, 4).$$

若 $y < 4$ ，獵物增加；若 $y > 4$ ，獵物減少。若 $x > 10$ ，捕食者增加；若 $x < 10$ ，捕食者減少。

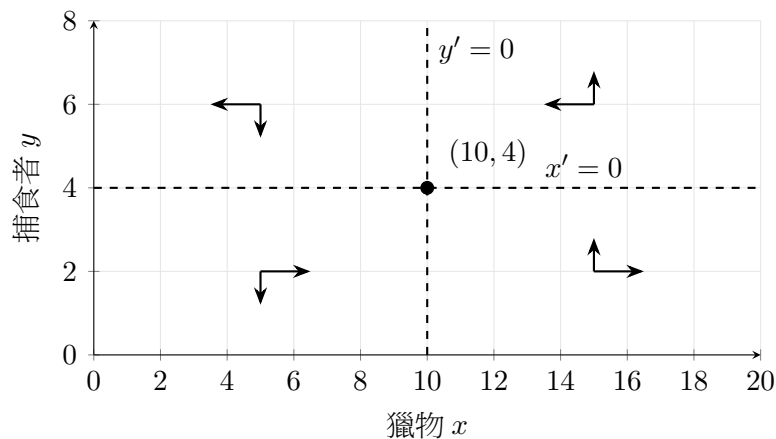


圖 7: 零斜線把捕食者-獵物相平面分成不同區域，顯示各種群在甚麼區域增加或減少。

分層建模工作室

[20分鐘]

選擇其中一條路線。

1. 核心路線：用藥間隔。某種藥物有 $L = 2$ 、 $H = 8$ 及 $k = 0.18 \text{ hr}^{-1}$ 。使用 $T = (1/k) \ln(H/L)$ ，並以日常語言解釋結果。
2. 挑戰路線：湖泊淨化。一個湖有 $V = 3 \times 10^9 \text{ L}$ 及每年 $r = 10^8 \text{ L}$ 的流量。求污染物減至初始數量 25% 所需的時間，再討論一項可能失效的假設。
3. 延伸路線：捕食者-獵物。對 $x' = x(1 - y)$ 及 $y' = y(-2 + x)$ ，找出零斜線、正平衡點，以及四個區域內 x' 及 y' 的符號。

選擇微分方程方法

情況	建議方法	可回答的建模問題
$y' = ky$ 或 $y' = -ky$	分離變量／已知公式	數量增長或衰減有多快？
$y' = rP(1 - P/M)$	邏輯斯諦公式與相線	長期而言會趨近甚麼容納量？
$y' = f(y)$	相線	哪些平衡點是穩定的？
$y' + P(t)y = Q(t)$	積分因子	流入與移除之間如何平衡？
沒有簡潔公式，作課堂計算	歐拉法	一次切線近似如何運作？
沒有簡潔公式，作報告級計算	Heun 法／RK4／自適應求解器	細化步長後，數值預測是否穩定？
兩個互動變量	零斜線／相平面	各區域中哪個種群增加或減少？

模型檢視：數值誤差與建模誤差

若歐拉法給出欠佳的估計，可能有兩類成因。數值誤差表示步長對該微分方程而言過大；建模誤差則表示微分方程本身未能恰當表達真實系統。縮小 h 只能改善數值誤差，不能修正恆溫、完全混合或無限增長等不當假設。

7 撰寫動態模型的結論

模型檢視：競賽式表達

動態模型段落應包含四個部分：

1. 機制：假設了甚麼速率定律或平衡定律？
2. 校準：如何取得 k 、 r 、 M 或 V/r 等參數？
3. 預測與解釋：模型在情境中意味着甚麼？
4. 可信度檢查：有甚麼證據支持模型，而模型可能在哪些情況失效？

薄弱的結論：「邏輯斯諦模型預測有 339 條魚。」

較有力的結論：「在環境容納量為 500 條魚、估計每月增長率為 0.40 的條件下，邏輯斯諦模型預測六個月後約有 339 條魚。同期的指數模型預測超過池塘容納量，所以不適合長期預測。主要不確定性來自環境容納量的估計，應利用池塘面積、食物供應及歷史種群數據加以檢查。」

本課總結

概念	建模意義
微分方程	把一個數量與其瞬時變化率聯繫起來。
初始條件	從一族解曲線中選定其中一條。
指數模型	速率與數量成正比；適合局部描述，長期外推則有風險。
邏輯斯諦模型	接近環境容納量時增長放緩； M 是穩定平衡點。
相線	分析單變量自治微分方程的視覺工具，可顯示穩定性。
速率平衡模型	流入速率 – 流出速率；適用於污染、混合及流動問題。
歐拉法	一階切線近似；可作基準，但通常不足以產生最終結果。
Heun 法／RK4	較高階的數值求解器；報告定量預測前應比較不同步長。
相平面	分析系統的視覺工具；零斜線可找出平衡點及方向區域。
模型批判	交代假設、參數來源、效度驗證證據及適用限制。

檢查點：離堂短答

用三句話解釋指數模型與邏輯斯諦模型之間的差異，再舉出一個邏輯斯諦模型較為可信的真實情境。

核心練習

1. 求解 $y' = 0.3y$ 、 $y(0) = 12$ 。求 $y(5)$ ，並解釋參數 0.3。
2. 某種化學物質按 $C' = -0.12C$ 、 $C(0) = 40$ 衰減。它何時降至 5 以下？
3. 對 $P' = 0.2P(1 - P/1000)$ 及 $P(0) = 100$ ，寫出邏輯斯諦解並估計 $P(10)$ 。
4. 為 $y' = y(y - 4)$ 繪畫相線，並把平衡點分類。
5. 一個房間維持在 22°C 。某物件由 80°C 開始按 $T' = -0.05(T - 22)$ 冷卻。求 $T(t)$ 及 $T(20)$ 。
6. 以 $h = 1$ 對 $y' = 2 - y$ 、 $y(0) = 0$ 應用歐拉法三步，再以 Heun 法重做並比較。

建模挑戰

一個小型水庫最初有 12 百萬公升的水，污染物濃度為 0.08 g/L 。清水每天以 0.6 百萬公升的速率流入及流出。附近工廠可能繼續以未知常數速率 s 克／日加入污染物。

1. 定義 $p(t)$ ，並寫出污染物數量的微分方程。
2. 在 $s = 0$ 時求解模型。
3. 當 $s > 0$ 時求長期污染物水平。
4. 假設 10 日後量得濃度為 0.052 g/L ，估計 s 是較接近 0 還是明顯為正。
5. 為環境管理人員撰寫一項簡短建議，並包括模型限制。

延伸練習

1. 利用分離變量法求解 $y' = ty^2$ 、 $y(0) = 1$ ，並判斷解是否對所有 $t > 0$ 都存在。
2. 對 $y' = y(1 - y)(y - 3)$ 繪畫相線，並把所有平衡點分類。
3. 對 $x' = x(3 - y)$ 、 $y' = y(-2 + x)$ ，找出正平衡點及零斜線，並指出各區域的運動方向。
4. 解釋即使微分方程正確，歐拉法仍可能因 h 過大而不準確或不穩定。以 $y' = -10y$ 為例說明。

選修附錄：積分因子法

一階線性方程的標準形式為

$$y' + P(t)y = Q(t).$$

其積分因子為

$$\mu(t) = e^{\int P(t) dt}.$$

把方程乘以 $\mu(t)$ ，左方會變成乘積的導數：

$$(\mu y)' = \mu Q.$$

因此

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)Q(t) dt + C.$$

這種方法適用於污染、混合、有輸入的加熱／冷卻，以及許多一階工程模型。

附加題庫

1. 咖啡冷卻。咖啡在 24°C 的房間中，於 12 分鐘內由 85°C 降至 60°C 。估計 k ，並預測何時降至 45°C 。
2. 選擇模型。某種群在四個等長時間區間中由 100 增至 180、250、310，而專家認為上限約為 400。解釋指數模型為何可能高估，並提出邏輯斯諦模型的結構。
3. 參數敏感度。對湖泊淨化模型 $p(t) = p_0 e^{-rt/V}$ ，解釋若流入及流出速率 r 倍增，淨化時間會如何改變。
4. 歐拉法設計。一名學生用 $h = 5$ 日模擬快速變化的流行病模型。信任輸出前應進行甚麼檢查？
5. 模型比較。用兩句話比較相線結論與數值模擬結論。兩者各能揭示甚麼可能被另一種方法隱藏的資訊？

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 18.03SC 微分方程（MIT OpenCourseWare）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 10 講：連續最佳化與模型設計

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 區分連續最佳化與第 6 講的離散及線性規劃模型；
2. 由多個子模型構建單變量目標函數，尤其是經濟訂購量模型；
3. 運用一階及二階導數判別法求得並解釋最佳點；
4. 運用偏導數與海森矩陣求解二變量無約束最佳化問題；
5. 解釋拉格朗日乘數背後的幾何概念；
6. 將乘數解釋為影子價格；
7. 說明何時需要數值最佳化，以及如何在建模報告中交代求解器核查。

1 從選擇方案到選擇最佳數值

第 6 講在一個多邊形或一系列整數選項中尋找最佳決策。本講的決策變量則可連續變動：送貨間隔可以是 2.8 日，價格可以是 \$37.40，混合比例可以是 0.62。建模任務不只是對函數求導，而是構建一個真正值得最佳化的函數。

引入：一項決策尚未構成模型

[12 分鐘]

一間校內商店想決定每次應訂購多少瓶裝水。訂購過於頻密會增加行政成本，訂購過多則會增加儲存成本與浪費風險。

1. 決策變量是甚麼？
2. 目標應是每次訂購的總成本、每日成本、利潤，還是服務可靠度？
3. 哪些假設可令問題成為連續問題而非整數問題？
4. 在信任建議之前，你需要哪些數據？

建模要點：連續最佳化在微積分之前已經開始。最重要的步驟，是決定所要最佳化的量，並釐清哪些簡化可令目標函數得以計算。

核心詞彙

決策變量是可控制的量；目標函數衡量我們希望最大化或最小化的量；約束條件限制可行決策；臨界點是導數或梯度等於零的點；全域最佳點在所有可行選擇中最佳，而局部最佳點只在其鄰近範圍內最佳。

2 單變量最佳化：EOQ 模型

經濟訂購量模型既簡單易教，又具有豐富的建模意義。它在兩項變動方向相反的成本之間取得平衡：頻密訂購的成本與過量儲存的成本。

例題 1：推導 EOQ 公式

一個加油站以每日 r 加侖的固定速率售出燃油。每次送貨的固定成本為 d ，每儲存一加侖燃油一日的成本為 s 。令 T 為以日計算的送貨週期長度。

步驟 1：把決策連繫至訂購量。若加油站每次剛好訂購足夠供應 T 日的燃油，則

$$Q = rT.$$

步驟 2：構建每週期成本。每週期的送貨成本為 d 。存量大致由 Q 線性下降至 0，故平均存量為 $Q/2 = rT/2$ 。每週期的儲存成本為

$$s \cdot \frac{rT}{2} \cdot T = \frac{srT^2}{2}.$$

步驟 3：最佳化平均每日成本。

$$c(T) = \frac{d + srT^2/2}{T} = \frac{d}{T} + \frac{srT}{2}, \quad T > 0.$$

於是

$$c'(T) = -\frac{d}{T^2} + \frac{sr}{2}.$$

令 $c'(T) = 0$ ，得

$$T^2 = \frac{2d}{sr}, \quad T^* = \sqrt{\frac{2d}{sr}}.$$

由於

$$c''(T) = \frac{2d}{T^3} > 0,$$

此臨界點為極小值。最佳訂購量為

$$Q^* = rT^* = \sqrt{\frac{2dr}{s}}.$$

解釋：高送貨成本使模型傾向較大量而較疏落的訂購；高儲存成本則使模型傾向較小量而較頻密的訂購。

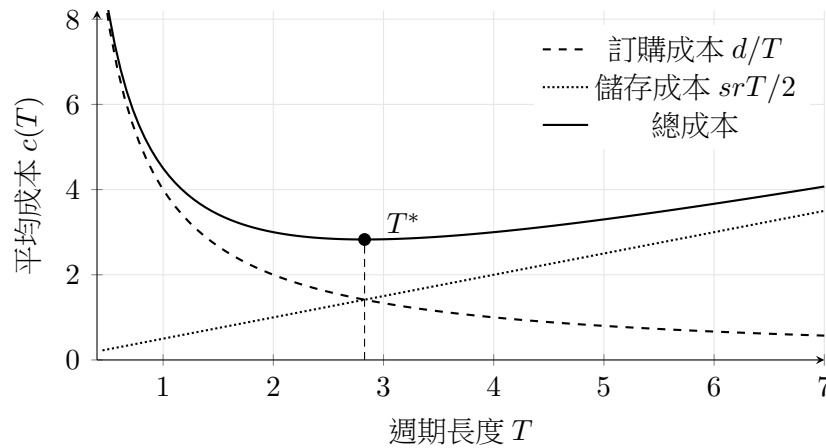


圖 1: EOQ 的最佳點出現在遞減的訂購成本曲線與遞增的儲存成本曲線取得平衡之處。

檢查點：等成本原則

證明在 T^* 處，

$$\frac{d}{T^*} = \frac{srT^*}{2}.$$

然後解釋為何這是核查數值答案是否合理的有效方法。

例題 2：應用 EOQ 並核查敏感度

一間書店每月售出 $r = 200$ 本教科書。每次訂購的成本為 $d = \$120$ ，每本書每月的儲存成本為 $s = \$0.50$ 。

$$T^* = \sqrt{\frac{2(120)}{0.50(200)}} = \sqrt{2.4} \approx 1.55 \text{ 個月},$$

因此

$$Q^* = rT^* = 200(1.55) \approx 310 \text{ 本書}.$$

最低每月成本為

$$c^* = \frac{120}{1.55} + \frac{0.50(200)(1.55)}{2} \approx \$154.9.$$

敏感度：若儲存成本倍增至 $s = 1.00$ ，則

$$T_{new}^* = \sqrt{\frac{2(120)}{1.00(200)}} = \sqrt{1.2} \approx 1.10 \text{ 個月}.$$

週期長度會乘以 $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ ，而非減半。平方根規律的敏感度低於線性規律。

模型檢視：模型批判：EOQ 採用了哪些假設

EOQ 模型假設需求固定、不會缺貨、送貨即時、沒有數量折扣，且訂購量可任意分割。在建模報告中，EOQ 結果應視為基準。若需求具有季節性、送貨存在延誤，或訂購量必須是整箱數目，最終建議便可能需要模擬或整數最佳化。

3 二變量最佳化：梯度與海森矩陣

對於函數 $f(x, y)$ ，梯度

$$\nabla f = (f_x, f_y)$$

指向函數增長最快的方向。臨界點滿足

$$f_x = 0, \quad f_y = 0.$$

海森矩陣

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

有助判別該點的類型。對二變量函數，定義

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2.$$

若 $D > 0$ 且 $f_{xx} < 0$ ，該點是局部極大點；若 $D > 0$ 且 $f_{xx} > 0$ ，則為局部極小點；若 $D < 0$ ，則為鞍點。

例題 3：兩種產品的利潤最佳化

一間公司生產兩種產品。令 x 與 y 為每日產量，並假設估計利潤為

$$P(x, y) = 100x + 120y - x^2 - 2y^2 - xy - 500.$$

負二次項表示價格壓力、擠塞或邊際回報遞減。
求臨界點。

$$P_x = 100 - 2x - y, \quad P_y = 120 - 4y - x.$$

令兩者皆為零：

$$2x + y = 100, \quad x + 4y = 120.$$

解得

$$x^* = 40, \quad y^* = 20.$$

判別類型。

$$P_{xx} = -2, \quad P_{yy} = -4, \quad P_{xy} = -1, \quad D = (-2)(-4) - (-1)^2 = 7 > 0.$$

由於 $D > 0$ 且 $P_{xx} < 0$ ，此點為局部極大點。又因二次型是凹的，所以它亦是全域極大點。
解釋。在 $(40, 20)$ 處，每種產品多生產一單位所帶來的邊際利潤均為零。透過交叉項 $-xy$ ，增加其中一種產品的產量會降低另一種產品的邊際利潤。

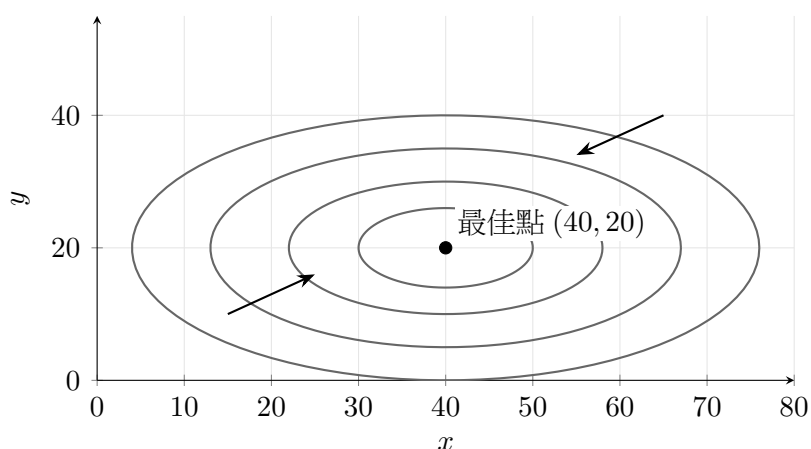


圖 2: 利潤函數的等值線。箭頭表示朝向極大點的上升方向。

檢查點：海森矩陣核查

對於

$$f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2,$$

求內部臨界點，並利用海森矩陣判別法判別其類型。然後解釋：若可行域是一個閉矩形，為何仍須核查邊界。

4 約束條件與拉格朗日乘數

許多連續最佳化問題都帶有約束條件。其幾何意義很簡單：在受約束的最佳點，可達到的最佳目標等值線與約束曲線相切，亦即兩者的梯度互相平行。

拉格朗日乘數法

在約束條件 $g(x, y) = c$ 下最佳化 $f(x, y)$ ，構建

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda [g(x, y) - c].$$

求解

$$\mathcal{L}_x = 0, \quad \mathcal{L}_y = 0, \quad \mathcal{L}_\lambda = 0.$$

等價地，

$$\nabla f = -\lambda \nabla g.$$

乘數 λ 衡量邊際價值：當約束放寬一單位時，最佳目標值會改變多少；其符號取決於所採用的約定，以及問題是最大化還是最小化。

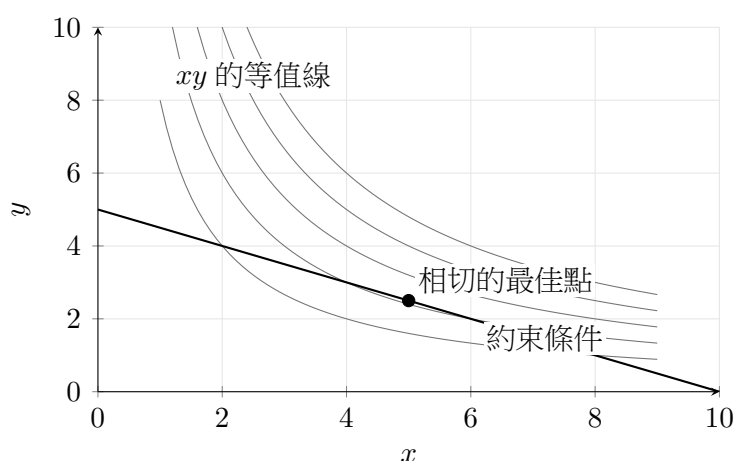


圖 3: 在受約束的最佳點，目標函數的等值線剛好與可行約束曲線相切。

例題 4：固定圍欄長度下的最大面積

一名農夫有 100 米圍欄，要在靠牆位置圍出一個長方形花園的三邊。令 x 為垂直於牆的一邊， y 為平行於牆的一邊。約束條件為

$$2x + y = 100.$$

面積為

$$A = xy.$$

運用拉格朗日乘數：

$$\mathcal{L} = xy + \lambda(2x + y - 100).$$

於是

$$\mathcal{L}_x = y + 2\lambda = 0, \quad \mathcal{L}_y = x + \lambda = 0, \quad 2x + y = 100.$$

由 $\lambda = -x$ 及 $y + 2\lambda = 0$ 可得

$$y = 2x.$$

代入約束條件：

$$2x + 2x = 100 \Rightarrow x = 25, \quad y = 50.$$

最大面積為

$$A^* = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ m}^2.$$

影子價格的解釋：若圍欄總長度稍為增加，最大面積的增加量約等於約束條件的邊際價值。由單變量形式 $A(x) = x(100 - 2x)$ 可知最佳值為 $A^*(F) = F^2/8$ ，故在 $F = 100$ 時， $dA^*/dF = F/4 = 25$ 。在最佳點附近，每多一米圍欄，面積約增加 25 m^2 。

例題 5：受預算約束的生產問題

一間小型工場的生產函數為

$$Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4},$$

其中 L 是勞動單位， K 是資本單位。每單位勞動的成本為 \$50，每單位資本的成本為 \$80。預算為 \$4000：

$$50L + 80K = 4000.$$

在此預算下最大化 Q 。

令

$$\mathcal{L} = L^{0.6} K^{0.4} + \lambda(50L + 80K - 4000).$$

一階條件給出

$$\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{50}{80}.$$

由於

$$Q_L = 0.6L^{-0.4} K^{0.4}, \quad Q_K = 0.4L^{0.6} K^{-0.6},$$

可得

$$\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{0.6}{0.4} \frac{K}{L} = 1.5 \frac{K}{L} = \frac{50}{80} = 0.625.$$

因此

$$K = \frac{0.625}{1.5} L \approx 0.4167L.$$

利用預算式：

$$50L + 80(0.4167L) = 4000 \Rightarrow 83.33L = 4000 \Rightarrow L^* = 48,$$

故

$$K^* = 20.$$

解釋：最佳配搭不會把資金平均用於勞動與資本，而是平衡每一元成本所帶來的邊際產出。

模型檢視：重要限制：等式約束並非問題的全部

拉格朗日乘數可處理平滑的等式約束。許多實際模型亦有不等式約束，例如 $x \geq 0$ 、預算上限、容量限制及最低服務要求。若不等式約束起作用，它便如等式一樣；若約束有鬆弛，其乘數便為零。完整理論稱為 **KKT** 條件，雖然很有用，但對核心課程而言過於技術性。

5 數值最佳化：方程無法整齊求解之時

微積分可以給出方程，但未必能給出閉式解。在競賽作品中，學生經常利用軟件把非線性誤差函數最小化，或把模型評分最大化。關鍵不只是運行求解器，還須知道如何核查與報告結果。

以梯度搜尋作為建模工具

要最大化 $f(\mathbf{x})$ ，基本梯度上升步驟為

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k),$$

其中 α_k 是步長。要把誤差函數最小化，則使用梯度下降：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

實務上， α_k 可透過線搜尋（例如黃金分割搜尋）或求解器程序選定。

例題 6：利潤模型的梯度上升法

沿用例題 3 的利潤模型：

$$P(x, y) = 100x + 120y - x^2 - 2y^2 - xy - 500.$$

由 $(0, 0)$ 開始，

$$\nabla P = (100 - 2x - y, 120 - 4y - x).$$

取步長 $\alpha = 0.10$ ，第一次迭代為

$$(x_1, y_1) = (0, 0) + 0.10(100, 120) = (10, 12).$$

在 $(10, 12)$ 處，

$$\nabla P = (100 - 20 - 12, 120 - 48 - 10) = (68, 62),$$

故

$$(x_2, y_2) = (10, 12) + 0.10(68, 62) = (16.8, 18.2).$$

此路徑會移向 $(40, 20)$ ，但固定步長可能越過最佳點，亦可能收斂緩慢。良好的數值研究應比較不同步長，或採用可靠的線搜尋。

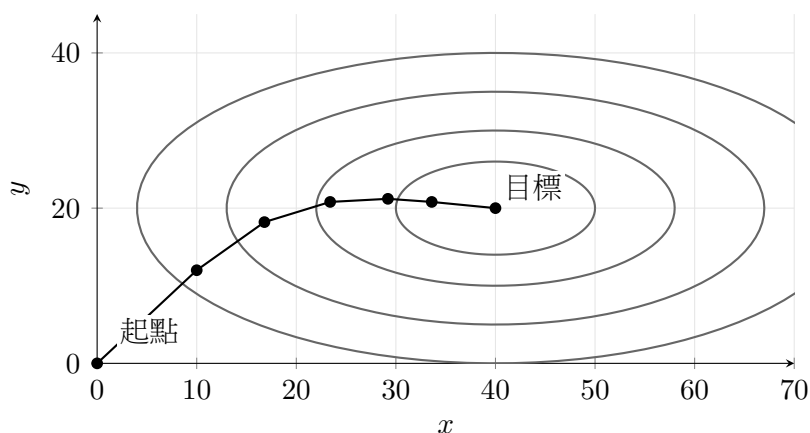


圖 4: 數值最佳化方法沿着改進方向前進，但必須核查其收斂情況。

模型檢視：如何報告數值最佳化

競賽報告不應只說「我們使用了求解器」。較有力的描述如下：

我們採用以梯度為基礎的搜尋，最佳化非線性目標函數。為減低結果對初始值的依賴，我們使用了五個起點，所得最佳點在小數點後三位均相同。我們亦繪製目標函數的等值線，並核證解答處的梯度範數低於 10^{-5} ，以核查結果。步長細化核查令目標值的變化少於 0.2%。

這段文字向讀者表明，數值結果並非來自無從檢視的黑箱。

6 應用延伸：可再生資源最佳化

本節適合用作課堂最後部分或家課，並把最佳化與可持續發展連繫起來。

例題 7：漁業的生物與經濟最佳點

令 N 為魚群數量，並令每年的自然增長為

$$g(N) = aN(N_u - N), \quad 0 < N < N_u.$$

生物最佳點使可持續產量 $g(N)$ 最大。由於

$$g'(N) = a(N_u - 2N),$$

可得

$$N_b = \frac{N_u}{2}.$$

假設每條魚的價格為 p ，而每條魚的捕撈成本 $c(N)$ 會隨魚群增大、捕撈變得容易而下降。可持續捕撈的利潤為

$$\text{TP}(N) = g(N)[p - c(N)].$$

在 N_b 處，

$$\text{TP}'(N_b) = g'(N_b)[p - c(N_b)] - g(N_b)c'(N_b).$$

因為 $g'(N_b) = 0$ 、 $g(N_b) > 0$ 且 $c'(N_b) < 0$ ，

$$\text{TP}'(N_b) = -g(N_b)c'(N_b) > 0.$$

因此，利潤函數在 N_b 處仍在上升，故經濟最佳點 N_p 滿足

$$N_p > N_b.$$

解釋：利潤最大化可能意味着保留較大的魚群，捕撈量亦低於最大可持續產量，因為魚群充裕時，每條魚的捕撈成本較低。

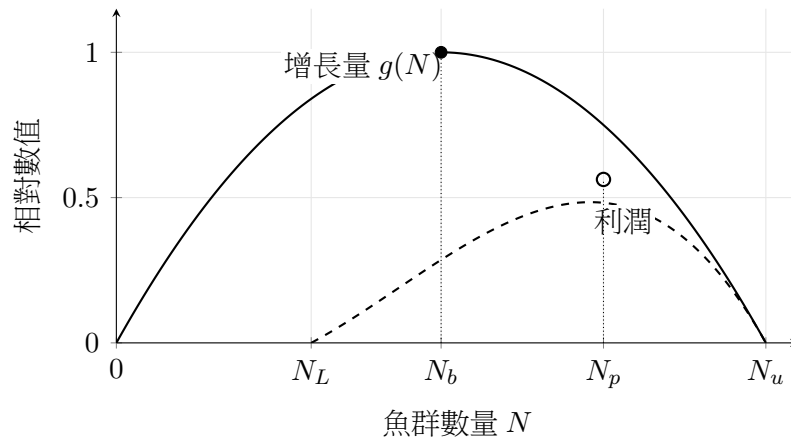


圖 5: 生物最佳點使產量最大；經濟最佳點則可能出現在較大的魚群數量。

模型檢視：政策解釋

數學上的最佳點不會自動成為政策建議。漁業模型應考慮魚群估計的不確定性、非法捕撈、生態系統影響、執法成本及崩潰風險。當測量誤差較大，審慎政策可能會選擇高於經濟最佳點的魚群數量。

7 課堂工作坊與表達

分層最佳化工作坊

[18分鐘]

選擇一條學習路線。

1. 核心路線：EOQ。對 $d = 80$ 、 $r = 120$ 、 $s = 0.40$ ，計算 T^* 與 Q^* ，並核查等成本原則。
2. 挑戰路線：受約束面積。在 $x + 2y = 12$ 的約束下最大化 xy 。利用拉格朗日乘數求解，並解釋其幾何意義。
3. 延伸路線：數值最佳化。對 $P(x, y) = 100x + 120y - x^2 - 2y^2 - xy - 500$ ，由 $(0, 0)$ 開始，以 $\alpha = 0.05$ 進行三次梯度上升迭代，並與精確最佳點 $(40, 20)$ 比較。

模型檢視：競賽式結論

連續最佳化的結論應包括：

1. 決策：列出所建議的決策變量數值。
2. 理據：指出目標函數，並說明最佳點為何出現在該處。
3. 敏感度：描述關鍵參數改變時，建議如何隨之改變。
4. 可行性：核查整數、容量、安全或實際約束。
5. 限制：列出在實際應用中可能不成立的假設。

較弱的結論：「最佳訂購量是 310 本書。」

較有力的結論：「在每月固定需求為 200 本書、每次訂購成本為 \$120，以及每本書每月儲存成本為 \$0.50 的假設下，EOQ 模型建議每隔 1.55 個月訂購約 310 本書。此方案令每月的訂購與儲存成本平衡在約 \$77.5。由於 Q^* 取決於平方根，適中的成本估計誤差只會造成有限影響；然而，建議仍應按整箱數量取整，若需求具有季節性亦應重新評估。」

本課總結

概念	建模意義
連續最佳化	從連續範圍中選擇最佳值，而非只在列出的方案中選擇。
EOQ	平衡固定訂購成本與儲存成本；最佳點遵循平方根規律。
二階導數	確定臨界點是極小點還是極大點。
梯度	指向函數增長最快的方向。
海森矩陣	利用曲率判別多變量臨界點的類型。
拉格朗日乘數	在等值線與約束曲線相切之處找出受約束的最佳點。
影子價格	放寬約束條件的邊際價值。
數值最佳化	當方程無法整齊求解時使用；必須進行收斂與穩健性核查。
模型批判	必須對照假設、數據質素及實際約束，檢視數學上的最佳點。

檢查點：離堂短答

用三句話解釋無約束最佳點與受約束最佳點的分別，然後舉出一個例子，說明微積分所得的最佳點會因實際約束而無法直接採用。

核心練習

1. 對 $c(T) = 90/T + 30T$ ，求 T^* ，並核證 $c''(T^*) > 0$ 。
2. 一間商店的參數為 $d = \$60$ 、 $r = 150$ 單位／週、 $s = \$0.20$ 每單位週。求 EOQ 週期長度與訂購量。
3. 求 $f(x, y) = 60x + 80y - x^2 - y^2 - xy$ 的臨界點，並判別其類型。
4. 利用拉格朗日乘數，在 $2x + y = 40$ 的約束下最大化 $A = xy$ 。
5. 解釋為何滿足 $f_x = f_y = 0$ 的點未必是全域極大點。

建模挑戰

一間學校飯堂售賣小食。若準備量太少，便會損失潛在銷售；若準備量太多，剩餘小食則沒有轉售價值。一個簡化連續模型把每日利潤估計為

$$\Pi(q) = 8q - 0.03q^2 - 120 - 0.5 \max(q - 180, 0),$$

其中 q 是準備的小食數量。 $8q - 0.03q^2$ 一項表示需求飽和，固定成本為 120，最後一項懲罰超過 180 的剩餘量。

1. 即使小食數量是離散的，為何這仍是一個連續最佳化近似？
2. 分別在 $q \leq 180$ 與 $q \geq 180$ 上最佳化 $\Pi(q)$ 。
3. 判定最佳的可行 q ，並加以解釋。
4. 向飯堂經理提出建議前，列出兩項實際核查。

延伸練習

1. 對 $f(x, y) = x^2 - y^2$ ，分別利用海森矩陣判別法與等值線論證，證明 $(0, 0)$ 是鞍點。
2. 一個容器的體積必須為 $V = xyz = 1000$ ，且長方體尺寸 $x, y, z > 0$ 。建立拉格朗日乘數問題，以最小化表面積 $2xy + 2xz + 2yz$ 。你預期會得到甚麼形狀？
3. 對 EOQ 模型，證明 d 有 10% 誤差時， T^* 只改變約 5%。你可運用微積分或平方根關係。
4. 為一個具有多個局部最佳點的非線性模型，描述數值最佳化的模型效度驗證計劃。

選讀附錄：不等式的 KKT 概念

對帶有不等式約束 $g(x) \leq c$ 的最大化問題，只有在約束起作用時，乘數才會活躍。以非正式方式表示：

$$\lambda \geq 0, \quad g(x) \leq c, \quad \lambda[g(x) - c] = 0.$$

最後一項條件表示：約束要麼起作用，並可能具有正價值；要麼存在鬆弛，其影子價格便為零。這是由拉格朗日乘數通往現代非線性規劃的橋樑。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 非線性限制最佳化指南（NEOS Guide）
- 《微積分》第三冊（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 11 講：量綱分析與相似律

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，學生應能：

1. 解釋量綱分析為何能降低實驗的複雜程度；
2. 核查方程是否量綱相容；
3. 以 MLT 系統的質量、長度與時間表示物理量；
4. 透過求解指數方程構建無量綱乘積；
5. 應用白金漢 II 定理縮減變量列表；
6. 利用量綱分析推導風力、單擺週期及烘烤時間等尺度律；
7. 解釋相似律，以及模型實驗為何必須使關鍵無量綱數相同；
8. 撰寫一段建模文字，交代變量、假設、II 群、模型效度驗證與限制。

1 為何要進行量綱分析？

物理模型通常由一系列很長的可能變量開始。若實驗者研究 n 個變量，並為每個變量測試 k 個數值，完整網格便需要 k^n 次試驗。這就是實驗設計中的維數災難。

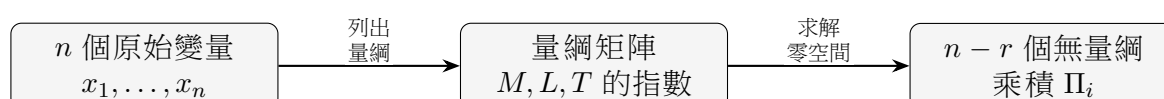
量綱分析不會神奇地找出完整定律。它所運用的原則是：物理定律不能取決於我們用米還是呎、公斤還是磅來量度。因此，重要關係可以用變量的無量綱組合表示，從而把原有的 n 個變量縮減為數目少得多的無量綱群。

引入：實驗負擔

[12 分鐘]

一個團隊希望研究小型水下機械人所受的阻力。他們推測阻力取決於速度 v 、長度 L 、水的密度 ρ 、黏度 μ 與迎風面積 A 。

1. 若每個變量都測試 5 個數值，完整網格需要多少次實驗？
2. 為何這對學校或競賽專案而言可能不切實際？
3. 哪一類數學方法可協助減少實驗次數？



實驗改變 II 群，而非逐一獨立改變所有原始變量。

圖 1: 量綱分析把冗長的變量列表轉化為一組較精簡的無量綱群。

2 量綱與相容性

在力學中，大多數物理量都可用三個基本量綱表示：

$$M = \text{質量}, \quad L = \text{長度}, \quad T = \text{時間}.$$

速度的量綱為 LT^{-1} ；力的量綱為 MLT^{-2} ；能量的量綱為 ML^2T^{-2} 。

量綱相容性

若方程中每個相加或相減的項都具有相同量綱，該方程便是量綱相容的。乘積與幂可以具有不同量綱，但相加各項的量綱必須相同。

例如，在

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

中，每一項的量綱都是 L ，所以此方程通過相容性核查。

物理量	量綱	常用單位
速度 v	LT^{-1}	m/s
加速度 a	LT^{-2}	m/s ²
力 F	MLT^{-2}	N
密度 ρ	ML^{-3}	kg/m ³
壓力 p	$ML^{-1}T^{-2}$	Pa
動力黏度 μ	$ML^{-1}T^{-1}$	Pa s
能量 E	ML^2T^{-2}	J
功率 P	ML^2T^{-3}	W

例題 1：在收集數據前識別錯誤模型

一名學生提出以下模型，描述移動物體所需的力：

$$F = mv + v^2.$$

其中

$$[F] = MLT^{-2}, \quad [mv] = M \cdot LT^{-1} = MLT^{-1},$$

而

$$[v^2] = L^2T^{-2}.$$

右方兩項不能相加，而且兩者的量綱都不是力的量綱。在開始任何數值擬合之前，我們已知道此模型的結構有誤。

建模要點：量綱核查是一種成本很低的錯誤偵測方法。它不能證明模型正確，卻能迅速排除許多不可能的模型。

檢查點：快速相容性核查

判斷下列各方程是否量綱相容。

1. $E = \frac{1}{2}mv^2$ 。

2. $p = \rho gh$ 。

3. $F = \rho A + mv$ 。

$$4. t = 2\pi\sqrt{L/g}.$$

3 構建無量綱乘積

無量綱乘積是若干變量幕的乘積，其總量綱為 $M^0 L^0 T^0$ 。

假設變量 $x_1, \dots, x_n$ 各自具有某個量綱。我們尋找指數 $a_1, \dots, a_n$ ，使

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

成為無量綱量。令 M, L, T 的各次幕相等，便得到一個齊次線性方程組。

例題 2：單擺

假設單擺的週期 t 取決於擺長 ℓ 、質量 m 、重力加速度 g 及釋放角 θ 。各變量為：

$$t(T), \quad \ell(L), \quad m(M), \quad g(LT^{-2}), \quad \theta(1).$$

考慮

$$t^a \ell^b m^c g^d \theta^e.$$

其量綱為

$$T^a L^b M^c (LT^{-2})^d = M^c L^{b+d} T^{a-2d}.$$

要使它成為無量綱量，必須有

$$c = 0, \quad b + d = 0, \quad a - 2d = 0.$$

當中有兩個自由選擇。取 $d = 1$ ，便有 $a = 2$ 、 $b = -1$ 、 $c = 0$ ，所以

$$\Pi_1 = \frac{gt^2}{\ell}.$$

取 $e = 1$ ，則有

$$\Pi_2 = \theta.$$

因此，週期定律必須具有以下形式：

$$\frac{gt^2}{\ell} = H(\theta), \quad \text{或} \quad t = \sqrt{\frac{\ell}{g}} h(\theta).$$

解釋：質量消失了。量綱分析預測單擺週期不取決於擺錘的質量。

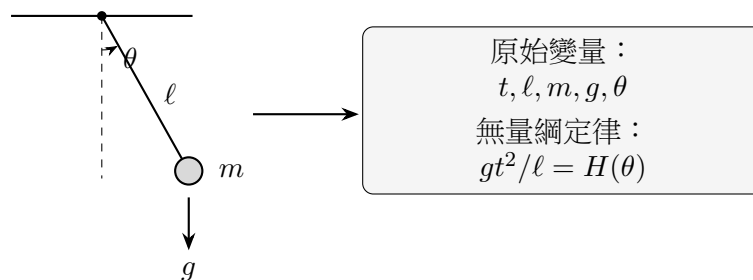


圖 2: 對單擺而言，量綱分析排除了質量，並找出正確尺度 $\sqrt{\ell/g}$ 。

例題 3：風力與遺漏的變量

初步嘗試可能假設標誌所受的風力只取決於風速 v 與面積 A ：

$$F = kv^a A^b.$$

但

$$[v^a A^b] = (LT^{-1})^a (L^2)^b = L^{a+2b} T^{-a},$$

並不合質量量綱。由於 $[F] = MLT^{-2}$ ，可知遺漏了一個帶有質量量綱的變量。
加入量綱為 ML^{-3} 的空氣密度 ρ ：

$$F = k\rho^c v^a A^b.$$

比較量綱得

$$M : 1 = c, \quad T : -2 = -a \Rightarrow a = 2,$$

$$L : 1 = -3c + a + 2b = -3 + 2 + 2b \Rightarrow b = 1.$$

因此

$$F = k\rho v^2 A.$$

解釋：風速倍增，力會變為四倍；迎風面積倍增，力亦會倍增。無量綱常數 k 必須透過實驗求得。

4 白金漢 Π 定理白金漢 Π 定理

若模型採用 n 個有量綱變量，而量綱矩陣的秩為 r ，則物理關係可用

$$n - r$$

個互相獨立的無量綱乘積表示：

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0.$$

對大多數使用 M, L, T 的力學問題，秩通常為 $r = 3$ ，故無量綱群的數目通常是 $n - 3$ 。

便於學習的七步流程

1. 說明因變量及合理的自變量。
2. 寫出每個變量的 MLT 量綱。
3. 構建變量冪的乘積，並求出無量綱組合。
4. 核查每個 Π 群是否確實無量綱。
5. 運用白金漢定理寫出縮減後的關係。
6. 解釋尺度律，並指出仍須由數據決定的部分。
7. 利用無量綱變量的圖像進行模型效度驗證，而非只檢視原始變量。

例題 4：拋射射程

拋射物的水平射程 R 取決於初速度 v 、重力加速度 g 及發射角 θ 。

$$R(L), \quad v(LT^{-1}), \quad g(LT^{-2}), \quad \theta(1).$$

此處有四個變量，但由於只出現 L 與 T ，秩為二。因此，無量綱乘積共有 $4 - 2 = 2$ 個。令

$$R^a v^b g^c \theta^d.$$

其量綱為

$$L^a (LT^{-1})^b (LT^{-2})^c = L^{a+b+c} T^{-b-2c}.$$

要得到無量綱乘積，須有

$$a + b + c = 0, \quad -b - 2c = 0.$$

取 $a = 1$ ，則 $b = -2$ 、 $c = 1$ ，得

$$\Pi_1 = \frac{Rg}{v^2}.$$

角度本身已是無量綱量，故 $\Pi_2 = \theta$ 。所以

$$\frac{Rg}{v^2} = H(\theta), \quad \text{或} \quad \boxed{R = \frac{v^2}{g} H(\theta)}.$$

力學中的精確結果 $R = v^2 \sin(2\theta)/g$ 與量綱分析結果相容。量綱分析找出了尺度 v^2/g ，卻不能找出特定函數 $\sin(2\theta)$ 。

模型檢視：量綱分析能做與不能做的事

量綱分析可以揭示遺漏的變量、不可能成立的方程、尺度指數及有用的無量綱組合。它不能決定無量綱常數或 $H(\theta)$ 一類任意函數；這些部分需要理論、數據或模擬。

5 尺度律與模型改進

例題 5：火雞烘烤與 $w^{2/3}$ 定律

假設烘烤時間 t 取決於特徵長度 ℓ 、量綱為 $L^2 T^{-1}$ 的熱擴散率 κ ，以及一個無量綱溫度比。能把 t 、 ℓ 與 κ 組合成無量綱量的方式只有

$$\Pi = \frac{\kappa t}{\ell^2}.$$

因此，在烤爐條件固定時，

$$t \propto \frac{\ell^2}{\kappa}.$$

若火雞在幾何上相似，重量 w 便與體積成正比，所以

$$w \propto \ell^3, \quad \ell \propto w^{1/3}.$$

於是

$$\boxed{t \propto w^{2/3}}.$$

這有別於民間流傳的「每磅若干分鐘」規則；後者意味着 $t \propto w$ ，並傾向把較大的火雞烤得過熟。

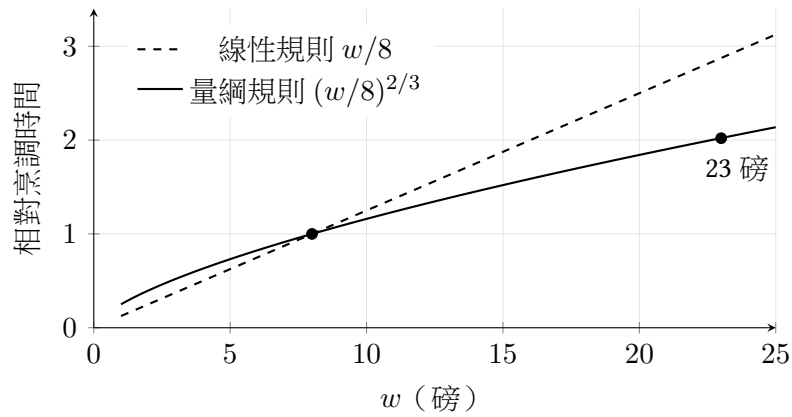


圖 3: $w^{2/3}$ 定律的增長速度比線性的每磅分鐘規則慢。

例題 6：雨滴的終端速度

令終端速度 v 取決於半徑 r 、重力加速度 g 、空氣密度 ρ 及動力黏度 μ ：

$$v(LT^{-1}), \quad r(L), \quad g(LT^{-2}), \quad \rho(ML^{-3}), \quad \mu(ML^{-1}T^{-1}).$$

共有 5 個變量，秩為 3，故預期有 2 個無量綱乘積。一組方便的選擇是

$$\Pi_1 = \frac{v}{\sqrt{rg}}, \quad \Pi_2 = \frac{r^{3/2} \sqrt{g} \rho}{\mu}.$$

因此

$$v = \sqrt{rg} H\left(\frac{r^{3/2} \sqrt{g} \rho}{\mu}\right).$$

解釋：終端速度並非只與 $\sqrt{rg}$ 成正比；黏度與密度會透過第二個無量綱群決定阻力所處的狀態。這正是微小霧滴、雨滴與冰雹不會完全遵循同一簡單定律的原因。

檢查點：尺度解釋

在風力模型 $F = k\rho v^2 A$ 中，若出現下列情況，力會如何改變？

1. 風速變為三倍，而 ρ 與 A 不變。
2. 標誌換成幾何相似、長和寬均為兩倍的新標誌。
3. 同一輛汽車在空氣密度較低的高海拔地區，以相同速度行駛。

6 相似律：從模型到原型

相似律是指實驗室模型與真實原型具有相同的相關無量綱乘積。只有幾何相似並不足夠；除非小型潛艇模型與真實潛艇的關鍵力比亦相同，否則兩者並不具有動力相似性。

經典無量綱數

名稱	公式	物理意義
雷諾數 Re	$\frac{vL\rho}{\mu}$	慣性／黏性
傅汝德數 Fr	$\frac{v^2}{gL}$	慣性／重力
馬赫數 Ma	$\frac{v}{c}$	速度／聲速
韋伯數 We	$\frac{\rho v^2 L}{\sigma}$	慣性／表面張力
阻力係數 C_D	$\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v^2 A}$	無量綱阻力

例題 7：溢洪道模型的傅汝德相似

在實驗室中測試一個比例為 1:20 的水壩溢洪道模型。原型水流速度為 $v_p = 8 \text{ m/s}$ 。由於重力效應佔主導，須使傅汝德數

$$Fr = \frac{v^2}{gL}$$

相同。令 $L_m = L_p/20$ 。傅汝德相似要求

$$\frac{v_m^2}{gL_m} = \frac{v_p^2}{gL_p}.$$

因此

$$v_m = v_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = 8 \sqrt{\frac{1}{20}} \approx 1.79 \text{ m/s}.$$

解釋：模型速度並非 $8/20 = 0.4 \text{ m/s}$ 。對由重力控制的自由表面流動，速度按長度的平方根縮放。

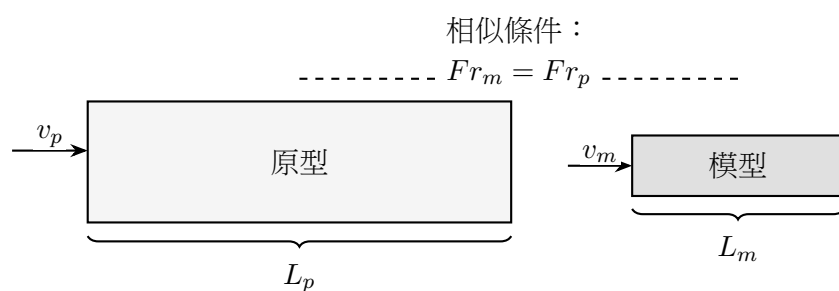


圖 4: 只有相關無量綱數相同，縮尺模型才能用於預測原型。

模型檢視：部分相似

在真實實驗中，可能無法同時使所有無量綱數相同。船舶模型可能要以傅汝德相似描述波浪，又要以雷諾相似描述黏性，但兩者要求的模型速度可能互相衝突。嚴謹的報告應說明哪些 Π 群已相同、哪些尚未相同，以及這會如何影響對預測的信心。

7 分層建模工作坊

量綱分析工作坊

[18 分鐘]

選擇一條學習路線。

1. 核心路線：拋射射程。利用量綱推導 $R = (v^2/g)H(\theta)$ ，再解釋量綱分析未能確定甚麼。
2. 挑戰路線：斯托克斯阻力。假設慢速球體所受阻力 F 取決於半徑 r 、速度 v 及黏度 μ ，證明 $F = k\mu r v$ 。
3. 延伸路線：爆炸波尺度律。假設爆炸半徑 R 取決於能量 E 、空氣密度 ρ 及時間 t ，推導尺度律 $R \propto (Et^2/\rho)^{1/5}$ 。

模型檢視：競賽式表達

良好的量綱分析段落應包括：

1. 因變量與假設採用的自變量；
2. 量綱表與所得 Π 群的數目；
3. 縮減後的無量綱關係；
4. 對尺度關係的物理解釋；
5. 一項模型效度驗證計劃與一項限制。

較弱的表述：「答案是 $t \propto w^{2/3}$ 。」

較有力的表述：「在火雞幾何相似、烤爐條件固定的假設下，烹調時間必須按 $t \propto \ell^2/\kappa$ 縮放。由於重量與體積成正比， $\ell \propto w^{1/3}$ ，所以 $t \propto w^{2/3}$ 。這預測大型火雞每磅所需時間比小型火雞少。主要限制是實際火雞並非完全相似，而烤爐的加熱亦不均勻。」

本課總結

概念	建模意義
MLT系統	利用質量、長度與時間表示物理量。
相容性	相加各項必須具有相同量綱；可快速核查模型錯誤。
無量綱乘積	若干變量幕的乘積，其總量綱為 $M^0 L^0 T^0$ 。
白金漢 Π 定理	把 n 個有量綱變量縮減為 $n - r$ 個無量綱群。
尺度律	揭示尺寸、速度、密度或時間的改變如何影響結果。
相似律	模型與原型的相關 Π 群必須相同。
部分相似	配對主導物理效應，並披露未能配對的效應。
模型效度驗證	擬合或比較無量綱變量，而非只比較原始變量。

檢查點：離堂短答

用三句話解釋在收集數據之前進行量綱分析的用處，並舉出一個無量綱乘積的例子。

練習題

核心練習

1. 在 MLT 系統中，求壓力、功率、密度、黏度與表面張力的量綱。
2. 核查 $p = \rho gh$ 、 $F = ma$ 與 $E = mv + gh$ 是否量綱相容。
3. 對單擺核證 gt^2/ℓ 是無量綱量。
4. 運用量綱分析證明質量—彈簧振子的週期必須具有 $t = C\sqrt{m/k}$ 的形式，其中 k 是量綱為 MT^{-2} 的彈簧剛度。
5. 若 $F = k\rho v^2 A$ ，當 v 倍增而 A 變為三倍時， F 會變為原來的多少倍？
6. 對傅汝德相似，比例為 1:25 的模型代表原型速度為 5 m/s 的河流。求模型速度。

建模挑戰

一個團隊希望設計小型實驗，研究玩具車在空氣中行駛時所受的阻力 F_D 。他們認為 F_D 取決於速度 v 、迎風面積 A 、空氣密度 ρ 、黏度 μ 及特徵長度 L 。

1. 列出所有變量的量綱。
2. 預測應出現多少個無量綱群。
3. 一個可能的群是雷諾數 $Re = vL\rho/\mu$ 。核證它是無量綱量。
4. 提出第二個包含 F_D 的無量綱群。
5. 解釋團隊應如何利用這些群比較小型模型車與真實汽車。
6. 列出此實驗的一項限制。

延伸練習

1. 拋射射程。推導 $R = (v^2/g)H(\theta)$ ，並核證精確公式 $R = v^2 \sin(2\theta)/g$ 與之相容。
2. 終端速度。由 v, r, g, ρ, μ 出發，推導兩個互相獨立的無量綱乘積。
3. 爆炸波。假設爆炸半徑 R 取決於能量 E 、空氣密度 ρ 及時間 t ，證明 $R = C(Et^2/\rho)^{1/5}$ 。
4. 選擇變量。一名學生只以火雞重量 w 建模烹調時間。解釋此變量列表為何並不完整，再提出較完善的列表。
5. 部分相似。解釋在小型水槽實驗中，為何可能無法同時配對雷諾數與傅汝德數。

選讀附錄：選擇 Π 群

完整的 Π 群可以有不同選擇。例如， $Re = vL\rho/\mu$ 與 $1/Re$ 所含的資訊相同。一組良好的 Π 群應：

- 為無量綱量；
- 互相獨立；
- 具有可解釋的物理意義；
- 便於繪圖與實驗；
- 在可能情況下，使因變量只出現在一個群中。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《國際單位制指南》：量值、物理量與量綱（NIST）
- 行星資料表——相對地球數值（NASA NSSDCA）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

第 12 講：圖像與定性建模

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本課後，讀者應能：

1. 在未知精確方程時，以圖像的形狀作為數學模型；
2. 把反應曲線的交點識別並解釋為平衡點；
3. 根據斜率、凹凸性與曲線移動推斷政策影響；
4. 構建簡單的離散動力系統並檢驗其穩定性；
5. 解釋經濟條件 $MR = MC$ ，並把它與供給曲線連繫起來；
6. 利用供給及需求圖像分析從量稅；
7. 撰寫包含假設、圖像與限制的定性建模結論。

1 以圖像作為模型

模型不一定要由完全指定的公式開始。在許多政策與競賽問題中，我們往往先知道定性特徵，然後才知道數值。例如，需求曲線向下傾斜；成本曲線可能先趨平，繼而變得陡峭；威懾所需的配置可能增加，但新增配置的邊際作用遞減。這些特徵本身就是數學資訊。

定性圖像模型利用一個或多個函數的形狀推斷系統行為。其核心問題包括：

- 曲線在何處相交？
- 交點穩定還是不穩定？
- 參數如何使曲線移動？
- 即使精確公式改變，哪些結論仍然穩健？

引入：圖像能告訴我們甚麼？

[12 分鐘]

考慮一間學校飯堂。令 q 為準備的午餐份數， $C(q)$ 為總成本。

1. 繪畫一條合理的成本曲線。它應否遞增？應否是直線？
2. 繪畫價格與需求量之間的一條合理需求曲線。
3. 即使沒有精確方程，仍可由曲線形狀得出甚麼結論？列出一項。

建模要點：圖像記錄了假設。直線表示邊際作用固定；曲線則表示邊際作用會改變。

核心詞彙

反應曲線表示系統某一部分為回應另一部分而需要達到的數值。平衡點是所有反應要求同時獲得滿足的交點。比較靜態分析研究參數使曲線移動後，平衡點會如何改變。

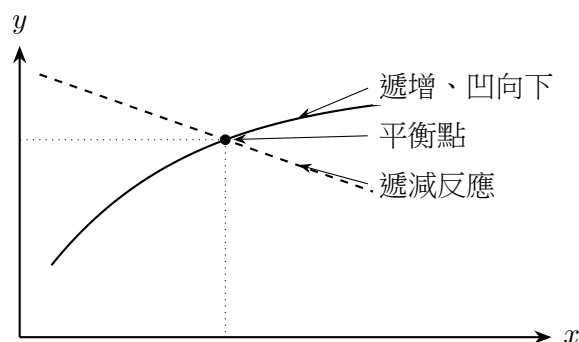


圖 1: 圖像模型把有關方向與曲率的定性假設，轉化為對交點與比較靜態的預測。

2 案例研究一：軍備競賽的圖像模型

本講納入軍備競賽模型，並非因為其政治內容，而是因為它是定性建模的優秀例子。建模者不需要知道精確的軍事公式；反應曲線的形狀已足以產生有用結論。

令 x 為 X 國持有的武器數目， y 為 Y 國持有的武器數目。假設

$$y = f(x)$$

表示：當 X 國有 x 件武器時，Y 國為維持威懾所需的最少武器數目。類似地，

$$x = g(y)$$

表示：當 Y 國有 y 件武器時，X 國所需的最少武器數目。

威懾曲線的假設

核心課程採用三項定性假設。

1. f 與 g 均遞增：一方增加武器，另一方便需要作出更強回應。
 2. 兩者均凹向下：對手最初增加的武器影響很大，其後每次增加的邊際影響可能較小。
 3. 即使對手只有很少武器，兩條曲線的截距仍表示最低反擊要求。
- 這些假設比完整公式弱，卻足以支持政策推理。

例題 1：解讀威懾平衡點

假設兩條反應曲線相交於 (x_m, y_m) 。在此點，X 國相對於 Y 國擁有足夠武器，而 Y 國相對於 X 國亦擁有足夠武器。因此，該點是相互威懾的平衡點。

若目前狀態位於 $y = f(x)$ 下方，Y 國便認為其武器庫不足，並增加武器；若目前狀態位於 $x = g(y)$ 左方，X 國亦會認為其武器庫不足，並增加武器。若每次反應幅度適中，反覆回應會使系統趨向交點。

例題 2：政策引致的曲線移動

當我們探討政策如何改變曲線，圖像模型便能發揮作用。

1. X 國的民防措施。若 X 國更有效地保護其人口，Y 國便需要更多倖存武器才能產生相同的威懾作用。因此，Y 國的反應曲線 $y = f(x)$ 向上移。新平衡點的 y 較大；當 X 國回應 Y 國的武器擴張時， x 通常亦會增加。
2. X 國的機動導彈。若 X 國的武器較難被摧毀，它便只需較少武器來維持相同的生存能力。X 國的反應曲線 $x = g(y)$ 向左移或變得較平坦，兩國的平衡武器數目均可能下降。

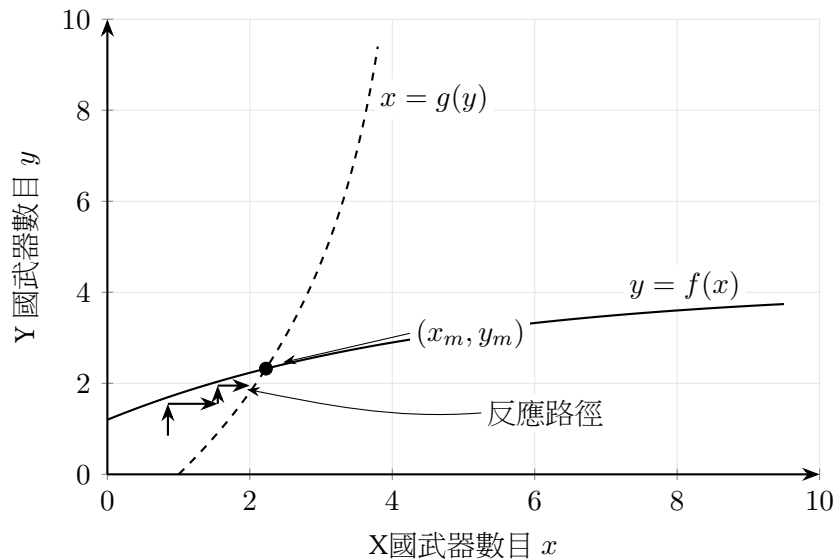


圖 2: 兩條反應曲線決定相互威懾的平衡點。此圖是定性的：結論取決於曲線形狀與移動方向，而非精確數值坐標。

3. 多彈頭。若一件武器能攻擊多個目標，交換比率便會改變。截距效應可能降低所需發射器數目，但攻擊效應亦可能令反應曲線變得更陡。此時純粹定性的圖像可能無法給出唯一答案；建模者必須說明需要更多數據或更明確的公式。

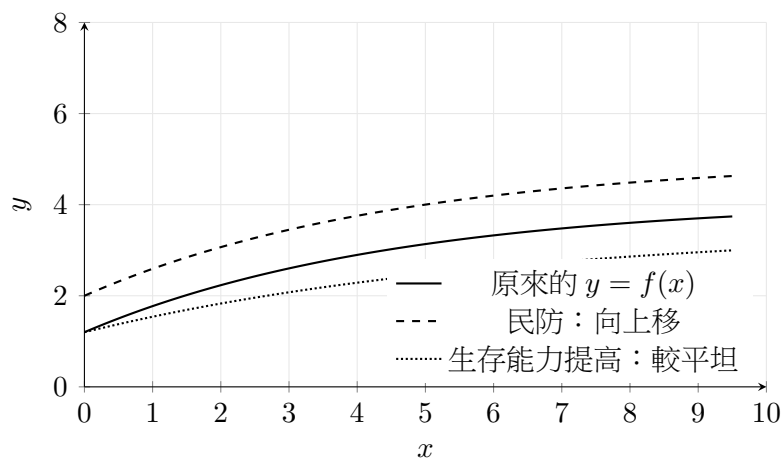


圖 3: 政策分析往往可歸結為曲線移動。關鍵問題是哪一個參數改變，以及曲線向哪個方向移動。

檢查點：圖像政策核查

某國興建更堅固的導彈掩體，令較大比例的武器可在首次攻擊後倖存。哪一條反應曲線會移動：該國本身的曲線，還是對手的曲線？曲線會向上、向下、向左移，還是變得較平坦？用兩句話解釋。

3 離散軍備競賽更新

圖像給出定性方向，離散動力系統則給出一列數值更新。

例題 3：分階段軍備競賽模型

假設 Y 國認為，即使 X 國沒有任何武器，它仍需要 120 件武器；其後 X 國每有兩件武器，Y 國便增加一件。X 國則認為，即使 Y 國沒有任何武器，它仍需要 60 件武器；其後 Y 國每有三件武器，X 國便增加一件：

$$y_{n+1} = 120 + \frac{1}{2}x_n, \quad x_{n+1} = 60 + \frac{1}{3}y_n.$$

在平衡點，

$$y^* = 120 + \frac{1}{2}x^*, \quad x^* = 60 + \frac{1}{3}y^*.$$

把第二條方程代入第一條：

$$y^* = 120 + \frac{1}{2} \left(60 + \frac{1}{3}y^* \right) = 150 + \frac{1}{6}y^*.$$

因此 $\frac{5}{6}y^* = 150$ ，故

$$y^* = 180, \quad x^* = 120.$$

反應係數之積為 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < 1$ ，所以反覆更新會收斂至平衡點。

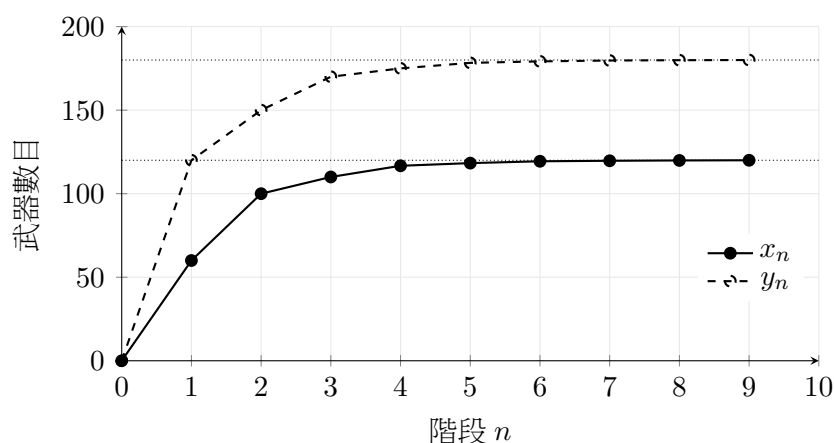


圖 4: 當反應係數之積小於一，分階段軍備競賽模型會以幾何速率收斂至平衡點。

模型檢視：模型批判：更新方程隱藏了甚麼？

更新方程假設雙方只根據對手上一階段的武器庫作出反應，而且係數固定；當中沒有談判、預算限制、國內政治或不確定性。良好的建模報告應把此遞推關係表述為簡化的預警模型，而非完整的政治行為理論。

4 案例研究二：企業行為與 $MR = MC$

圖像建模亦可解釋經濟決策。令 q 為產量。完全競爭企業接受市場價格 p ，故其邊際收益為 $MR = p$ ，而邊際成本為 $MC(q) = TC'(q)$ 。

利潤最大化規則

利潤為

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q).$$

一階條件為

$$\Pi'(q) = MR(q) - MC'(q) = 0.$$

對完全競爭企業而言， $MR = p$ ，因此企業在下列條件成立之處生產：

$$MR = MC.$$

當 $MR > MC$ 時，企業應增加產量；當下一單位的成本高於其收益時，便應停止增加產量。

例題 4：企業的最佳產量

一名小型生產者以每單位 $p = 10$ 元出售產品，總成本為

$$TC(q) = 100 + 2q + 0.1q^2.$$

於是

$$TR(q) = 10q, \quad \Pi(q) = 10q - (100 + 2q + 0.1q^2) = 8q - 0.1q^2 - 100.$$

邊際成本為

$$MC(q) = TC'(q) = 2 + 0.2q.$$

令 $MR = MC$ ：

$$10 = 2 + 0.2q \Rightarrow q^* = 40.$$

最大利潤為

$$\Pi(40) = 8(40) - 0.1(40)^2 - 100 = 60.$$

圖像顯示相同結論：持續生產，直至水平價格線與邊際成本曲線相交。

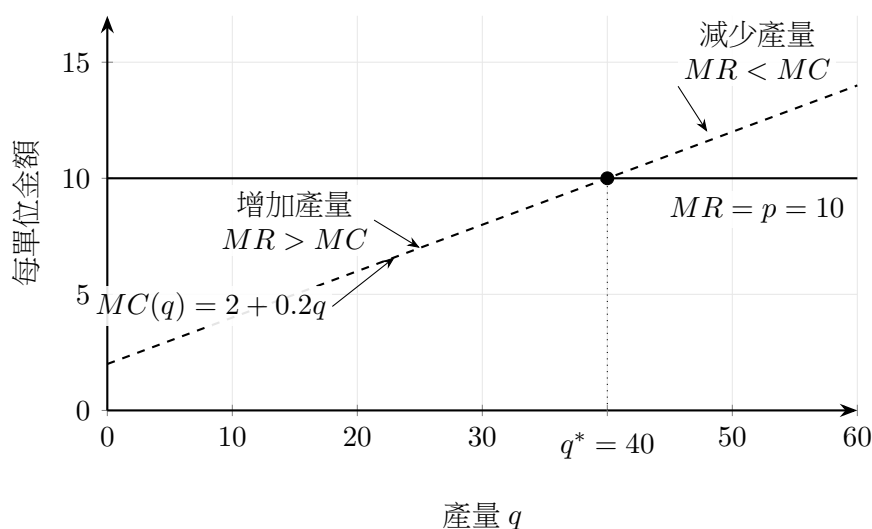


圖 5: 對完全競爭企業而言，利潤最大化產量出現在價格等於邊際成本之處。

檢查點：經濟解釋

若向生產者徵收每單位 2 元的稅，邊際成本便成為 $MC(q) = 4 + 0.2q$ 。新的最佳產量是多少？解釋產量為何下降。

5 汽油稅：供給、需求與稅負歸宿

現在由單一企業轉向整個市場。供給曲線表示生產者願意供應數量 q 時所要求的價格；需求曲線表示消費者願意購買數量 q 時所接受的價格。兩者的交點是市場平衡點。

從量稅會使供給曲線向上移動相當於稅額的距離。消費者支付的價格上升，交易量下降，而稅務負擔由消費者與生產者共同承擔。

例題 5：線性稅負歸宿

假設

$$S(q) = 1 + 0.5q, \quad D(q) = 5 - 0.5q.$$

原有平衡點滿足

$$1 + 0.5q = 5 - 0.5q \Rightarrow q^* = 4, \quad p^* = 3.$$

從量稅 $\tau = 1$ 使供給曲線移至

$$S_1(q) = S(q) + 1 = 2 + 0.5q.$$

新平衡點滿足

$$2 + 0.5q = 5 - 0.5q \Rightarrow q_1 = 3, \quad p_1 = 3.5.$$

消費者每單位多付 $p_1 - p^* = 0.5$ 元。生產者收到 $p_1 - \tau = 2.5$ 元，比原來少0.5 元。在這個對稱例子中，一元稅款由雙方平均分擔。

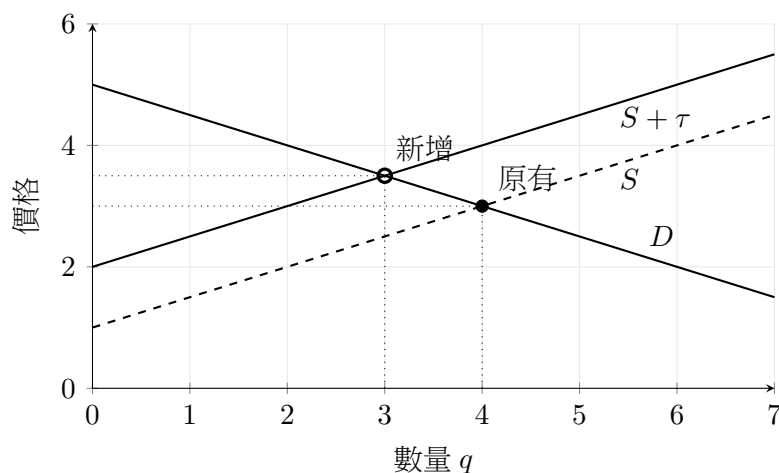


圖 6: 從量稅使供給曲線向上移。價格上升的幅度少於稅額，而交易量下降。

稅負歸宿與彈性

市場中較缺乏調整彈性的一方承擔較多稅負。若需求曲線陡峭，消費者難以減少購買量，故大部分稅負由消費者承擔；若需求曲線平坦，消費者容易轉用其他選擇，生產者便會吸收較多稅款。

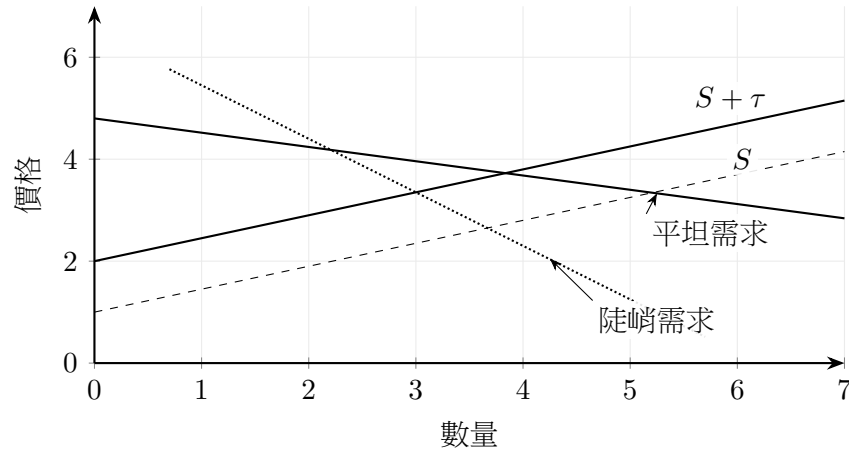


圖 7: 同一項稅收會因需求曲線的斜率而產生不同影響。這項定性結論不需要精確函數形式。

模型檢視：汽油需求的短期與長期差異

石油價格衝擊剛發生時，需求往往缺乏彈性：人們仍須通勤，汽車無法立即更換，公共交通亦可能不可用。汽油稅此時會推高價格，但交易量可能只略為下降。經過數年後，隨着人們購買節能汽車、改變路線、共乘或使用公共交通，需求便會變得較有彈性。同一項稅收屆時能更有效地減少消耗量。政策結論取決於所考慮的時間範圍。

6 分層工作坊：選擇以圖像為基礎的模型

分層建模工作坊

[18分鐘]

選擇一條學習路線。

1. 核心路線：稅務圖像。畫出供給與需求曲線，再把供給曲線向上移動一個稅額，並標示新舊平衡點。說明需求陡峭時哪一方支付較多稅款。
2. 挑戰路線：分階段更新。對

$$y_{n+1} = 200 + \frac{1}{3}x_n, \quad x_{n+1} = 80 + \frac{1}{4}y_n,$$

求平衡點並檢驗穩定性。

3. 延伸路線：曲線移動論證。利用威懾曲線解釋為何提高生存能力可能降低平衡武器數目，而提高攻擊交換比率則可能令其增加。

選擇以圖像為基礎的建模工具

情境	圖像工具	所回答的問題
雙方互相回應	反應曲線	雙方的要求在何處同時獲得滿足？
反覆策略回應	差分方程	過程會否收斂？
企業選擇產量	MR 與 MC 曲線	哪個產量使利潤最大？
市場出清	供給與需求	會出現甚麼價格與交易量？
政策介入	曲線移動	平衡點如何改變？
未知精確公式	形狀與斜率推理	哪些結論仍然穩健？

7 撰寫定性模型結論

模型檢視：競賽式表達

定性圖像模型的表述不應含糊。嚴謹的段落應包括：

1. 變量：坐標軸所表示的量。
2. 形狀假設：遞增／遞減、凹凸性、截距或穩定性。
3. 機制：這些形狀為何合理。
4. 結論：政策改變後，平衡點會如何變動。
5. 限制：沒有數據時，哪些問題無法確定。

較弱的結論：「稅收令價格上升。」

較有力的結論：「從量汽油稅使供給曲線向上移。新平衡點的消費者價格較高，而交易量較低。由於短期汽油需求曲線陡峭，大部分稅負由消費者承擔，交易量只會略為下降；因此，作為即時節約政策，此稅項成效不高，但當需求長期變得較有彈性時，政策可能更有效。」

本課總結

概念	建模意義
定性圖像模型	在未知精確方程時，利用方向、曲率與交點建模。
反應曲線	顯示系統某一部分為回應另一部分而要求的數值。
平衡點	所有要求同時獲得滿足的交點。
曲線移動	表示政策、技術、成本或偏好的改變。
分階段軍備競賽	反應曲線的差分方程版本；若反應係數之積小於一，系統便穩定。
$MR = MC$	完全競爭企業持續生產，直至下一單位的成本等於其收益。
供需平衡	願意供應與願意購買的交點。
稅負歸宿	市場中較缺乏調整彈性的一方承擔較多稅負。
模型批判	說明形狀假設，並指出結論何時只屬定性。

檢查點：離堂短答

用三句話解釋：即使不知道精確公式，圖像建模為何仍然有用。以軍備競賽模型或汽油稅模型為例。

核心練習

1. 反應曲線 $y = f(x)$ 向上移。利用圖像解釋它與另一條保持不變的遞增曲線 $x = g(y)$ 之交點會如何改變。
2. 對 $y_{n+1} = 50 + 0.4x_n$ 、 $x_{n+1} = 30 + 0.2y_n$ ，求平衡點並檢驗穩定性。
3. 一間企業的總成本為 $TC(q) = 200 + 4q + 0.05q^2$ ，並以價格 $p = 12$ 出售產品。求 q^* 及最大利潤。
4. 供給與需求分別為 $S(q) = 2 + 0.3q$ 、 $D(q) = 8 - 0.7q$ 。先求平衡點，再徵收稅款 $\tau = 1$ ，並求新的平衡點。
5. 畫出兩條需求曲線，一條陡峭、一條平坦。對同樣的供給曲線移動，解釋哪一種情況會令交易量減少得較多。

建模挑戰

一個城市希望減少學校附近的私家車使用量，可以選擇徵收泊車費、改善巴士服務，或重新設計校門區域。構建一個定性圖像模型。

1. 定義圖像的坐標軸。可考慮：駕車成本與汽車數目、等候時間與學生人數，或泊車位的供給與需求。
2. 說明每條曲線的形狀假設。
3. 顯示其中一項政策如何令一條曲線移動。
4. 預測平衡點的變動方向。
5. 撰寫簡短建議，並說明需要哪些數據才能量化預測。

延伸練習

1. 對分階段軍備競賽系統

$$y_{n+1} = a + bx_n, \quad x_{n+1} = c + dy_n,$$

推導平衡點，並證明收斂條件為 $|bd| < 1$ 。

2. 對線性供給與需求 $S(q) = \alpha + \beta q$ 、 $D(q) = \gamma - \delta q$ ，推導消費者承擔從量稅 τ 的比例。
3. 構建圖像論證，解釋為何公共交通補貼在長期可能比短期減少更多汽油使用量。
4. 解釋軍備競賽反應曲線模型的一項限制；即使繪畫更詳細的圖像，也無法消除此限制。

選讀附錄：平滑威懾公式

威懾曲線的一種可能解析形式是

$$y = \frac{y_0}{s^{x/y}}, \quad 0 < s < 1.$$

它表示：若 X 國可多次瞄準 Y 國的導彈，Y 國便需要更多武器，才能保留足夠的倖存武器。相比公式本身，其定性性質更重要：曲線遞增且凹向下。在學生報告中，只有在以文字解釋相關假設後，才應引入此公式。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

現代建模橋樑

當代建模往往結合多種傳統，而非只選擇一條方程。網絡模型表達關係結構；代理人模型揭示異質個體的局部規則；穩健最佳化保障決策免受輸入不確定性的影響；因果模型區分干預與關聯；正則化預測則在候選特徵眾多時控制複雜度。核心循環仍然相同：界定目的、表達機制與證據、核證計算、就預定用途驗證模型、量化不確定性，然後修訂。讀者可於 skcKenneth.github.io 使用相關互動例子。

延伸閱讀

- 《經濟學原理》第三版（OpenStax）
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模補充筆記

補充 1：集合、函數與數學語言

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在完成本補充課程後，讀者應能夠：

1. 使用集合、元素、子集、聯集、交集和補集的語言；
2. 透過檢查每個輸入是否恰好有一個輸出，來判斷一個關係是否為函數；
3. 確定常見實數函數的定義域和值域；
4. 使用垂直線檢驗法來解釋圖形；
5. 在注意定義域限制的情況下，計算函數的和、積、商和複合；
6. 解釋精確的數學語言在數學建模中的重要性。

1 此補充對建模的重要性

數學模型在任何方程式寫下之前就已經開始了。我們必須決定討論的對象是甚麼、允許哪些數值、甚麼算作輸入，以及產生甚麼輸出。這些決定是使用集合和函數的語言來表達的。

啟動：定義建模宇宙

[10分鐘]

一所學校希望對學生的午餐等待時間進行建模。討論：

1. 討論對象的全集是甚麼：所有學生、所有用餐者，還是校園內的每一個人？
2. 甚麼可以定義一個函數作為輸入：到達時間、隊列長度、餐點類型，還是支付方式？
3. 函數應該返回甚麼輸出：等待時間、服務時間、總時間，還是等待超過 10 分鐘的概率？

建模教訓：模糊的集合會產生模糊的模型。一個好的模型會明確說明族群、變量和有效的輸入。

2 集合作為建模類別

核心定義

一個集合是若干物件組成的整體。這些物件稱為元素。如果 x 是 A 的元素，則寫 $x \in A$ ；否則，寫 $x \notin A$ 。

如果 A 的每一個元素也在 B 中，則稱 A 是 B 的子集，寫成 $A \subseteq B$ 。如果 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$ ，則稱 A 是 B 的真子集，寫成 $A \subsetneq B$ 。

空集寫成 $\emptyset$ 。它不包含任何元素。

實例 1：使用集合對學生進行分類

令 U 是建模俱樂部中的學生集合。定義

$$A = \{\text{會 Python 的學生}\}, \quad B = \{\text{參加過建模競賽的學生}\}.$$

那麼：

- $A \cap B$ 是同時會 Python 且有競賽經驗的學生的集合。
- $A \cup B$ 是會 Python 或有競賽經驗（或兩者皆有）的學生的集合。
- A^c 是 U 中不會 Python 的學生的集合。
- $B - A$ 是有競賽經驗但沒有 Python 經驗的學生的集合。

這些並非抽象符號；它們是老師可以使用的類別，用以組成平衡的團隊。

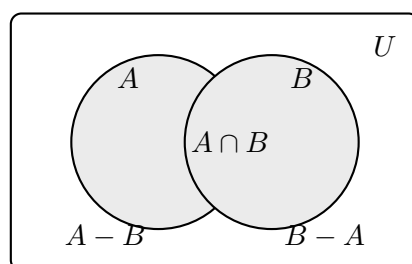


圖 1: 維恩圖是關於類別、重疊和排除的簡潔推理方式。

集合運算

給定在全集 U 中的集合 A 和 B ,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ 且 } x \notin A\}, \quad A^c = U - A.$$

數學中的「或」通常是包含的： $x \in A \cup B$ 允許 x 同時在兩個集合中。

檢查點：集合語言檢查

令 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, 且 $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ 。求 $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ 和 A^c 。然後寫一句話解釋每個集合，如果 A 代表「偶數學生」，而 B 代表「被選中的試點測試學生」。

3 關係與函數

從 X 到 Y 的一個關係是任意有序對 (x, y) 的集合，其中 $x \in X$ 且 $y \in Y$ 。一個函數是一種特殊的關係：每個輸入都與至多一個輸出配對。在大多數微積分的語境中，我們要求所給定的定義域中的每一個輸入都恰好有一個輸出。

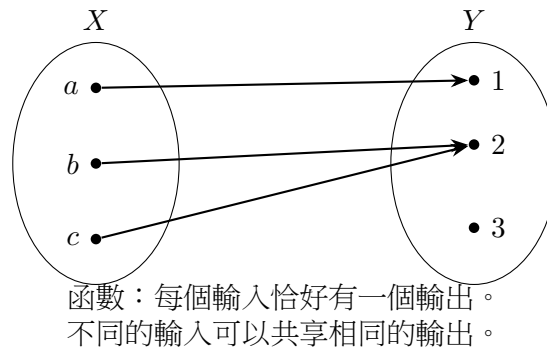


圖 2: 多對一的關係仍然可以是一個函數。禁止的模式是單個輸入產生兩個不同的輸出。

範例 2：它是一個函數嗎？

令 $X = \{1, 2, 3\}$ 且 $Y = \{a, b, c\}$ 。

1. $R_1 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ 是從 X 到 Y 的一個函數，因為每個輸入都有且僅有一個輸出。
2. $R_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c)\}$ 不是一個函數，因為輸入 1 有兩個不同的輸出。
3. $R_3 = \{(1, a), (2, b)\}$ 是定義域為 $\{1, 2\}$ 上的函數，但如果要求使用 X 中的每一個元素，則它不是定義域為 X 的函數。

建模解釋：如果輸入是「學生編號」，那麼「班級水平」的模型就不應為同一個學生輸出兩個不同的班級水平。

定義域、共域與值域

對於函數 $f: X \rightarrow Y$ ，

- 定義域是函數定義的輸入集合；
- 共域是宣告的輸出宇宙 Y ；
- 值域是實際發生的輸出集合。

在符號上，

$$\text{Dom}(f) = \{x \mid f(x) \text{ 已定義}\}, \quad \text{Range}(f) = \{f(x) \mid x \in \text{Dom}(f)\}.$$

4 實數函數、定義域與圖形

在微積分與數學建模中，一個常見的情況是實數函數，其中輸入與輸出皆為實數。如果給出一個公式而未說明定義域，則其隱含的定義域是該公式有意義的所有實數的最大的集合。

範例計算 3：從公式中求定義域與值域

考慮

$$f(x) = \sqrt{x - 2}.$$

為了得到實數輸出，平方根內的表達式必須是非負的：

$$x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2.$$

因此

$$\text{Dom}(f) = [2, \infty), \quad \text{Range}(f) = [0, \infty).$$

圖形的起點是 $(2, 0)$ 。

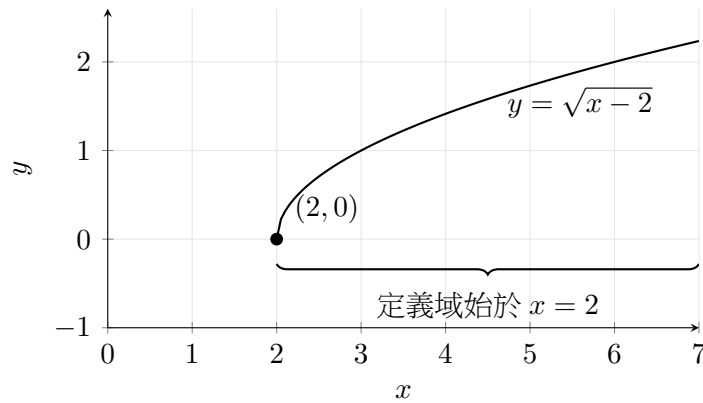


圖 3: 函數 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 的圖形僅在公式產生實數值的地方開始。

垂直線檢驗

如果一曲線是 x 的函數的圖形，則任何垂直線都最多與它相交一次。這是「一個輸入，一個輸出」規則的幾何版本。

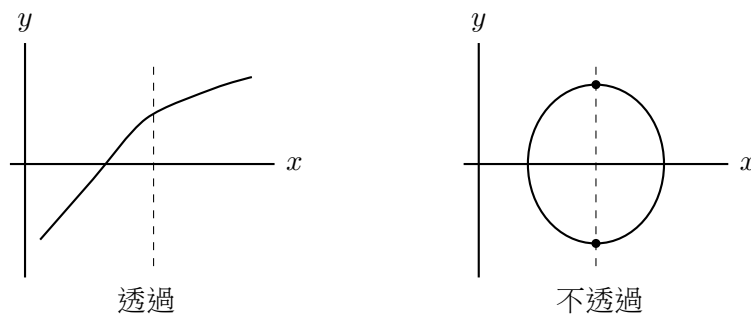


圖 4: 左側的曲線代表一個函數；右側的圓形則不代表，因為一個 x 對應多個 y 值。

檢查點：定義域檢查

求出每個實數函數的定義域：

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$;

2. $g(x) = \sqrt{9-x^2}$;

3. $h(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

對於每一個，請先用文字說明限制條件，再寫出區間或集合表示法。

5 運算與合成

函數可以進行加法、減法、乘法、除法以及合成。這些運算很有用，因為許多模型都是從子模型構建而成的。

函數的代數

如果 f 的定義域是 A ，而 g 的定義域是 B ，則和、差與積在 $A \cap B$ 上定義：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

商在兩個函數都定義且 $g(x) \neq 0$ 的地方定義：

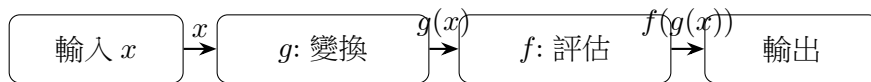
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

合成

複合函數 $f \circ g$ 是

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

輸入 x 必須首先對 g 有效，然後輸出 $g(x)$ 必須作為 f 的輸入是有效的。



合成代表一條建模流程：一個步驟的輸出成為下一個步驟的輸入。

圖 5: 合成代表一系列的變換。

計算範例 4：合成與定義域

設

$$f(u) = \sqrt{u}, \quad g(x) = 4 - x^2.$$

則

$$(f \circ g)(x) = f(4 - x^2) = \sqrt{4 - x^2}.$$

定義域不是所有實數。由於平方根要求 $4 - x^2 \geq 0$,

$$-2 \leq x \leq 2.$$

因此

$$\text{Dom}(f \circ g) = [-2, 2].$$

建模解釋：如果 $g(x)$ 計算了一個必須是非負數才能被另一個公式使用的預測量，則定義域檢查可以防止產生無意義的輸出。

計算範例 5：函數迭代

設

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

計算 $f(f(f(2)))$ ：

$$f(2) = \frac{1}{3}, \quad f(f(2)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{4},$$

$$f(f(f(2))) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{1+3/4} = \frac{4}{7}.$$

在建模中迭代是很重要的，因為差分方程只是重複的函數應用：

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

模型檢視：常見錯誤：忽略定義域

一個公式可能在代數上看起來是正確的，但作為一個實數函數則會失敗。例如，

$$\frac{1}{\sqrt{x - |x|}}$$

對於任何實數 x 都無法定義：如果 $x \geq 0$ ，則 $x - |x| = 0$ ，分母為零；如果 $x < 0$ ，則 $x - |x| = 2x < 0$ ，所以平方根不是實數。

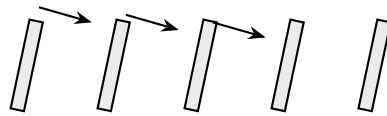
6 簡短延伸：歸納法與二項式係數

此補充筆記原先包含歸納法與二項式係數。它們很有價值，但在兩小時的課程中，應視為一個簡短的延伸或家庭作業的途徑。它們在後續的數學建模、計數、概率和二項分佈中有所助益。

數學歸納法

要證明命題 $P(n)$ 對於所有正整數 n 成立：

1. 證明基本情況： $P(1)$ 為真。
 2. 證明歸納步驟：如果 $P(k)$ 為真，則 $P(k+1)$ 為真。
- 則 $P(n)$ 對於所有 $n \in \mathbb{Z}^+$ 成立。



基本情況開始鏈；歸納步驟將真理從一個情況傳遞到下一個情況。

圖 6: 歸納法是一個邏輯的連鎖反應，而非數值模式的檢查。

例題 6：前 n 個整數的和

證明

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

基本情況: 對於 $n = 1$ ，左邊 = 1 而右邊 = $1(2)/2 = 1$ 。

歸納步驟: 假設

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

則

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

這正好是 $n = k+1$ 的公式。因此該公式對所有 $n \in \mathbb{Z}^+$ 成立。

二項式係數

階乘是

$$n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1.$$

二項式係數

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

計算從 n 個物體中選擇 k 個物體的種數。二項式定理是

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

檢查點：延伸檢查

- 1. 計算 $\binom{8}{3}$ 並解釋它計算的是甚麼。
- 2. 利用二項式定理展開 $(1 + x)^4$ 。
- 3. 透過將兩邊視為 n 個元素的集合的子集計數來解釋 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ 。

7 在建模報告中應用這些想法

模型檢視：數學語言核對表

在撰寫模型時，請檢查以下事項：

- 1. 研究的宇宙或總體是甚麼？
- 2. 每個函數或變量的定義域是甚麼？
- 3. 是否有必須排除的數值，例如負數或零分母？
- 4. 每個輸入是否確定地決定了唯一的輸出？
- 5. 如果組成兩個公式，第一個公式的輸出作為第二個公式的輸入是否有效？
- 6. 圖形是否與聲稱的函數和定義域相符？

課程總結

概念	建模含義
集合 (Set)	定義被建模的總體、類別或集合。
子集 (Subset)	描述在更大建模宇宙中的一個較窄類別。
聯集/交集 (Union/intersection)	組合或重疊類別，可用於分組和過濾數據。
補集 (Complement)	代表宇宙中不滿足某個條件的所有元素。
函數 (Function)	一種確定的輸入-輸出規則；每個輸入都有一個輸出。
定義域 (Domain)	表明哪些輸入值是有效且有意義的。
值域 (Range)	表明模型實際可以產生的輸出值。
圖形 (Graph)	有序對 $(x, f(x))$ 的視覺表示。
合成 (Composition)	代表一系列模型的轉換。
歸納/二項式 (Induction/binomial)	支持離散推理、計數和概率模型。

檢查點：出門考題

一所學校透過以下公式對餐廳的總時間進行建模：

$$T(n) = \sqrt{25 - n} + \frac{60}{n},$$

其中 n 是開放服務櫃檯的數量。

1. 這個公式對 n 施加了哪些實數限制？
2. 應該施加哪些額外的現實世界限制？
3. 在最佳化這個模型之前，為甚麼檢查定義域很重要？

核心練習

1. 令 $U = \{1, 2, \dots, 12\}$ ， $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ，且 $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 。求 $A \cup B$ ， $A \cap B$ ， $A - B$ ，以及 $(A \cup B)^c$ 。
2. 判斷以下關係是否為函數：(a) $\{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$ ；(b) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ ；(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ ；(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ 。
3. 求每個實函數的定義域： $f(x) = \sqrt{x+5}$ ， $g(x) = 1/(x^2 - 9)$ ， $h(x) = \sqrt{4-x}/(x+1)$ 。
4. 令 $f(x) = x^2 + 1$ 和 $g(x) = 2x - 3$ 。求 $f \circ g$ ， $g \circ f$ ， $(f+g)(x)$ ，以及 $(fg)(x)$ 。
5. 使用歸納法證明 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ 。

答案核對：核心練習

集合題的答案為

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}, & A \cap B &= \{6, 12\}, \\ A - B &= \{2, 4, 8, 10\}, & (A \cup B)^c &= \{1, 5, 7, 11\}. \end{aligned}$$

四個關係依次是函數、不是函數、是函數、不是函數。三個定義域依次為 $[-5, \infty)$ 、 $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ 、 $(-\infty, -1) \cup (-1, 4)$ 。對指定的 f 與 g ，

$$f \circ g = (2x - 3)^2 + 1, \quad g \circ f = 2x^2 - 1, \quad f + g = x^2 + 2x - 2, \quad fg = (x^2 + 1)(2x - 3).$$

歸納題應核對基本情況，並證明 k 成立可推出 $k+1$ 成立。

建模挑戰

一所學校希望組建建模團隊。令 U 為所有參加培訓課程的學生。定義表示知道 Python 的學生、在寫作方面強的學生、有過比賽經驗的學生，以及在星期六有空缺席的學生。

1. 使用清晰的符號定義四個集合。
2. 為知道 Python 且在星期六有空缺席的學生的集合寫出表達式。
3. 為具有寫作能力但沒有過比賽經驗的學生寫出表達式。
4. 假設每位學生被分配了確切的一個角色：編碼者、寫作者、分析師或報告者。那麼「學生 $\mapsto$ 角色」是否是一個函數？解釋。
5. 假設每位學生可能有多種能力。那麼「學生 $\mapsto$ 能力」是否是一個函數？解釋。
6. 寫一段簡短的段落，解釋如何利用這種集合和函數的語言來幫助老師組建平衡的團隊。

答案核對：建模挑戰

完整答案應使用正確的集合符號，並清楚列出所有成員條件。「學生 $\mapsto$ 角色」在每位學生恰有一個角色時才是函數；「學生 $\mapsto$ 能力」通常不是單值函數，除非把陪域重新設計為能力集合。建議亦應把團隊平衡連結至已述的時間與技能約束。

延伸練習

1. 透過歸納法證明

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. 利用二項式定理證明 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ ，然後用子集來解釋它。

3. 令 $f(x) = 1/(1+x)$ 。求前五次迭代 $f(1)$, $f^{(2)}(1)$, $\dots$, $f^{(5)}(1)$ 的公式。你觀察到甚麼規律？

4. 求 $F(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ 的定義域。用區間表示法給出答案，並用符號圖來證明它。

答案核對：延伸練習

平方和可使用歸納假設；子集恆等式可把 $1+1$ 代入二項式定理。前五次迭代為

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}.$$

最後一式的定義域為

$$(-\infty, -2) \cup [1, \infty).$$

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《大學預備微積分》第二版（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模課程

補充二：數、坐標與幾何模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次補充課程結束後，讀者應能夠：

1. 區分有理數、無理數和實數；
2. 將絕對值解釋為距離，並用它來描述容許範圍或誤差；
3. 在實數數線上表示區間；
4. 利用坐標平面來對位置、距離、中點和覆蓋範圍進行建模；
5. 推導並解釋直線和圓的方程；
6. 將斜率、距離和幾何學與數據擬合、路徑規劃、最佳化和建模約束聯繫起來。

1 數字與座標在建模中的重要性

一個數學模型將一個真實情況轉化為可以計算、比較和溝通的對象。在可以使用微積分、最佳化或模擬之前，學生需要一種精確的語言來表達三個簡單的概念：

數量, 位置, 距離.

數字描述數量，座標描述位置，距離公式描述接近程度、誤差、行程或覆蓋範圍。因此，本補充說明不是單獨的代數複習；它是許多建模任務背後的座標語言。

啟動：選擇正確的數字系統

[10分鐘]

對於每一個建模的數量，決定整數、有理數還是實數是最自然的語言。給出一句解釋。

1. 分配給團隊的學生人數。
2. 選擇搭乘巴士的學生的比例。
3. 地圖上兩個位置之間的距離。
4. 觀察到的數值與預測數值之間的誤差。
5. 為學校路線所需的配送機器人的數量。

建模課程：選擇錯誤的數字系統可能會導致錯誤的決策。例如，線性規劃可能輸出 2.7 台機器人，但實際的決策必須是整數。

2 數系：從計數到實數數線

核心詞彙

符號	名稱	建模含義
$\mathbb{N}$	自然數	物體計數：1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	整數	有符計數或淨變化： ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
$\mathbb{Q}$	有理數	比率、分數、精確比例： m/n 且 $n \neq 0$
$\mathbb{R}$	實數	連續量：長度、時間、質量、溫度、 誤差

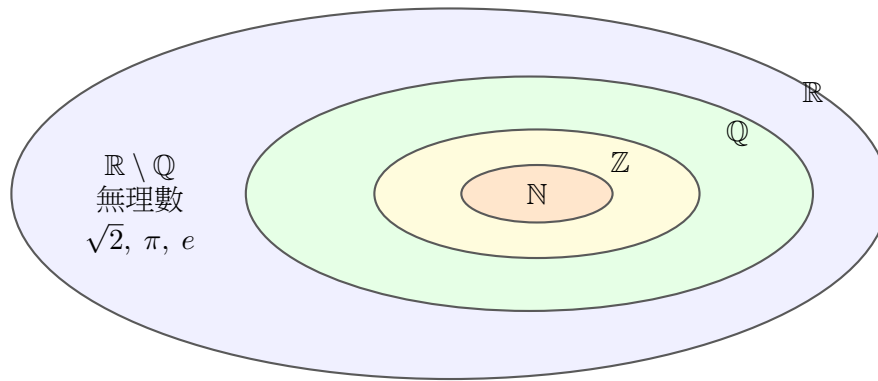


圖 1: 數值系統的層次結構。自然數包含在整數中，整數包含在有理數中，有理數包含在實數中。無理數是那些不屬於有理數的實數。

範例 1：分類建模量

對每種量進行分類。

- 一所學校需要 7 輛巴士。這屬於 $\mathbb{N}$ ，因為它計數物體。
- 一個團隊完成了其調查的 $\frac{3}{4}$ 。這屬於 $\mathbb{Q}$ ，因為它是整數的比率。
- 1×1 平方的對角線是 $\sqrt{2}$ 。這是無理數，因此是實數但不是有理數。
- 回歸中得到的擬合參數 $k = 0.03716 \dots$ 通常被視為實數。

建模解釋：有些模型是離散決策的連續近似。這是允許的，但報告必須解釋如何將連續結果轉換為可行的決策。

有理數與間隙問題

一個有理數是形如 m/n 的數，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 且 $n \neq 0$ 。有理數適用於精確比例，但它們並不能完全填滿數線。例如，不存在一個有理數的平方是 2。

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

需要實數系統是因為幾何學、距離、極限和微積分自然地產生了無理數值。

範例 2：為甚麼 $\sqrt{2}$ 不是有理數

假設 $\sqrt{2} = m/n$ 且 m, n 互質。那麼

$$m^2 = 2n^2.$$

因此 m^2 是偶數，所以 m 是偶數。寫出 $m = 2k$ 。那麼

$$4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2,$$

所以 n 也必須是偶數。這與 m/n 是最簡分數的假設相矛盾。因此 $\sqrt{2}$ 是無理數。

建模含義：即使是 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 之間的距離也是無理的。因此，座標模型需要實數，而不僅僅是分數。

檢查點：數值系統核查

一條路線規劃模型返回最短距離為 $5\sqrt{5}$ 公里，旅行時間為 11.2 分鐘，以及需要 3.4 輛貨車。哪些量是連續模型的輸出？哪些必須轉換為整數決策？

3 絕對值、距離與區間**絕對值作為距離**

對於一個實數 a ，

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

在幾何上， $|a|$ 是在數線上從 a 到 0 的距離。更一般地說， $|x - a|$ 是 x 和 a 之間的距離。

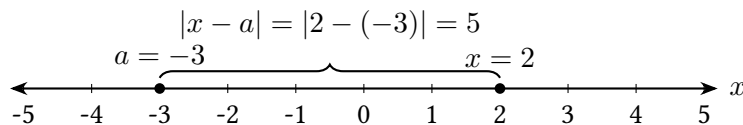


圖 2: 絕對值測量實數上的距離。

範例 3：測量容許度

如果溫度感測器的讀數 x 與真實值 25°C 的差小於 0.4°C ，則該感測器是可接受的。請使用絕對值和區間表示法寫出這個條件。

$$|x - 25| < 0.4.$$

這意味著

$$24.6 < x < 25.4,$$

因此，可接受的區間是 $(24.6, 25.4)$ 。

數學建模解釋：絕對值不等式是表達容許度、誤差界限、殘差閾值和安全邊際的簡潔方式。

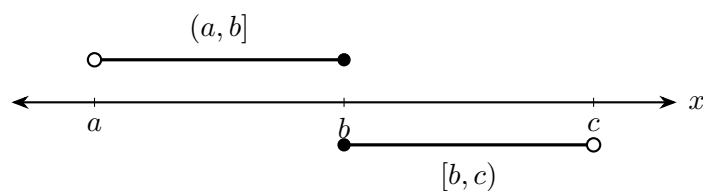


圖 3: 開放端點以空心圓圈表示；閉合端點以實心圓圈表示。

檢查點：區間檢查

將每個條件改寫為區間表示法。

1. $|x - 6| \leq 2$ 。
2. 殘差 r 滿足 $|r| < 0.1$ 。
3. 模型參數 k 是正數，但小於 1。

4 坐標、距離與中點

平面上的一點由有序對 (x, y) 表示。在數學建模中，坐標可能代表物理地圖、特徵空間，或從數據測得的兩個變量。

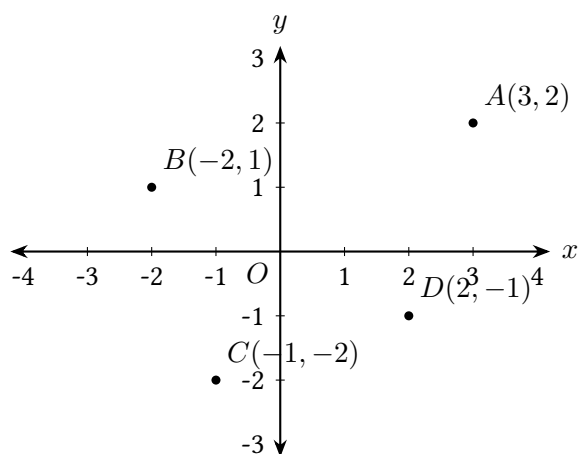


圖 4: 坐標定位點相對於 x 軸和 y 軸。

距離與中點公式

對於 $P_1 = (x_1, y_1)$ 和 $P_2 = (x_2, y_2)$ ，

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

中點為

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

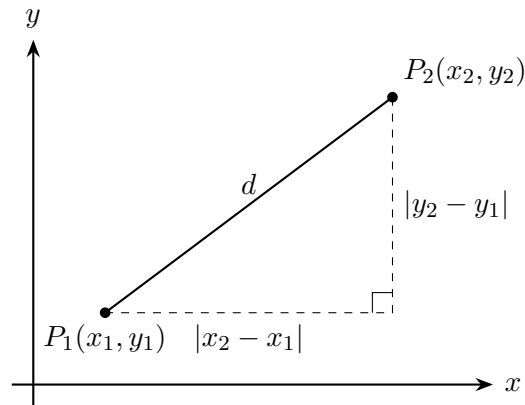


圖 5: 距離公式是應用於坐標差的勾股定理。

例題 4：選擇會合點

兩名學生居住在簡化的公里地圖上的 $A = (1, 2)$ 和 $B = (7, 6)$ 處。他們之間公平的會合點是

$$M = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (4, 4).$$

他們之間的直接距離是

$$d(A, B) = \sqrt{(7-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21 \text{ km}.$$

數學建模解釋：中點在直線距離下是公平的。如果實際的步行路線遵循道路，則歐幾里得中點可能不再公平。

模型檢視：模型批評：歐幾里得距離與實際行程距離

距離公式假設平面為平坦的坐標平面以及直線運動。在路線規劃中，道路網絡、樓梯、坡度、交通燈、河流、門和限制區域可能使歐幾里得距離成為一個不好的近似值。模型制定者應說明歐幾里得距離是合理的近似值，還是僅僅是一個初步估計。

5 直線作為簡單模型

一條直線是變化率恆定的最簡單模型。

$$\text{斜率} = \frac{\text{輸出變化}}{\text{輸入變化}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

在數學建模中，斜率帶有單位。如果 x 是分鐘的時間，而 y 是公尺的距離，那麼斜率就是公尺/分鐘。

直線的形式

形式	方程式	用途
斜截式	$y = mx + b$	已知斜率和起始值
點斜式	$y - y_1 = m(x - x_1)$	已知一點和斜率
兩點式	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	已知兩點的觀察值
一般形式	$Ax + By + C = 0$	有助於計算點到直線的距離

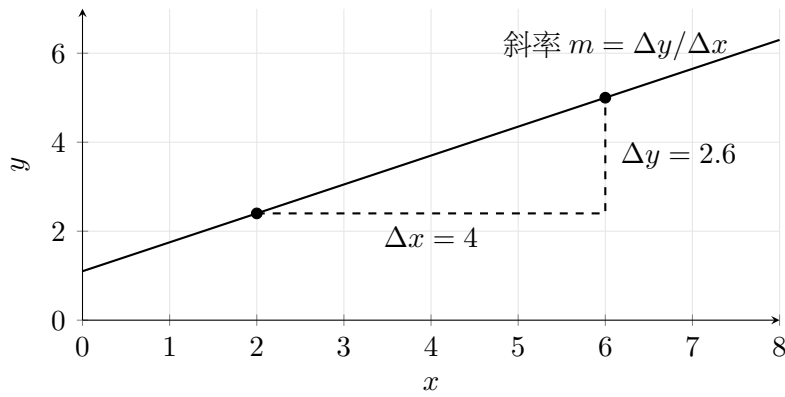


圖 6: 直線的斜率衡量每單位輸入的恆定變化量。

計算範例 5：線性的旅行時間模型

一架送貨機器人在走廊上移動時，移動 120 m 花費 4 分鐘，移動 300 m 花費 10 分鐘。設 x 為距離（單位：米）， y 為旅行時間（單位：分鐘）。假設為線性模型，

$$m = \frac{10 - 4}{300 - 120} = \frac{6}{180} = \frac{1}{30} \text{ min/m.}$$

使用穿過 (120, 4) 的點斜式，

$$y - 4 = \frac{1}{30}(x - 120),$$

因此

$$y = \frac{x}{30}.$$

截距為 0，這表明在這種簡化的情況下，機器人幾乎沒有固定的啟動延遲。

解釋：速度是斜率的倒數：30 m/min。如果後續數據顯示非零截距，那可能代表載貨時間或等待時間。

檢查點：線段檢查

求穿過 (2, 5) 和 (8, 17) 的直線。如果 x 是學習的小時數， y 是考試分數，請解釋斜率。

平行、垂直和點到直線的距離

對於非垂直的直線，平行線具有相同的斜率。垂直線的斜率滿足

$$m_1 m_2 = -1.$$

從點 (x_0, y_0) 到直線 $Ax + By + C = 0$ 的距離是

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

這個公式衡量的是點到線性邊界的最短垂直距離。

計算範例 6：到安全邊界的距離

一個限制區域由直線

$$3x - 4y + 12 = 0.$$

近似。一架無人機位於 $P = (2, 5)$ 。它到邊界的最近距離是

$$d = \frac{|3(2) - 4(5) + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 20 + 12|}{5} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

如果座標是以公里為單位測量，則無人機到邊界的距離是 0.4 km。

6 圓圈作為距離約束

一個圓圈是從一個中心點處保持固定距離的所有點的集合。這使得圓圈在覆蓋範圍、距離、安全性和服務範圍模型中非常有用。

圓的方程

中心為 (h, k) 、半徑為 r 的圓的方程為

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

一般形式

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

可以透過配方完成平方來轉換為標準形式。

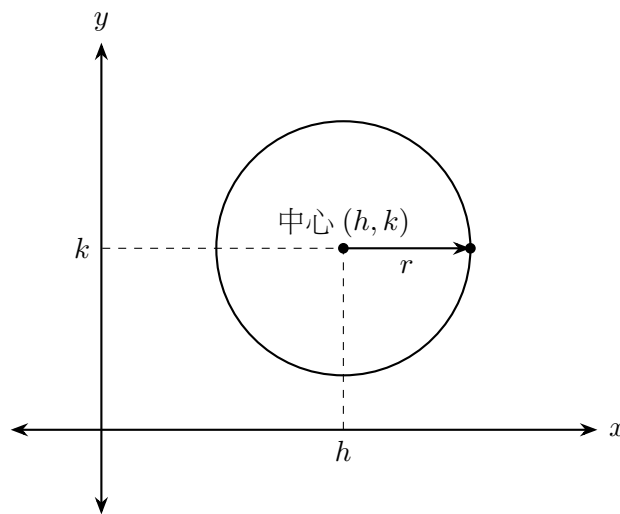


圖 7: 圓圈對應於中心點處固定距離內的所有位置。

例題 7：覆蓋半徑

一個 Wi-Fi 路由器位於 $(3, -2)$ ，有效範圍為 5 米。覆蓋邊界為

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

位於 $(7, 1)$ 的設備的平方距離為

$$(7 - 3)^2 + (1 + 2)^2 = 16 + 9 = 25,$$

因此它正好在邊界上。

模型解釋：在現實生活中，牆壁和干擾會使邊界不呈圓形。圓圈是僅基於距離的初步近似。

例題 8：配方完成

求以下方程的中心和半徑：

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

合併項並完成平方：

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) &= 12, \\(x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= 12 + 9 + 4 = 25.\end{aligned}$$

因此中心是 $(3, -2)$ ，半徑是 5。

差異化幾何建模工作室**[13分鐘]**

選擇一條路線。

1. 核心路線：設施距離。一個服務台位於 $(2, 1)$ 。找出 $A = (5, 5)$ 、 $B = (-1, 3)$ 和 $C = (4, -2)$ 中哪一個最近。
2. 挑戰路線：覆蓋模型。一個位於 $(4, 3)$ 的感測器覆蓋半徑為 3。寫出覆蓋不等式，並測試 $(6, 5)$ 和 $(8, 3)$ 是否被覆蓋。
3. 延伸路線：邊界距離。一條道路由 $2x - y + 1 = 0$ 模型。一所學校位於 $(3, 4)$ ，必須與道路至少有 1 公里的距離。檢查該位置是否可接受，並建議移動的方向。

7 選修附錄：完整性與微積分的原理**單頁完整性**

集合 $S \subset \mathbb{R}$ 若存在一個數 M 使得對於所有 $x \in S$ ，都有 $x \leq M$ ，則稱 S 是有上界。上確界是最小上界。

實數滿足完備公理： $\mathbb{R}$ 中任何非空且有上界的子集都存在一個上確界在 $\mathbb{R}$ 中。

這比普通座標幾何所需要的更深入，但它解釋了為甚麼極限和微積分是可能的。有理數存在間隙；實數填補了這些間隙。

模型檢視：競賽式溝通

在報告中使用座標時，不要僅僅寫公式。請說明：

1. 軸代表甚麼以及使用了甚麼單位；
2. 為甚麼歐幾里得距離是可接受的，或者它忽略了甚麼；
3. 變量是連續的還是必須四捨五入到整數；
4. 距離、斜率或圓圈如何支持最終的建議。

弱陳述：“距離是 5。”

更強的陳述：“使用以公里為單位的座標地圖，站點與建築 A 之間的歐幾里得距離是 5 公里。這是一個下界估計，因為實際的步行路線必須遵循校園道路。”

課程總結

概念	建模含義
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	不同的數系支持計數、比率和連續測量。
無理數	自然幾何量如 $\sqrt{2}$ 無法表示為分數。
絕對值	量度到零的距離或目標的誤差。
區間	描述可接受的範圍、約束和不確定性帶。
座標平面	將位置轉換為可計算的有序對。
距離公式	量度直線上的接近程度、旅行的下界和誤差。
斜率	變化率的常數；單位很重要。
直線	線性關係或邊界的最簡單模型。
圓圈	固定距離的點集；可用於覆蓋和範圍模型。
完備性	支持極限和微積分的 $\mathbb{R}$ 的隱藏性質。

檢查點：出門試卷

一所學校的地圖使用米作為座標。用三句話解釋你將如何對一個新的水站是否覆蓋所有距離水站少於或等於 80 米的教室進行建模。提及中心點、半徑以及模型的其中一個限制。

核心練習

- 將每個數分類為自然數、整數、有理數、無理數或實數： $-4, 0, 7/3, \sqrt{9}, \sqrt{7}, \pi$ 。
- 求解並寫出區間表示法： $|x - 4| < 1.5$ 和 $|2x + 1| \leq 5$ 。
- 找出 $A = (-2, 3)$ 和 $B = (4, -1)$ 之間的距離和中點。
- 找出穿過 $(1, 5)$ 和 $(4, 11)$ 的直線的方程。
- 找出垂直於 $y = 3x + 4$ 的穿過 $(2, -1)$ 的直線。
- 找出方程 $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$ 的中心和半徑。

答案核對：核心練習

採用 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 時，各數的分類可直接依照數系定義判斷。其餘數值答案為

$$(2.5, 5.5), \quad [-3, 2]; \quad d(A, B) = 2\sqrt{13}, \quad M = (1, 1);$$

$$y = 2x + 3; \quad y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 2); \quad \text{圓心}(-1, 4), r = 3.$$

歸納題應先核對基本情況，再證明 $n = k$ 成立可推出 $n = k + 1$ 成立。

建模挑戰

一所校園規劃師希望放置一個臨時資訊亭。建築物由點表示：

$$A = (0, 0), \quad B = (6, 2), \quad C = (3, 7), \quad D = (-2, 4).$$

- 計算 A 和 B 的中點。解釋這可能是一個好還是不好的資訊亭位置。
- 找出提議的資訊亭 $P = (2, 3)$ 到每個建築物的距離。
- 如果資訊亭的覆蓋範圍是半徑 5，寫出覆蓋圓圈並確定哪些建築物被覆蓋。

4. 主要人行道由直線 $x + y = 5$ 近似。找出 P 到人行道的距離。
5. 寫一份簡短的建議。包括使用座標和歐幾里得距離的一個限制。

答案核對：建模挑戰

A 與 B 的中點是 $(3, 1)$ 。由 $P = (2, 3)$ 到四座建築物的距離依次為

$$\sqrt{13}, \quad \sqrt{17}, \quad \sqrt{17}, \quad \sqrt{17}.$$

覆蓋圓盤為 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 25$ ，四座建築物皆在覆蓋範圍內。 P 到 $x + y = 5$ 的距離為 0。合理建議亦應指出，直線距離可能低估沿步行網絡行走的實際距離。

延伸練習

1. 證明一個非零有理數與無理數的乘積是無理數。
2. 利用 $-|a| \leq a \leq |a|$ 的事實，證明三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 。
3. 集合 $S = (0, 1)$ 沒有最大值但有上確界 1。解釋最大值與上確界的區別。
4. 找出所有在 x 軸上且與 $(2, 3)$ 和 $(-1, 4)$ 等距的點。
5. 一個圓透過 $(0, 0)$ 、 $(4, 0)$ 和 $(0, 3)$ 。找出它的方程。

答案核對：延伸練習

「非零有理數乘無理數」可用反證法；三角不等式可由 $-|a| \leq a \leq |a|$ 推導。集合 $(0, 1)$ 的上確界是 1，但因為 $1 \notin (0, 1)$ ，所以沒有最大值。 x 軸上的等距點滿足 $x = -2/3$ 。通過三個指定點的圓為

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《大學預備微積分》第二版（OpenStax）
- 《國際單位制指南》：量值、物理量與量綱（NIST）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模課程

補充 3：圖像、變換與週期模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次補充課程結束後，讀者應能夠：

1. 將圖形視為兩個量之間的關係模型；
2. 透過垂直線測試區分關係與函數；
3. 從公式和圖形中確定定義域、值域、截距、對稱性及關鍵特徵；
4. 使用圖形變換來繪製相關函數，而無需從頭重新繪圖；
5. 解釋基本圖形族作為模型形狀的意義：線性、二次、反比、絕對值、平方根和正弦波；
6. 透過振幅、週期、相位偏移和垂直平移建立一個簡單的週期模型；
7. 解釋圖形揭示了甚麼、隱藏了甚麼，以及在對其進行預測之前需要哪些假設。

1 圖形作為建模語言

一個圖形不僅僅是公式的圖像。在數學建模中，圖形是一種溝通關係的簡潔方式：增加、減少、飽和、閾值、週期性、異常值以及假設的崩潰，往往可以在計算之前就得以觀察到。

啟動：圖形能說些甚麼？

[12 分鐘]

一所學校記錄了食堂的等候時間，時間從 12:00 到 12:40。曲線迅速上升，達到峰值，然後緩慢地回落至接近零。

1. 在此情境中，峰值意味著甚麼？
2. 如果曲線更平坦，會意味著甚麼？
3. 如果我們只知道曲線的形狀而不知道單位，會缺少哪些資訊？
4. 甚麼干預措施可以使峰值向下或提前？

建模課程：圖形應該被視為對系統的陳述，而不僅僅是繪圖。

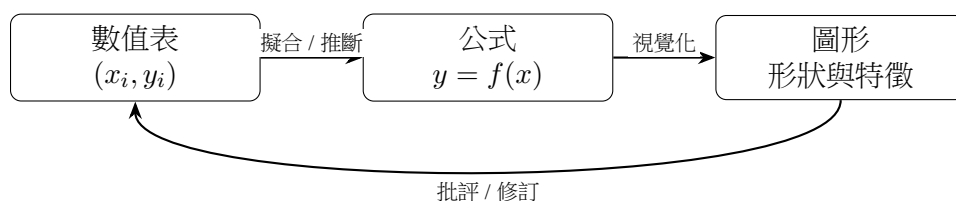


圖 1: 在建模中，數據、公式和圖形應相互支持。

核心詞彙

一個關係是有序對 (x, y) 的集合。一個函數是一種特殊的關係，其中每個輸入 x 對應著且僅有一個輸出 y 。定義域是允許的輸入的集合；值域是產生的輸出的集合。 $y = f(x)$ 的圖形是所有點 $(x, f(x))$ 的集合。

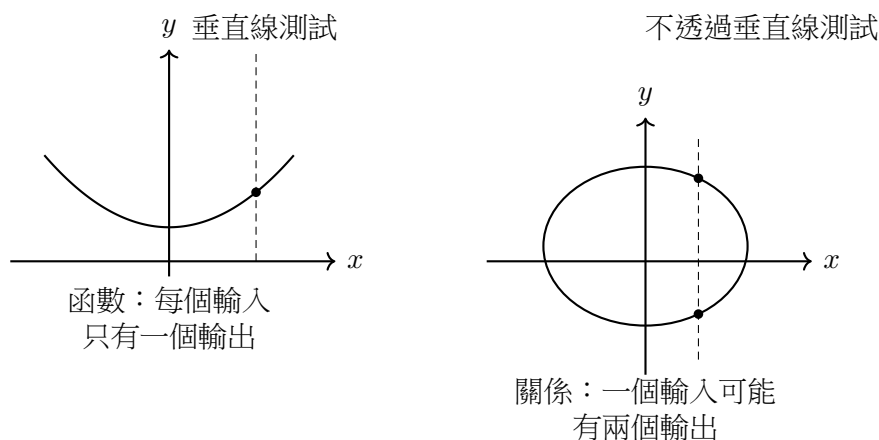


圖 2: 垂直線測試用於檢查一個關係能否表示為函數形式。

2 定義域、值域、截距與對稱性

在擬合或解釋圖形之前，建模者必須決定哪些數值是重要的。在學校數學中，一個公式可能具有自然的代數定義域。在建模中，現實的定義域可能更小。

範例計算 1：自然定義域與建模定義域

一個簡化的停止距離模型是

$$D(v) = 0.75v + 0.006v^2$$

其中 v 是時速， D 是米。

代數定義域：此公式接受所有實數 v 。建模定義域：速度不能為負，且模型僅針對普通道路速度進行校準，例如 $0 \leq v \leq 120$ 。

y 截距是 $D(0) = 0$ ，意味著當速度為零時停止距離為零。即使代數公式可於負值代入，負速度分支亦沒有實際意義。因此，圖形應僅在建模定義域上繪製。

範例計算 2：從公式中求定義域與值域

求

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

的自然定義域和值域。平方根要求 $4 - x^2 \geq 0$ ，所以 $-2 \leq x \leq 2$ 。因此

$$\text{Dom}(f) = [-2, 2].$$

由於 $f(x)$ 是圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的上半部分，輸出滿足 $0 \leq y \leq 2$ ：

$$\text{Range}(f) = [0, 2].$$

這是一個函數，因為 $[-2, 2]$ 中的每個 x 都對應著一個非負的 y 值。

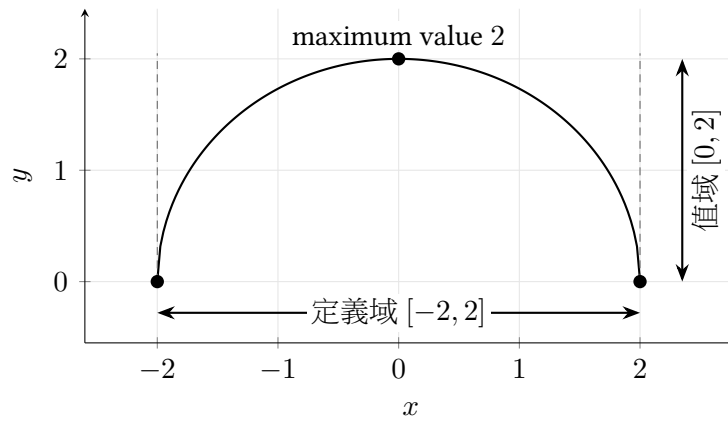


圖 3: 函數 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 的圖形是半徑為 2 的上半圓，因此其定義域和值域是可見的。

檢查點：特徵核查

對於每個函數，請說明其自然定義域、一個截距，以及圖形是奇函數、偶函數還是兩者都不是。

1. $f(x) = x^4 - 3x^2$

2. $g(x) = \frac{1}{x - 2}$

3. $h(x) = \sqrt{x + 1}$

3 圖形變換與標準形狀

圖形變換使我們能夠快速繪製相關的函數。在數學建模中，這非常重要，因為擬合或理論曲線通常僅因縮放或平移而與標準圖形有所不同。

$y = f(x)$ 的變換

新函數	對圖形的影響
$y = f(x) + c$	向上平移 c 個單位
$y = f(x - c)$	向右平移 c 個單位
$y = af(x)$	垂直拉伸因子為 $ a $ ；若 $a < 0$ ，則在 x 軸上反射
$y = f(bx)$	若 $b > 1$ ，則水平壓縮因子為 b
$y = -f(x)$	在 x 軸上反射
$y = f(-x)$	在 y 軸上反射

範例 3：圖形的變換

描述以下函數的圖形：

$$y = -2\sqrt{x + 3} + 4.$$

從 $y = \sqrt{x}$ 開始。

- $\sqrt{x + 3}$ 使圖形向左平移 3 個單位。
- $-2\sqrt{x + 3}$ 使其在 x 軸上反射並垂直拉伸因子為 2。

3. $-2\sqrt{x+3}+4$ 使圖形向上平移 4 個單位。

起點從 $(0,0)$ 移動到 $(-3,4)$ 。定義域是 $[-3, \infty)$ ，值域是 $(-\infty, 4]$ 。

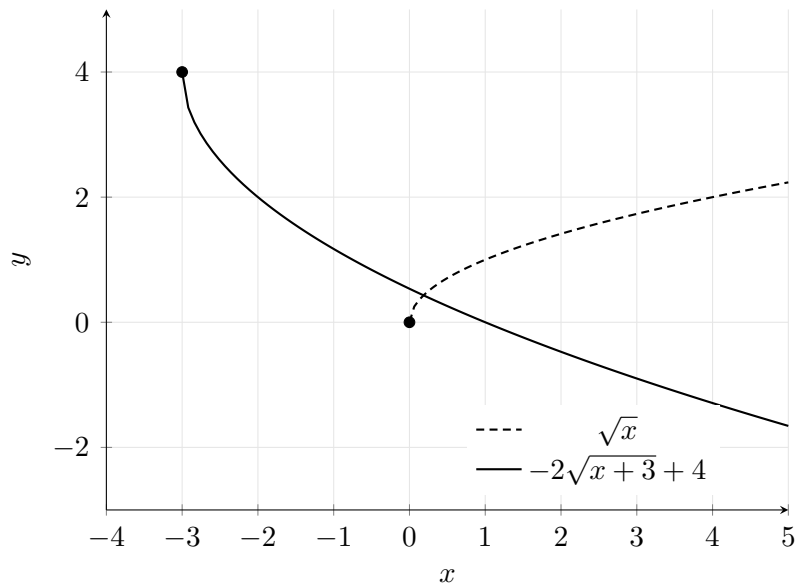


圖 4：變換使我們能從熟悉的母圖形繪製出新的模型。

用於建模的標準圖形族

族群	典型公式	建模含義
線性	$mx + b$	恆定的變化率；校準線
二次	$ax^2 + bx + c$	加速變化，拋物線形狀，成本曲線
絕對值	$a x - h + k$	距離目標的距離，目標值周圍的懲罰
平方根	$a\sqrt{x - h} + k$	快速初始增長後減緩；收益遞減
倒數	$a/(x - h) + k$	反向關係，漸近線，容量或擁堵效應
正弦	$A \sin(B(t - C)) + D$	週期性或季節性行為

模型檢視：選擇圖形族是一種假設

如果學生僅僅因為它很好地適配了六個點而選擇二次圖形，該模型可能會過度外推。圖形族應由一個機制來證明：恆定速率、飽和、反向依賴、週期性驅動或幾何約束。競爭報告應說明所選形狀的意義所在，而不僅僅是它適配了數據。

4 三角函數圖形作為週期模型

在數學建模中，三角函數最有用之處不在於記憶恆等式；而在於識別重複的行為。許多系統都具有重複的模式：日光、潮汐、交通週期、溫度、電力需求和學校出勤率。

正弦模型

基本的週期模型的形式為

$$y = A \sin(B(t - C)) + D.$$

在此， $|A|$ 是振幅， $2\pi/|B|$ 是週期， C 是相位偏移量，而 D 是中線。對於餘弦模型也適用相同的解釋。

範例 4：季節性出勤率模型

假設學校的平均缺席學生人數遵循年度週期。九月份的最小值約為 8 名學生，三月份的最高值約為 28 名學生，週期為一年。令 t 為從九月以月計算的時間。

中線為

$$D = \frac{28 + 8}{2} = 18,$$

振幅為

$$A = \frac{28 - 8}{2} = 10.$$

由於最小值發生在 $t = 0$ 時，一個方便的餘弦模型是

$$A(t) = 18 - 10 \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right).$$

在 $t = 6$ 時，該模型給出 $A(6) = 28$ ，代表三月早春的峰值。在用於人員配置決策之前，此模型應與數年的記錄進行模型效度驗證。

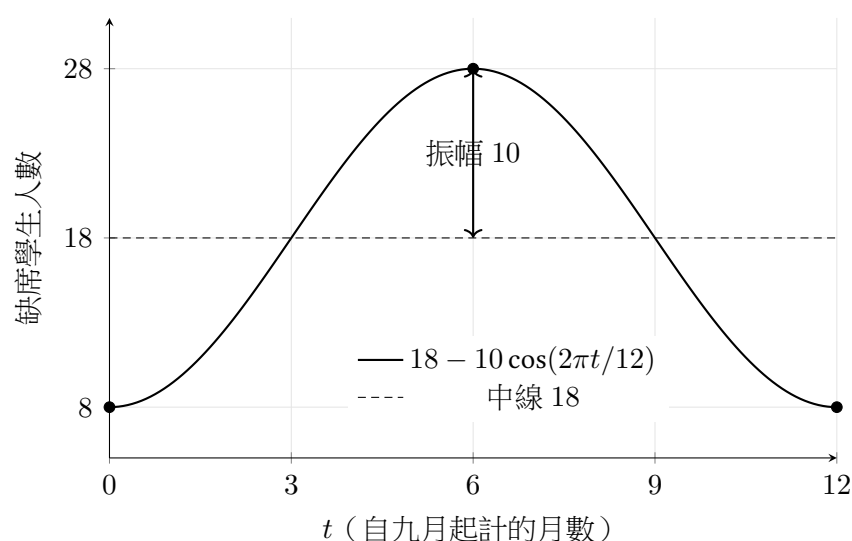


圖 5: 正弦圖形將重複的模式轉化為可解釋的參數。

檢查點：週期模型核證

潮汐高度範圍從 1.2 米到 3.8 米，每 12 小時重複一次。在 $t = 0$ 時，潮水處於最大值。

1. 求振幅和中線。
2. 寫出一個餘弦模型。
3. 解釋該模型的其中一個限制。

5 以漸近線與圓錐曲線表達模型結構

有些圖形的價值，在於它們揭示邊界，而非一般的轉折點。漸近線描述曲線逐漸趨近的值；圓錐曲線則能描述固定距離、距離之和或距離之差等幾何約束。

範例 5：在擁塞模型中讀取漸近線

假設一個簡單的旅行時間模型為

$$T(q) = 12 + \frac{40}{100 - q}, \quad 0 \leq q < 100,$$

其中 q 是每分鐘進入一段道路的車輛數量。該圖形在 $q = 100$ 處有一個垂直漸近線。當 q 趨近於容量時，預測的旅行時間會迅速增加。這個漸近線是一個警告：操作接近容量是不穩定的，小的需求變化會導致大的延誤。

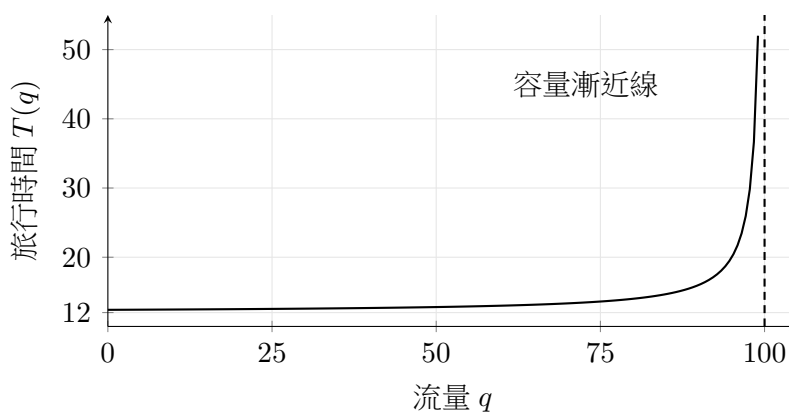


圖 6: 漸近線可以代表實際的容量邊界。

圓錐曲線摘要

圓錐曲線	定義思想	模型應用
圓周	相對於中心有固定的距離	覆蓋範圍、安全半徑、感測器範圍
拋物線	相對於焦點與正交線的距離相等	拋物線形狀、反射器幾何
橢圓	到兩個焦點的距離之和固定	軌道狀形狀、服務區域
雙曲線	到兩個焦點的距離之差固定	從時間差信號進行定位

6 撰寫基於圖表的建模結論

模型檢視：競賽式溝通

基於圖表的結論應包含四個部分：

1. 特徵 (Feature): 哪個圖形屬性是重要的？例如：峰值、截距、斜率、漸近線、週期。
2. 意義 (Meaning): 這個特徵在實際系統中代表甚麼？

3. 決策 (**Decision**): 從這個解釋中會產生甚麼行動？

4. 限制 (**Limitation**): 甚麼會使圖形不可靠？

薄弱的結論: “圖形上升然後下降。”

更強的結論: “等待時間曲線在約 12:18 達到峰值，因此食堂的瓶頸集中在午餐的前半段。應該在峰值之前而不是之後打開第二個服務櫃檯。這個結論假設記錄的日期是典型的，並且等待時間是持續測量的。”

差異化圖形建模工作室

[14分鐘]

選擇一條路徑。

1. 核心路徑 (**Core route**): 給出二次成本模型的圖形，找出截距、頂點和有意義的定義域。
2. 挑戰路徑 (**Challenge route**): 從最大值、最小值和週期擬合一個正弦模型；然後解釋相位偏移。
3. 延伸路徑: 對於擁堵或學習曲線數據，在反比模型和平方根模型之間選擇。透過機制和殘差模式進行論證。

課程總結

概念 (Concept)	建模意義 (Modeling meaning)
圖形 (Graph)	關係或函數的視覺表徵；揭示定性結構。
垂直線檢驗 (Vertical-line test)	檢查每個輸入是否只有一個輸出。
定義域與值域 (Domain and range)	指定實際的輸入和可能的輸出。
截距 (Intercepts)	描述起始值、閾值或損益平衡點。
對稱性 (Symmetry)	減少工作並揭示結構假設。
變換 (Transformation)	透過平移、拉伸和反射重用已知的圖形形狀。
正弦模型 (Sinusoidal model)	透過振幅、週期、相位和中線表示週期性行為。
漸近線 (Asymptote)	表示極限值或實際邊界。
拋物線 (Conic)	編碼距離、距離之和或覆蓋範圍等幾何約束。

檢查點：出門考題

從今天的課程中選擇一個圖形特徵，並解釋它如何可能影響建模問題中的實際決策。你的答案必須包括該特徵、其上下文意義和一個限制。

核心練習

1. 找出 $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ 的自然定義域。
2. 確定以下函數是偶函數、奇函數還是兩者都不是： $x^5 - x$ 、 $x^4 + 2x^2$ 、 $x^2 + x$ 。
3. 描述從 $y = x^2$ 到 $y = -3(x+2)^2 + 5$ 的變換。
4. 找出 $y = 4 \sin(2t - \pi) + 3$ 的振幅、週期、相位偏移和中線。

5. 找出 $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ 的垂直和水平漸近線。

答案核對：核心練習

答案為

$[-3, 1) \cup (1, 3]$; 奇函數、偶函數、兩者皆非;

向左平移 2 個單位、關於 x 軸反射、沿垂直方向拉伸 3 倍，再向上平移 5 個單位；振幅 4、週期 π 、相位偏移 $\pi/2$ 、中線 $y = 3$ ；垂直漸近線 $x = 3$ 、水平漸近線 $y = 2$ 。

建模挑戰

一個小型主題公園記錄了從 9:00 到 18:00 每小時進入的遊客數量。數據在早晨緩慢上升，在 14:00 左右達到峰值，然後下降。一位學生提出了一個二次模型。

1. 定義一個時間變量和一個遊客數函數。
2. 解釋為甚麼二次圖形在一天內可能是合理的。
3. 說明建模的定義域，並解釋為甚麼外推到該範圍之外可能具有誤導性。
4. 建議一個有助於人員配置決策的圖形特徵。
5. 寫一個帶有一個限制的簡短基於圖表的結論。

答案核對：建模挑戰

完整答案應以 9:00 為基準定義時間與遊客數函數，說明單日二次模型只是「上升—峰值—下降」的局部近似，把定義域限制在觀察到的營業時段，並以峰值時間或峰值高度支持人手安排。結論必須提醒讀者：此模型並不支持外推至 9:00–18:00 以外的時段。

延伸練習

1. 證明 $x^2 + y^2 = 4$ 的圖形不是 x 的函數，但可以被分成兩個函數。
2. 信號由 $S(t) = 2.5 \cos(\pi t/6) + 7$ 建模。找出其最大值、最小值、週期以及 $t = 3$ 時的值。
3. 解釋如果道路容量從每分鐘 100 輛車增加到 130 輛車，則在 $T(q) = 12 + 40/(100 - q)$ 中的漸近線會如何變化。
4. 使用一個圓及其內部來對 (20, 15) 處 Wi-Fi 路由器周圍 50 米內的覆蓋點進行建模。寫出相應的不等式。

答案核對：延伸練習

圓可拆成 $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ 。信號的最大值是 9.5、最小值是 4.5、週期是 12，且 $S(3) = 7$ 。把道路容量提高至 130 後，相應修訂模型的垂直漸近線會由 $q = 100$ 移至 $q = 130$ 。Wi-Fi 覆蓋圓盤為

$$(x - 20)^2 + (y - 15)^2 \leq 2500.$$

可選附錄：三角恆等式

以下恆等式對代數和微積分很有用，但不必在兩小時的核心課程中全部教授。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《大學預備微積分》第二版（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模課程

補充 4：極限、連續性與漸近思維

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次補充課程結束後，讀者應能夠：

1. 將極限解釋為函數在某點附近趨近的值，而不一定是該點本身的函數值；
2. 透過代入、因式分解、有理化及標準三角極限計算常見極限；
3. 使用單側極限判斷雙側極限是否存在；
4. 解釋無窮極限、無窮遠處的極限及漸近線；
5. 分類可去、跳躍及無窮間斷；
6. 在建模情境中運用連續性、中間值定理及極值定理；
7. 解釋極限的數值與圖像證據，而不把證據誤當成證明。

1 極限描述局部行為

極限描述函數正在趨近甚麼值。它具有局部性：我們觀察某一點附近，而不一定觀察該點本身。這個概念是微積分的核心，同時也是建模概念。感測器可能在某一時刻失靈，公式可能在某個值沒有定義，而一個過程也可能不斷趨近容量上限，卻永遠不會精確到達。

啟動：遺失的感測器讀數

[12分鐘]

一個溫度感測器每分鐘記錄一次讀數。在 $t = 5$ 時感測器失靈，但相鄰讀數顯示曲線應在 23.8°C 附近通過。

1. 我們應否說 $t = 5$ 時的溫度已知？
2. 我們應否說 $t = 5$ 附近的趨勢已知？
3. 甚麼證據可使估計的極限值更可信？

建模要點：極限關心的是趨近行為。即使精確輸入處的數值遺失或不可靠，極限仍然可以具有意義。

非正式表述的核心定義

當選取充分接近 a 、但 $x \neq a$ 的 x 時， $f(x)$ 可以任意接近 L ，我們便寫成

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

函數值 $f(a)$ 可以等於 L 、不同於 L ，或者不存在。

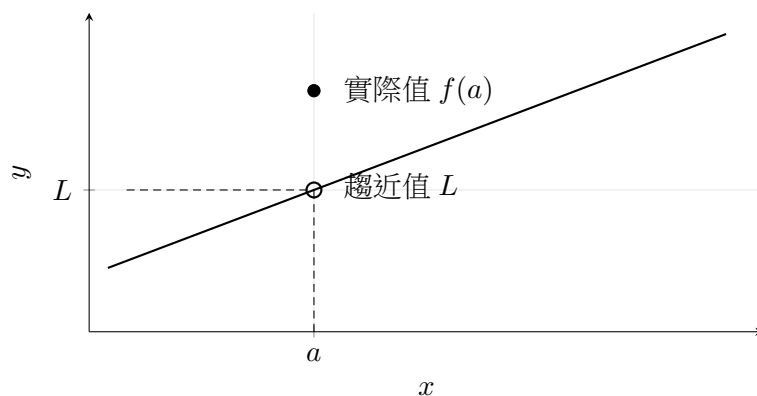


圖 1: 極限描述圖像在 $x = a$ 附近趨近的值。在 a 的實際函數值可以不同。

範例 1：可去空洞

計算

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

當 $x = 1$ 時，原式沒有定義。但當 $x \neq 1$ 時，

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

解釋：原公式在 $x = 1$ 有一個空洞，但附近的趨勢趨近 2。

範例 2：有理化

計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$$

直接代入得到 $0/0$ ，所以我們作有理化：

$$\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2}, \quad x \neq 0.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}.$$

檢查點：代數極限檢核

計算：

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$

2. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9};$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$

每題先指出障礙：直接代入、 $0/0$ 、平方根，還是因式分解。

2 從非正式極限走向 ε - δ 語言

在第一門建模課中，學生不必掌握每一種 ε - δ 證明，但應理解定義的意義：輸出容許誤差控制輸入容許誤差。

正式定義

若對每個 $\varepsilon > 0$ ，均存在 $\delta > 0$ ，使得

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

我們便說

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

其中 ε 是輸出的容許誤差，而 δ 是輸入與 a 之間的容許距離。

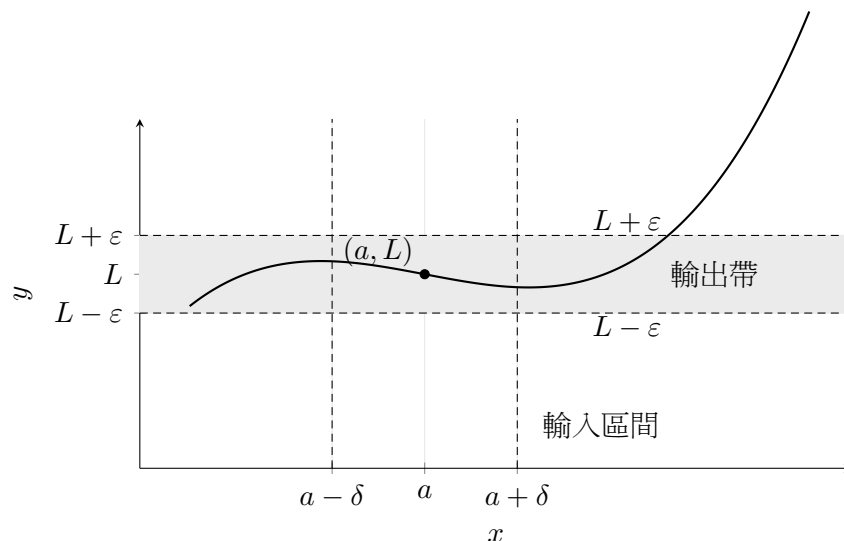


圖 2: 極限的 ε - δ 定義：若 x 充分接近 a ，則 $f(x)$ 與 L 的距離小於 ε 。

範例 3：簡單的 ε - δ 證明

證明 $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ 。

我們希望

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < \varepsilon.$$

所以只須要求 $|x - 3| < \varepsilon/2$ 。令 $\delta = \varepsilon/2$ ，則每當 $0 < |x - 3| < \delta$ 時，

$$|(2x - 1) - 5| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ 。

模型檢視：證明與證據

數值表可以支持對極限的猜測；圖像可以說明極限； ε - δ 證明則確立極限。在數學建模報告中，學生通常需要解釋趨勢並論證計算。若結果將被用作定理，或圖像可能造成誤導，正式證明便尤其有用。

3 單側極限與無窮極限

有些函數從左側及右側趨近不同的值。只有當兩個單側極限相等時，雙側極限才存在。

單側極限

右極限是 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ，即使用 $x > a$ 的值趨近 a ；左極限是 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ，即使用 $x < a$ 的值趨近 a 。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

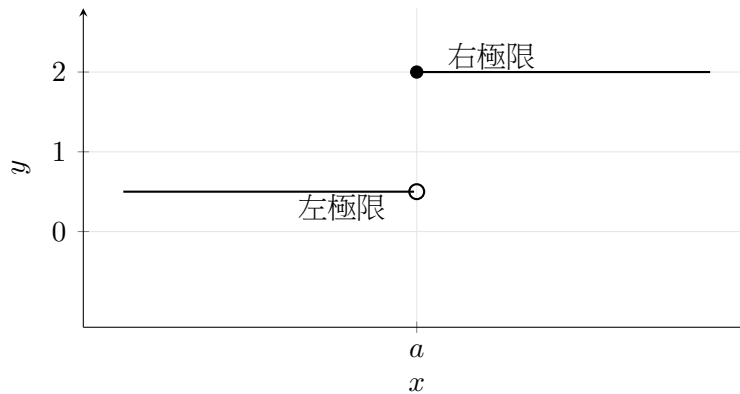


圖 3: 當左極限與右極限不同時，便出現跳躍。

範例 4：絕對值商

計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

若 $x > 0$ ，則 $|x| = x$ ，所以 $|x|/x = 1$ 。若 $x < 0$ ，則 $|x| = -x$ ，所以 $|x|/x = -1$ 。因此

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

兩個單側極限不相等，所以雙側極限不存在。

無窮極限與垂直漸近線

寫成 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ，表示當 x 趨近 a 時， $f(x)$ 無界增長；這並不表示 $+\infty$ 是普通的實數極限。若至少一個單側極限為無窮，直線 $x = a$ 就是一條垂直漸近線。

範例 5：容量引致的發散

一個簡單的擁塞等候時間模型為

$$W(q) = \frac{1}{1-q}, \quad 0 \leq q < 1,$$

其中 q 是需求佔容量的比例。則

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} W(q) = +\infty.$$

解釋：當需求趨近滿負荷容量時，模型預測等候時間極快上升。垂直漸近線 $q = 1$ 警告我們，在接近容量時運作並不穩定。

4 無窮遠處的極限與漸近思維

無窮遠處的極限描述長期行為。在建模中，它可以回答：預測是否趨於穩定？成本是否趨近基線？概率是否趨近一？

範例 6：有理模型的長期行為

計算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + x - 1}.$$

把分子及分母除以 x^2 ：

$$\frac{3 - 5/x + 2/x^2}{2 + 1/x - 1/x^2} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

因此模型的水平漸近線為 $y = 3/2$ 。

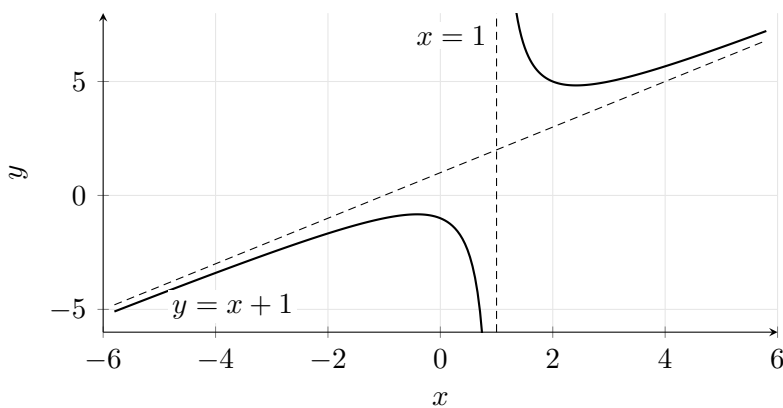


圖 4: 漸近線概括在禁用輸入附近及遠離原點時的行為。

課堂常用的極限技巧

情況	技巧	例子
連續表達式	直接代入	多項式、定義域內的平方根
多項式的 $0/0$	因式分解後約去	$(x^2 - 4)/(x - 2)$
根式的 $0/0$	有理化	$(\sqrt{x+4} - 2)/x$
有界振盪因子	夾擠定理	$x^2 \sin(1/x)$
分段函數或絕對值	檢查單側極限	$ x /x$
無窮遠處的可理函數	除以最高次冪	首項係數之比
垂直發散	單側無窮極限	$1/(x - a)$ 或 $1/(x - a)^2$

5 連續性：沒有跳躍、空洞或發散

連續性表示函數值與極限趨勢吻合。

在一點連續

若以下三個條件全部成立，函數 f 在 $x = a$ 連續：

1. $f(a)$ 有定義；
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在；
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

若任何一個條件不成立，函數在 a 不連續。

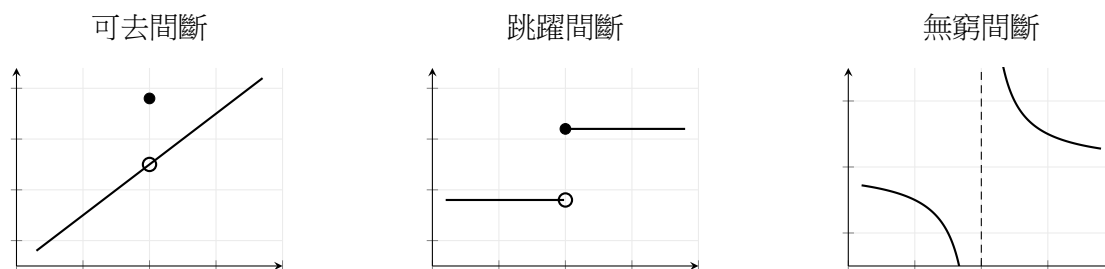


圖 5: 三種常見間斷：空洞、跳躍及垂直發散。

範例 7：使分段模型連續

求 k ，使

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 1, & x < 2, \\ 3x + k, & x \geq 2 \end{cases}$$

在 $x = 2$ 連續。

左極限：

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4k - 1.$$

右側函數值及極限：

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 6 + k.$$

令兩者相等：

$$4k - 1 = 6 + k \quad \Rightarrow \quad 3k = 7 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{7}{3}.$$

模型檢視：連續性的建模解釋

連續性是一項假設。物理溫度曲線通常連續；收費制度、學校評級界線或交通燈規則則可能有跳躍。在採用連續模型前，應先問真實系統是平滑變化，還是按閾值轉變。

6 存在性定理：IVT 與 EVT

中間值定理與極值定理之所以重要，是因為即使我們不能精確求解，它們仍可保證某些值存在。

中間值定理

若 f 在 $[a, b]$ 上連續，且 N 介乎 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間，則存在 $c \in (a, b)$ ，使 $f(c) = N$ 。
特別地，若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號，則 f 在 (a, b) 內有一個根。

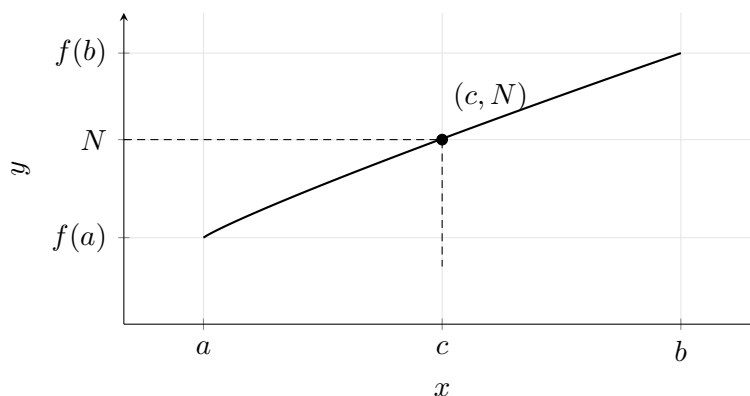


圖 6: 連續圖像由 $f(a)$ 移至 $f(b)$ 時，不可能略過其中任何中間值。

範例 8：解的存在性

證明

$$x^3 - x - 1 = 0$$

在 1 與 2 之間有一個解。

令 $f(x) = x^3 - x - 1$ 。由於 f 是多項式，所以它連續。計算

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0.$$

根據中間值定理，存在 $c \in (1, 2)$ ，使 $f(c) = 0$ 。

極值定理

若 f 在閉有界區間 $[a, b]$ 上連續，則 f 在 $[a, b]$ 上必定取得絕對最大值及絕對最小值。

在建模中，這條定理讓我們在嘗試尋找最優值之前，已有理據說「存在一個最優值」。各項條件都很重要：函數連續、區間封閉、區間有界。

7 夾擠定理與三角極限

夾擠定理處理被兩個較簡單函數夾住的函數。

夾擠定理

若在 a 附近

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

且

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

範例 9：以趨零因子控制振盪

計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

由於對 $x \neq 0$ 有 $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ ，

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

外側兩個函數都趨近 0，所以根據夾擠定理，

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

兩個標準三角極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

它們是推導三角函數導數的基礎，也說明了為何弧度而非角度制是微積分中的自然角度單位。

範例 10：運用標準三角極限

計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}.$$

改寫為：

$$\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}.$$

當 $x \rightarrow 0$ 時， $3x \rightarrow 0$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

8 分層極限工作坊

分層工作坊

[10 分鐘]

選擇一條路線。

1. 核心路線：代數極限。計算

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}.$$

2. 挑戰路線：單側極限與連續性。對於

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x < 1, \\ x^2 + a, & x \geq 1, \end{cases}$$

求 a ，使 f 在 $x = 1$ 連續。

3. 延伸路線：漸近模型。成本模型為

$$C(n) = \frac{5n^2 + 30n}{2n^2 + 1}.$$

求長期成本，並解釋水平漸近線的意義。

模型檢視：競賽式溝通

在建模報告中使用極限時，必須在情境中表述。

較弱的陳述：「極限是無窮。」

較強的陳述：「當需求從下方趨近滿負荷容量時，等候時間模型 $W(q) = 1/(1 - q)$ 無界增長。這顯示在接近 $q = 1$ 時運作並不安全：需求的細小增幅可能造成很大的等候時間。這個結論取決於模型假設服務容量維持不變。」

課堂總結

概念	建模意義
極限	描述某點附近的趨近行為。
空洞	公式可能在一個輸入沒有定義，但趨勢仍然清晰。
單側極限	偵測閾值、跳躍及有方向性的行為。
無窮極限	表示發散或容量失效。
無窮遠處的極限	描述長期行為及水平漸近線。
連續性	假設平滑變化；在閾值系統中可能失效。
IVT	保證在兩個異號值或兩個數值之間存在解。
EVT	在連續性及閉區間成立時，保證存在最大值／最小值。
夾擠定理	把複雜函數控制在較簡單的函數之間。

檢查點：離堂檢核

用三句話解釋 $f(a)$ 與 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 的分別，然後舉出一個建模情境，說明即使 $f(a)$ 遺失，極限仍然有用。

核心練習

1. 使用直接代入計算 $\lim_{x \rightarrow 4} (5x - 3)$ 。
2. 計算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ 。
3. 計算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ 。
4. 計算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ 。
5. 求 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 在 $x = 3$ 的單側極限。
6. 分類 $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ 在 $x = 3$ 的間斷類型。

練習檢核與提示

1. 直接代入得到 17。
2. 對 $x \neq 2$ 因式分解並約去 $x - 2$ ；極限為 3。
3. 有理化後得到極限 $1/2$ 。
4. 寫成 $\tan x/x = (\sin x/x)/\cos x$ ；極限為 1。
5. 左極限與右極限分別為 2 及 3，所以雙側極限不存在。

6. 間斷是可去的；在 $x = 3$ 的極限值為 6。

建模挑戰

一所學校的食堂使用

$$W(q) = \frac{4q}{1-q}, \quad 0 \leq q < 1,$$

估計以分鐘計的平均等候時間，其中 q 是需求除以服務容量。

1. 求 $\lim_{q \rightarrow 0^+} W(q)$ 並解釋。
2. 求 $\lim_{q \rightarrow 1^-} W(q)$ 並解釋。
3. 求模型預測 $W = 12$ 分鐘時的 q 值。
4. 指出這個模型的一項限制。
5. 根據極限行為，為食堂管理人員撰寫一項簡短建議。

建模檢核

首三項數值檢核分別為 0、 $+\infty$ 及 $q = 3/4$ 。回答最後兩部分時，應陳述容量與定義域假設、區分漸近警告與實證效度驗證、指出至少一個被省略的機制，並提出與極限行為一致的建議。

延伸練習

1. 使用 ε - δ 定義證明 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$ 。
2. 使用序列準則證明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ 不存在。
3. 計算 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)$ 。
4. 求 $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 4}$ 的所有垂直及水平漸近線。
5. 使用中間值定理證明 $e^x = 3 - 2x$ 至少有一個實數解。

延伸提示

第 1 題可取 $\delta = \varepsilon/3$ 。第 2 題使用兩個趨近 0、但正弦值分別為 1 及 -1 的序列。第 3 題有理化後得到極限 1。第 4 題的垂直漸近線是 $x = \pm 2$ ，水平漸近線是 $y = 3$ 。第 5 題把中間值定理應用於 $h(x) = e^x + 2x - 3$ ： $h(0) = -2$ 且 $h(1) = e - 1 > 0$ 。

選修附錄：洛必達法則預覽

有些極限產生 $0/0$ 或 ∞/∞ 等不定式。引入導數後，一項有力工具是洛必達法則：在合適條件下，

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

這項法則不應取代代數思維。因式分解、有理化及標準三角極限仍然重要，因為它們揭示表達式的結構。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第一冊（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模課程

補充 5：導數、變化率與局部線性模型

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次補充課程結束後，讀者應能夠：

1. 將導數解釋為局部斜率、瞬時變化率及靈敏度係數；
2. 透過差商計算簡單導數；
3. 正確運用幕、乘積、商、三角、指數、對數及鏈式法則；
4. 找出函數不可微的常見原因；
5. 在幾何或物理模型中使用隱式、參數式及相關變化率微分；
6. 使用中值定理連繫平均變化率與瞬時變化率；
7. 在建模報告中解釋導數計算，而不是把它們當成孤立的代數步驟。

1 導數是斜率、變化率與靈敏度

在建模中，導數不只是一項微積分運算。它回答一個實際問題：當輸入稍微改變時，輸出改變得有多快？若 $y = f(x)$ ，則 $f'(a)$ 測量在 $x = a$ 附近， x 每改變一個單位時 y 的局部改變量。

啟動：平均速度與某一瞬間的速度

[12 分鐘]

一部機械人在走廊上移動。它在 t 秒後離起點的距離由下式建模：

$$s(t) = 0.4t^2 + 1.2t \quad (0 \leq t \leq 10),$$

其中 s 以米為單位。

1. 計算由 $t = 3$ 至 $t = 5$ 的平均速度。
2. 計算由 $t = 4$ 至 $t = 4.1$ 的平均速度。
3. 在恰好 $t = 4$ 時，速度計應顯示甚麼數值？

討論重點：較短的時間區間提供較局部的資訊。導數就是這些平均變化率的極限值。

核心定義

對函數 f ，若下列極限存在，則 a 處的導數為

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

這個分數是差商，即通過 $(a, f(a))$ 及 $(a+h, f(a+h))$ 的割線斜率。

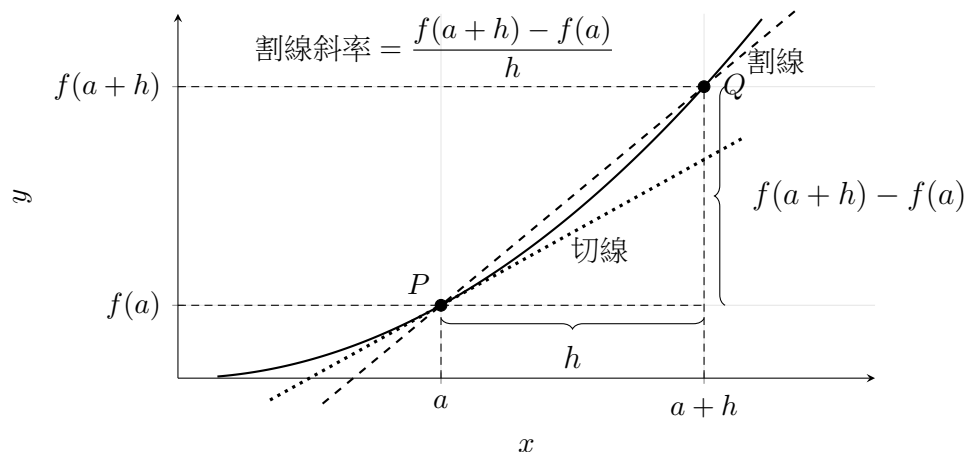


圖 1: a 處的導數是割線斜率的極限： $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 。當 h 變小時，通過 P 與 Q 的割線趨近 P 處的切線。

範例 1：由位置模型求速度

對 $s(t) = 0.4t^2 + 1.2t$ ， $t = 4$ 時的瞬時速度為

$$s'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(4+h) - s(4)}{h}.$$

計算

$$\begin{aligned} s(4+h) &= 0.4(4+h)^2 + 1.2(4+h) \\ &= 0.4(16 + 8h + h^2) + 4.8 + 1.2h \\ &= 11.2 + 4.4h + 0.4h^2, \end{aligned}$$

而 $s(4) = 11.2$ 。因此

$$\frac{s(4+h) - s(4)}{h} = 4.4 + 0.4h \rightarrow 4.4.$$

所以機械人在 $t = 4$ 時的速度為 4.4 m/s 。

檢查點：檢核 1

解釋 $s'(4)$ 的單位。為何它不是以米為單位？

2 由第一原理求導數

在使用規則之前，學生應先體驗這些規則為何成立，避免把導數變成與建模脫節的背誦表格。

範例 2：由定義求 x^2 的導數

令 $f(x) = x^2$ 。則

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

在 $x = 3$ 時，局部斜率為 6。這表示在 $x = 3$ 附近， x 增加 0.01 時， x^2 約增加 0.06。

範例 3： $\sqrt{x}$ 的導數

對 $x > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

導數在 $x = 0$ 附近較大，所以平方根圖像在原點附近陡峭，之後逐漸變平。

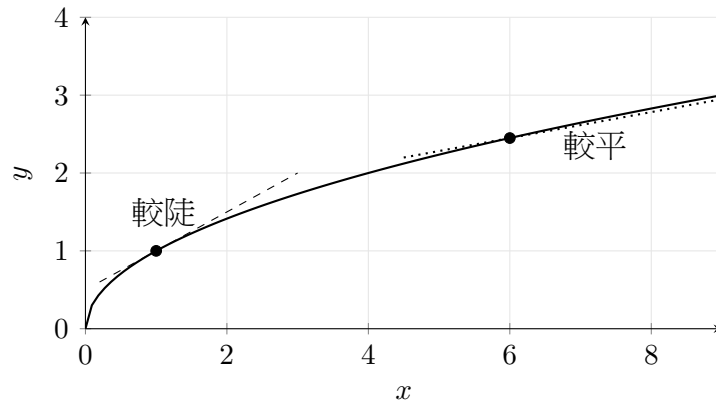


圖 2: $\sqrt{x}$ 的導數隨 x 增加而減小。這是 $1/(2\sqrt{x})$ 一個有用的視覺解釋。

模型檢視：模型批判：導數作為局部線性模型

導數提供局部近似：

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x.$$

它十分有力，但只屬局部。當 Δx 很大或圖像急劇彎曲時，近似可能很差。在建模報告中，務必陳述使用局部近似的區間。

3 高效計算的微分法則

核心導數法則

若 f 及 g 可微，則

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(c) &= 0, & \frac{d}{dx}(x^n) &= nx^{n-1}, & \frac{d}{dx}[cf] &= cf', \\ \frac{d}{dx}(f+g) &= f' + g', & \frac{d}{dx}(fg) &= f'g + fg', & \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{f'g - fg'}{g^2}.\end{aligned}$$

乘積法則不是 $(fg)' = f'g'$ 。商法則也不是分子的導數除以分母的導數。

範例 4：乘積法則與商法則

對

$$F(x) = x^2 \sin x + \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

求導數。對乘積項，

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

對商項，

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right) = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

因此

$$F'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x + \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

範例 5：三角函數與指數函數的導數

對季節性需求模型

$$D(t) = 120 + 30 \sin \left(\frac{2\pi t}{12} \right) + 5e^{0.03t},$$

其中 t 以月為單位，計算瞬時變化率：

$$D'(t) = 30 \cos \left(\frac{2\pi t}{12} \right) \cdot \frac{2\pi}{12} + 5e^{0.03t} \cdot 0.03.$$

故

$$D'(t) = 5\pi \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) + 0.15e^{0.03t}.$$

第一項描述季節性增減；第二項描述長期增長。

檢查點：檢核 2

為何 $\sin(\pi t/6)$ 的導數不只是 $\cos(\pi t/6)$ ？指出所用的法則。

4 鏈式法則作為建模管道

鏈式法則對建模不可或缺，因為許多模型都是管道：輸入影響中間量，而中間量再影響輸出。

鏈式法則

若 $y = f(u)$ 且 $u = g(x)$ ，則

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

以函數記號表示，

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

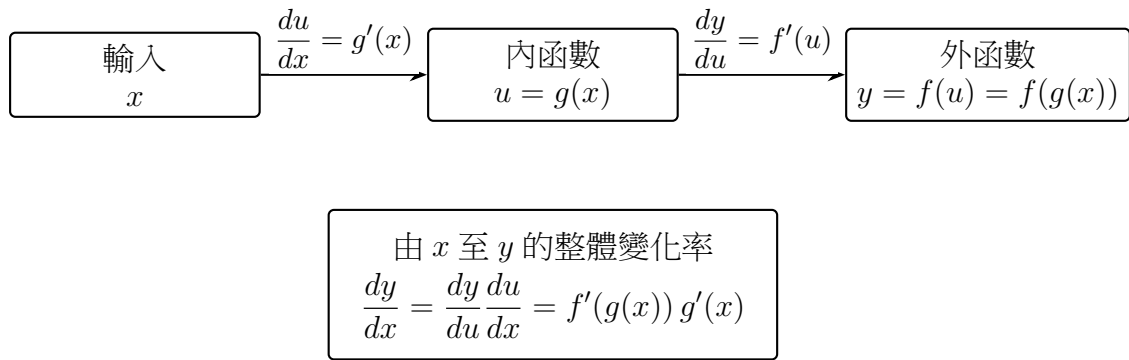


圖 3: 複合函數 $y = f(g(x))$ 的鏈式法則。輸入 x 先改變中間變量 $u = g(x)$ ，再由 u 改變最終輸出 $y = f(u)$ 。因此整體變化率是兩個變化率的乘積。

範例 6：經變換定義的污染濃度指標

一個濃度指標由下式建模：

$$I(t) = \sqrt{1 + 0.4C(t)}, \quad C(t) = 20e^{-0.08t}.$$

求 $I'(t)$ 並解釋其符號。

$$I'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1 + 0.4C(t)}} \cdot 0.4C'(t).$$

由於 $C'(t) = -1.6e^{-0.08t}$ ，

$$I'(t) = \frac{0.2(-1.6e^{-0.08t})}{\sqrt{1 + 8e^{-0.08t}}} < 0.$$

指標正在下降。導數隨時間更接近零，因為指數衰減的絕對幅度逐漸減慢。

範例 7：對數微分

對 $x > 0$ 的 $y = x^x$ 求導數。

$$\ln y = x \ln x.$$

對兩邊微分：

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1.$$

因此

$$y' = x^x (\ln x + 1).$$

當底數及指數都會改變時，這種方法十分有用。

5 導數何時不存在

即使圖像看來簡單，導數仍可能不存在。在模型中，這種失效可以標示切換、閾值、碰撞、容量邊界或政策轉變。

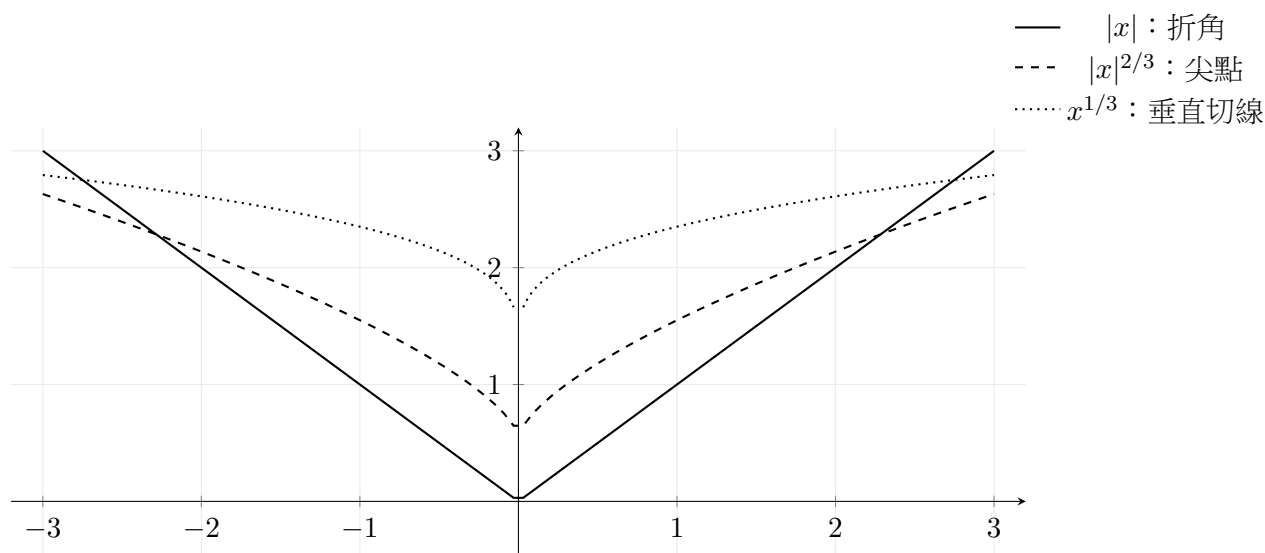


圖 4: 三種常見的不可微行為，每一種都可能有建模上的解釋。

檢查點：檢核 3

對 $f(x) = |x|$ ，計算在 0 的右導數及左導數。為何該處的導數不存在？

模型檢視：模型批判：平滑化還是保留閾值

在應用中，以平滑曲線取代折角可使微積分較容易處理，卻可能抹去真實閾值。例如，罰款可能恰好在需求超出容量時開始。一位良好的建模者應問：這個折角只是數學上的不便，還是我們需要保留的現象？

6 隱式、參數式與相關變化率微分

並非所有模型都自然寫成 $y = f(x)$ 。圓、橢圓、供求均衡及幾何約束，往往以包含多個變量的方程表示。

範例 8：圓上的隱式微分

對圓

$$x^2 + y^2 = 25,$$

我們對等式兩邊關於 x 微分：

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

在 $(3, 4)$ ，切線斜率為 $-3/4$ ，所以切線為

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3).$$

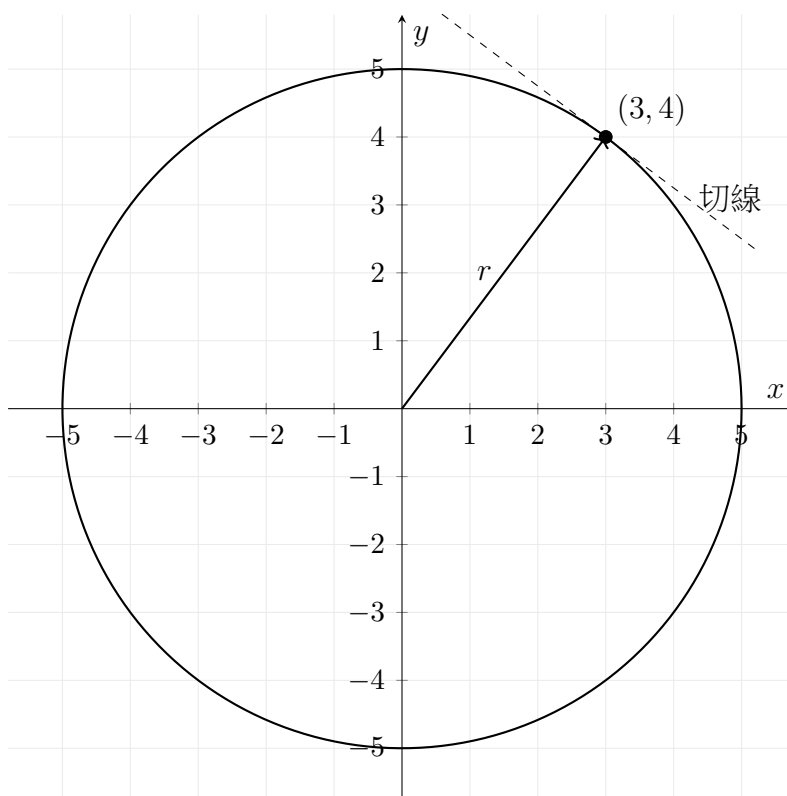


圖 5: 即使曲線整體不能表示成 x 的函數，隱式微分仍可求出切線斜率。

參數式導數

若曲線由 $x = g(t)$ 及 $y = h(t)$ 給出，則

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad dx/dt \neq 0.$$

這對運動模型很有用，因為 t 是自然的自變量。

範例 9：滑梯的相關變化率

一把 10 m 長的梯子靠在牆上，其底部以 0.5 m/s 向外移動。當梯底離牆 6 m 時，梯頂以多快的速度向下移？

令 x 為梯底與牆的距離， y 為梯頂高度。則

$$x^2 + y^2 = 100.$$

關於時間微分：

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0.$$

當 $x = 6$ 時， $y = 8$ 。故

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{6}{8}(0.5) = -0.375 \text{ m/s}.$$

負號表示高度正在下降。

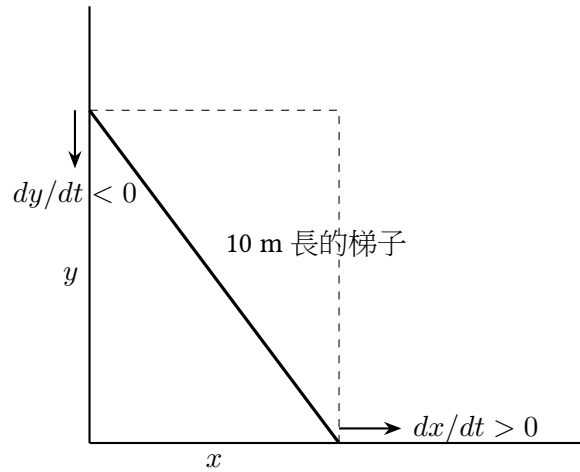


圖 6: 相關變化率把幾何約束轉化成各種變化率之間的關係。

7 中值定理與局部線性思維

中值定理

若 f 在 $[a, b]$ 上連續，並在 (a, b) 上可微，則存在 $c \in (a, b)$ ，使

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

即某處的瞬時變化率等於整個區間的平均變化率。

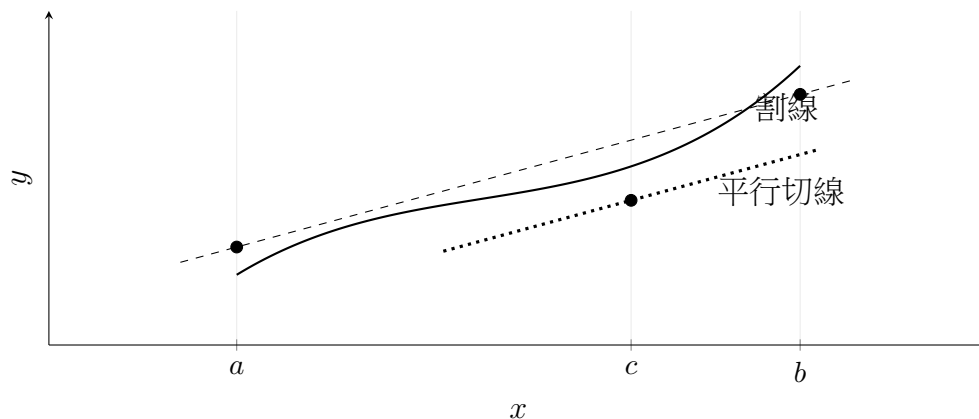


圖 7: 中值定理把平均變化率與至少一個瞬時變化率連繫起來。

範例 10：解釋平均速度的陳述

一部汽車沿直線路線的位置在 1.5 小時內增加了 120 km。若位置函數在該時間區間連續，並在其內部可微，中值定理表示在某一瞬間，其速度恰好是

$$\frac{120}{1.5} = 80 \text{ km/h.}$$

這不表示速度一直都是 80 km/h；它只表示至少有一次瞬時速度等於平均速度。若汽車一直向前行駛，該瞬間的速率也等於 80 km/h。

學生應掌握的重點

- 導數是局部變化率、斜率及靈敏度。
- 差商是從平均變化率過渡至瞬時變化率的橋樑。
- 法則可加快計算，而鏈式法則是複合模型的主要法則。
- 不可微往往具有實際意義，不只是技術上的失效。
- 當模型受幾何約束時，隱式方法與相關變化率方法不可或缺。
- 中值定理連繫局部與平均行為，這正是導數能支持現實解釋的原因。

8 選修延伸：洛必達法則

備用材料

學生理解導數後，才適合學習洛必達法則。若極限有 $0/0$ 或 ∞/∞ 不定式，且相應的導數商極限存在，則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

使用前必須先檢查是否為不定式。

選修範例：指數函數主導多項式

計算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

這是 ∞/∞ 型。使用洛必達法則兩次，得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

因此指數增長最終會主導二次增長。

9 練習

核心練習

1. 使用導數定義求 $f(x) = 3x^2 - 2x$ 的導數。
2. 對下式求導數：

$$f(x) = 5x^4 - 3x^{-2} + 7\sqrt{x} - 9.$$
3. 對 $g(x) = (x^2 + 1)(\sin x + x)$ 求導數。
4. 對 $h(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$ 求導數。
5. 對 $p(x) = \sin(3x^2 + 1)$ 求導數，並解釋哪一部分是內函數。
6. 求 $x^2 + y^2 = 13$ 在 $(2, 3)$ 的切線。

練習檢核與提示

1. 由定義所得的導數為 $6x - 2$ 。
2. 在原本的實數定義域上，結果為 $20x^3 + 6x^{-3} + 7/(2\sqrt{x})$ 。
3. 使用乘積法則得到 $2x(\sin x + x) + (x^2 + 1)(\cos x + 1)$ 。
4. 商法則的結果可簡化為 $(x^2 - 4x - 6)/(x - 2)^2$ 。
5. 內函數為 $3x^2 + 1$ ，而 $p'(x) = 6x \cos(3x^2 + 1)$ 。
6. 切線斜率為 $-2/3$ ： $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$ 。

建模練習

1. 排隊等候時間模型為 $W(\rho) = \frac{4\rho}{1-\rho}$ ，其中 $0 < \rho < 1$ 。計算 $W'(\rho)$ ，並解釋當 $\rho \rightarrow 1^-$ 時會發生甚麼。這對容量規劃為何重要？
2. 污染物濃度遵循 $C(t) = 60e^{-0.12t} + 8$ 。計算 $C'(t)$ ，並求變化率的絕對值首次低於 1 單位／日的時間。
3. 圓形感染前沿的半徑為 $r(t)$ ，面積為 $A(t) = \pi r(t)^2$ 。若 $dr/dt = 0.3 \text{ km/day}$ ，求 $r = 5 \text{ km}$ 時的 dA/dt 。
4. 季節性銷售模型為 $S(t) = 200 + 40 \cos(\pi t/6)$ 。求銷售額增長最快的時間，並解釋答案。

建模檢核

第 1 題， $W'(\rho) = 4/(1-\rho)^2$ ，當 $\rho \rightarrow 1^-$ 時發散。第 2 題， $|C'(t)|$ 在 $t = \ln(7.2)/0.12 \approx 16.45$ 日穿越 1，此後低於 1。第 3 題得到 $dA/dt = 3\pi \text{ km}^2/\text{day}$ 。第 4 題，最快增長發生在 $t = 9 + 12k$ ；在一個 12 個月的週期內取 $t = 9$ 。回答應包括單位、指定定義域及與決策相關的解釋。

挑戰與延伸

1. 證明：若區間內所有 x 均有 $f'(x) = 0$ ，則 f 在該區間為常數。清楚指出在哪一步使用中值定理。
2. 對 $x > 0$ 的 $y = x^x \sin x$ 求導數。
3. 對參數曲線 $x = t^2 + 1$ 、 $y = t^3 - t$ ，求 dy/dx 及 $t = 2$ 時的斜率。
4. 使用洛必達法則計算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$
5. 撰寫一段簡短建模文字，解釋為何以導數為基礎的近似可能在折角或閾值附近失效。

挑戰檢核

第 1 題，在指定區間的任何閉子區間上應用中值定理。第 2 題，對 $x > 0$ ， $y' = x^x [(\ln x + 1) \sin x + \cos x]$ 。第 3 題，對 $t \neq 0$ 有 $dy/dx = (3t^2 - 1)/(2t)$ ，而 $t = 2$ 時的斜率為 $11/4$ 。第 4 題的極限是 $1/2$ 。第 5 題應指出折角或閾值、解釋單一局部斜率為何不能跨越它，並建議分段或單側模型。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第一冊（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模課程

補充 6：導數的應用與最佳化

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

在本次兩小時的補充課程結束後，學生應能夠：

- 使用 f' 的符號判斷遞增 / 遞減行為；
- 找出並分類臨界點；
- 使用 f'' 討論凹凸性及拐點；
- 根據定義域、漸近線、導數符號及凹凸性繪製曲線草圖；
- 建構並求解一元最佳化模型；
- 把以導數為基礎的結論表述為建模證據，而不只是計算結果。

1 導數作為最佳化與模型設計的證據

在建模報告中，導數本身甚少是終點；它通常支持以下一類陳述：

「等候時間起初緩慢上升，接近容量時則急劇增加。」

一階導數告訴我們變化的方向及速率；二階導數則告訴我們變化正在加速還是減速。這些概念把微積分變成實際的決策語言：何時停止生產、最大值在何處、政策是否有邊際效益遞減，以及模型是否在邊界附近變得不穩定。

啟動活動：不作計算也能解讀導數

一個機械人配送系統的行程時間函數為 $T(q)$ ，其中 q 是每小時訂單數。假設在 $q = 40$ 時， $T'(40) > 0$ 且 $T''(40) > 0$ 。

你可以用文字說明甚麼？良好的答案不只是「導數為正」，而應說：

在每小時 40 張訂單時，增加需求會延長行程時間，而且增加幅度本身也正在加速。系統正走向擁塞。

2 極值與臨界點

極值

設 f 定義於定義域 D 。

- 若對所有 $x \in D$ 均有 $f(c) \geq f(x)$ ，則 $f(c)$ 是絕對最大值。
- 若對所有 $x \in D$ 均有 $f(c) \leq f(x)$ ，則 $f(c)$ 是絕對最小值。
- 若比較只需在 c 附近成立，則 $f(c)$ 是局部最大值或局部最小值。

若 $f'(c) = 0$ 或 $f'(c)$ 不存在，則點 c 是臨界點。

閉區間方法

若 f 在 $[a, b]$ 上連續，極值定理保證絕對最大值及絕對最小值存在。求取方法如下：

1. 找出 (a, b) 內所有臨界點；
2. 計算 f 在各臨界點及端點的值；
3. 比較各數值。

範例 1：閉區間上的絕對極值

求

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \quad \text{在} [-2, 3] \text{ 上}$$

的絕對最大值及最小值。首先，

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1).$$

在 $(-2, 3)$ 內的臨界點為 $x = -1$ 及 $x = 2$ 。比較候選值：

x	-2	-1	2	3
$f(x)$	1	12	-15	-4

因此絕對最大值為 $x = -1$ 時的 12，絕對最小值為 $x = 2$ 時的 -15。

檢查點：檢核

端點為何重要？因為閉區間上的絕對最大值或最小值可以出現在邊界，即使該處 $f'(x) \neq 0$ 。

3 一階導數判別法：變化方向

由 f' 的符號判斷單調性

若在一個區間上 $f'(x) > 0$ ，則 f 在該區間遞增。若 $f'(x) < 0$ ，則 f 遞減。這是中值定理的結果。

一階導數判別法

設 c 是 f 連續的一個臨界點。

- 若 f' 在 c 從 $+$ 變為 $-$ ，則 $f(c)$ 是局部最大值。
- 若 f' 在 c 從 $-$ 變為 $+$ ，則 $f(c)$ 是局部最小值。
- 若 f' 不改變符號，則 c 不是局部極值點。

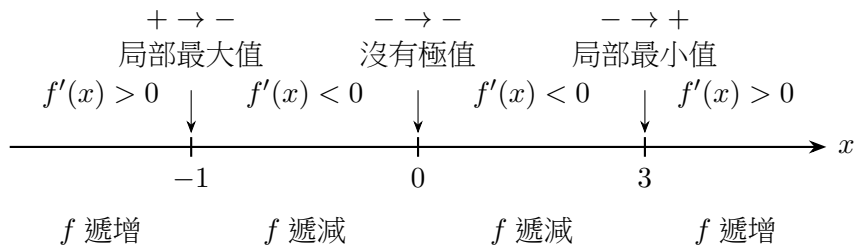


圖 1: 一階導數符號圖。由於 $f'(x) > 0$ 表示 f 遞增， $f'(x) < 0$ 表示 f 遞減，所以從 + 變為 - 產生局部最大值，而從 - 變為 + 產生局部最小值。在 $x = 0$ ， f' 的符號沒有改變，因此沒有極值。

範例 2：一階導數判別法

分析

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

的局部極值。我們計算

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

臨界點為 $x = 0$ 及 $x = 3$ 。由於 $4x^2 \geq 0$ ，在 0 以外， $f'(x)$ 的符號由 $x - 3$ 決定：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	↘		↘		↗

在 $x = 0$ ， f' 沒有改變符號，所以沒有極值。在 $x = 3$ ， f' 由負變正，所以 f 有局部最小值，且 $f(3) = -27$ 。

4 凹凸性與二階導數

凹凸性與拐點

二階導數測量斜率如何改變。

- 若 $f''(x) > 0$ ，則 f' 遞增，圖像凹向上。
- 若 $f''(x) < 0$ ，則 f' 遞減，圖像凹向下。
- 拐點出現在凹凸性改變之處。

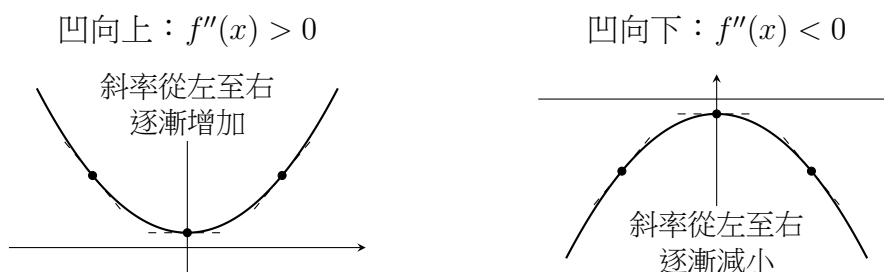


圖 2: 凹凸性描述切線斜率如何改變。凹向上的圖像有 $f''(x) > 0$ ，切線斜率從左至右增加；凹向下的圖像有 $f''(x) < 0$ ，切線斜率從左至右減小。

二階導數判別法

假設 $f'(c) = 0$ ，而 f'' 在 c 附近連續。

- 若 $f''(c) > 0$ ，則 f 在 c 有局部最小值。
- 若 $f''(c) < 0$ ，則 f 在 c 有局部最大值。
- 若 $f''(c) = 0$ ，判別結果不確定；應使用一階導數判別法。

範例 3：凹凸性與拐點

求

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$$

的拐點。我們有

$$f'(x) = 4x^3 - 12x, \quad f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1).$$

可能的拐點為 $x = -1$ 及 $x = 1$ 。檢查 f'' 的符號：

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
凹凸性	向上	向下	向上

凹凸性在 $x = -1$ 及 $x = 1$ 都有改變。由於 $f(-1) = f(1) = -4$ ，拐點為 $(-1, -4)$ 及 $(1, -4)$ 。

5 以曲線草圖診斷模型

繪製曲線草圖不只是繪圖練習。在建模中，它可以診斷公式在哪些區域有效、何處出現不現實的發散、何處反應飽和，以及模型預測何處有轉折點。

曲線草圖檢核表

對 $y = f(x)$ ，分析：

1. 定義域及排除值；
2. 截距及對稱性；
3. 垂直、水平或斜漸近線；
4. f' 的符號圖及局部極值；
5. f'' 的符號圖及拐點；
6. 原情境中的解釋。

範例 4：有理函數曲線草圖

繪製並解釋

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

定義域為 $x \neq \pm 1$ 。函數是偶函數，在 $x = -1$ 及 $x = 1$ 有垂直漸近線，而且

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1,$$

所以 $y = 1$ 是水平漸近線。另外，

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2},$$

因此在每個定義域區間內， f 對 $x < 0$ 遞增，對 $x > 0$ 遞減。點 $(0, 0)$ 是中間分支上的局部最大值。

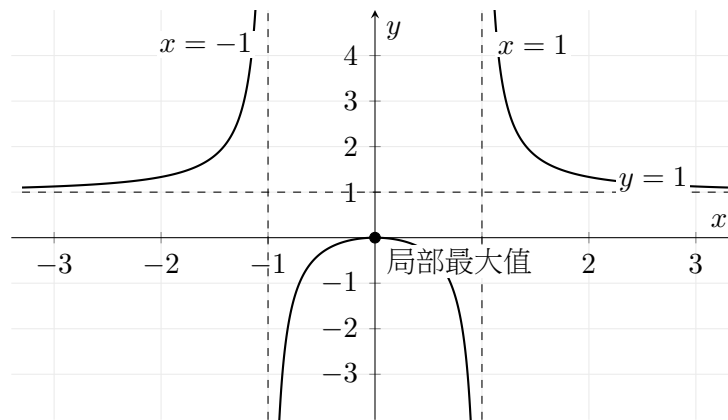


圖 3: $f(x) = x^2 / (x^2 - 1)$ 的清晰曲線草圖。標籤放在密集區域以外，並以白色背景框住，避免與分支及漸近線重疊。

模型解釋。若這個公式代表反應比率，則 $x = \pm 1$ 是危險閾值：模型預測該處出現無界行為。水平漸近線 $y = 1$ 則顯示遠離閾值時反應趨於穩定。

模型檢視：模型批判：導數證據

以導數繪製的草圖是否有意義，取決於公式及定義域。在建模報告中使用微積分時，應陳述：

- 實際問題所用的定義域；
- 被排除的點是物理邊界還是數學假象；
- 最大值／最小值在可行範圍內部還是邊界上出現；
- 垂直漸近線表示真實危險、容量失效，還是模型失效。

6 應用最佳化

最佳化工作流程

一個良好的最佳化解答有四個層次：

1. 定義變量及其單位；
 2. 寫出目標與約束；
 3. 化為現實定義域上的一元函數；
 4. 核證最優解，並在情境中解釋。
- 忽略定義域是最常見的建模錯誤之一。

範例 5：河邊圍欄

一位農夫有 200 m 圍欄，想在一條直河旁圍出一個長方形田地。沿河的一邊毋須圍欄。求使面積最大的長及闊。

令 x 為平行於河流的一邊， y 為闊。則

$$x + 2y = 200, \quad A = xy.$$

使用 $x = 200 - 2y$,

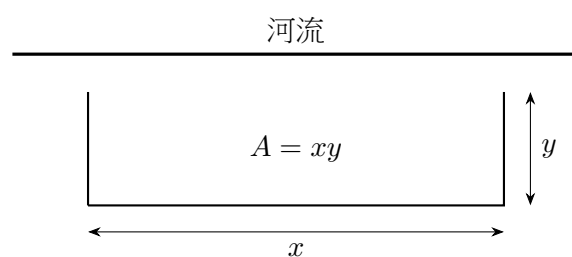
$$A(y) = (200 - 2y)y = 200y - 2y^2, \quad 0 < y < 100.$$

現在

$$A'(y) = 200 - 4y,$$

所以 $A'(y) = 0$ 得 $y = 50$ 。由於 $A''(y) = -4 < 0$ ，這給出最大值。因此

$$y = 50 \text{ m}, \quad x = 100 \text{ m}, \quad A_{\max} = 5000 \text{ m}^2.$$



$$\text{已用圍欄} = x + 2y$$

圖 4: 長方形田地建於河旁，只有三邊需要圍欄。因此 $A = xy$ ，圍欄約束為 $x + 2y = 200$ 。

範例 6：使利潤最大的生產量

一間製造商每週售出 q 件產品。成本為

$$C(q) = 0.01q^2 + 10q + 400,$$

而價格需求方程為

$$p(q) = 50 - 0.02q.$$

求使每週利潤最大的生產量。

收入為

$$R(q) = qp(q) = 50q - 0.02q^2.$$

利潤為

$$P(q) = R(q) - C(q) = (50q - 0.02q^2) - (0.01q^2 + 10q + 400) = 40q - 0.03q^2 - 400.$$

則

$$P'(q) = 40 - 0.06q.$$

令 $P'(q) = 0$ ：

$$q = \frac{40}{0.06} \approx 666.7.$$

由於 $P''(q) = -0.06 < 0$ ，這是連續模型的最大值。實務上應選擇 $q = 666$ 或 $q = 667$ ，並比較整數生產量的利潤。

檢查點：檢核

為何連續最優值可能不適合表示生產量？因為實際生產可能要求產品數量為整數，亦可能受批量、機器容量或需求不確定性限制。微積分結果是一項指引，不能自動成為最終決策。

7 局部近似與牛頓法

對可微函數，切線給出局部線性近似：

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

當精確計算困難，或模型需要快速估計靈敏度時，這種方法十分有用。

範例 7：局部線性近似

使用 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $a = 4$ 附近的資料近似 $\sqrt{4.1}$ 。

$$f(4) = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(4) = \frac{1}{4}.$$

因此

$$\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

在 $x = 4.1$ ，

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + \frac{1}{4}(0.1) = 2.025.$$

這與實際值 2.0248... 很接近。

牛頓法

要解 $f(x) = 0$ ，從猜測值 x_0 開始，反覆計算

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

在幾何上， x_{n+1} 是 x_n 處切線的 x 截距。

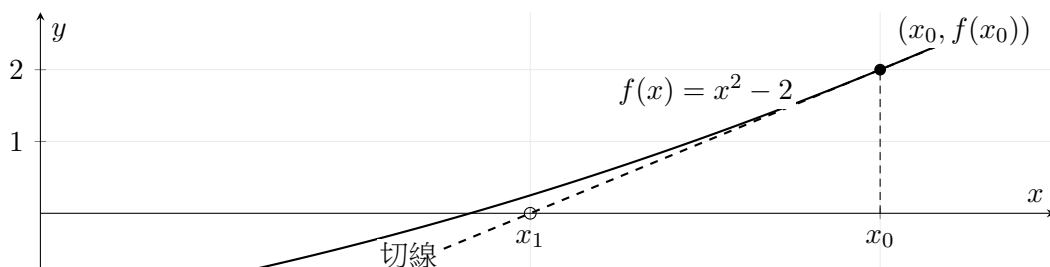


圖 5: 牛頓法對 $f(x) = x^2 - 2$ 的一步迭代。從 x_0 開始，切線在 x 軸的交點就是下一個近似 x_1 。

範例 8：近似 $\sqrt{2}$

以 $x_0 = 1$ 解 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ 。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

n	x_n
0	1.000000
1	1.500000
2	1.416667
3	1.414216
4	1.414214

牛頓法在這裏收斂得非常快，因為初始猜測合理，而且根是單根。

8 分層最佳化工作坊

15 分鐘工作坊

選擇一條路線。

核心路線。一個有正方形底、無頂蓋的箱子，體積必須為 32 m^3 。求使表面積最小的尺寸。

挑戰路線。求可內接於橢圓

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的最大長方形。

延伸路線。從 $x_0 = 0.7$ 開始，使用牛頓法近似 $\cos x = x$ 的正解，並解釋迭代為何可信。

模型檢視：如何撰寫建模結論

以導數為基礎的優良結論應包含：

1. 正在最佳化的目標；
2. 可行定義域；
3. 臨界點或邊界比較；
4. 核證方法；
5. 實際解釋及限制。

例如：

在連續生產模型內，因為 $P''(q) < 0$ ，利潤函數是凹的，所以臨界點給出全局最大值。最優的連續生產量約為每週 667 件。在營運計劃中，只有在檢查整數利潤及容量約束後才應四捨五入。

總結

重點整理

導數資訊

建模解釋

$f'(x) > 0$

輸入增加時，輸出增加。

$f'(x) < 0$

輸入增加時，輸出減少。

f' 從 $+$ $\rightarrow$ $-$

局部最大值。

f' 從 $-$ $\rightarrow$ $+$

局部最小值。

$f''(x) > 0$

斜率遞增；反應加速；凹向上。

$f''(x) < 0$

斜率遞減；邊際效益遞減或凹向下。

垂直漸近線

可能的容量上限、奇點或模型失效。

閉區間比較

絕對最優值可能在邊界出現。

牛頓迭代

以切線數值求解方程的方法。

練習

核心練習

- 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 在 $[-1/2, 4]$ 上的絕對最大值及最小值。
- 對 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$ ，求臨界點、遞增／遞減區間及局部極值。
- 求 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ 的所有拐點。
- 使用曲線草圖檢核表繪製 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ 。
- 一間製造商的成本為 $C(q) = 0.01q^2 + 10q + 400$ ，價格為 $p = 50 - 0.02q$ 。重新完成利潤範例，並比較整數選擇 $q = 666$ 及 $q = 667$ 。

核心練習檢核

第 1 題，把端點與臨界點 $x = 0, 2$ 比較：絕對最小值是在 $x = 2$ 的 -3 ，絕對最大值是在 $x = 4$ 的 17 。第 2 題的臨界點為 $x = -3, 2$ ，分別給出局部最大值 86 及局部最小值 -39 。第 3 題，在由 $x = 0$ 及 $x = (3 \pm \sqrt{3})/2$ 分割出的四個區間上檢查凹凸性。第 4 題，多項式除法得到 $f(x) = x - 2 - 1/(x - 2)$ ；使用此式辨認兩條漸近線。第 5 題，在所述貨幣單位下，整數利潤為 $P(666) = 12933.32$ 及 $P(667) = 12933.33$ 。

建模挑戰

一個食堂櫃位每分鐘最多可服務 60 名學生。平均等候時間的一個簡單擁塞模型是

$$W(q) = \frac{q}{60 - q}, \quad 0 < q < 60,$$

其中 q 是到達率。

- 求 $W'(q)$ 及 $W''(q)$ 。
- 解釋 W' 及 W'' 的符號。
- 當 $q \rightarrow 60^-$ 時發生甚麼？
- 撰寫一項簡短建議，解釋為何接近容量運作具有風險。

建模挑戰檢核

你應得到

$$W'(q) = \frac{60}{(60-q)^2} > 0, \quad W''(q) = \frac{120}{(60-q)^3} > 0, \quad \lim_{q \rightarrow 60^-} W(q) = +\infty.$$

一項站得住腳的建議會指出可行定義域，解釋延誤既在增加、增幅亦在加速，並把發散視為容量問題或模型失效的警告，而不是字面上的無限預測。

延伸練習

1. 從 $x_0 = 1$ 開始，使用牛頓法求 $x^3 + 2x - 5 = 0$ 的正根。
2. 求 $\cos x$ 的麥克勞林多項式 $P_4(x)$ ，並用它近似 $\cos(0.2)$ 。
3. 求半圓 $x^2 + y^2 = R^2$ 、 $y \geq 0$ 下方內接長方形的最大尺寸。

延伸提示

第 1 題使用 $x_{n+1} = x_n - (x_n^3 + 2x_n - 5)/(3x_n^2 + 2)$ ；正根約為 1.32827。第 2 題， $P_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$ ，所以 $P_4(0.2) \approx 0.9800667$ 。第 3 題，把長方形面積寫成 $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$ ：最大化尺寸為 $\sqrt{2}R$ 乘 $R/\sqrt{2}$ 。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第一冊（OpenStax）
- 非線性限制最佳化指南（NEOS Guide）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模課程

補充 7：定積分、累積與數值積分

Kenneth Sok Kin Cheng

2026 年 8 月 20 日修訂

學習目標

在這節兩小時補充課結束時，學生應能：

- 解釋定積分作為有符號面積、累積變化和平均值；
- 使用左矩形、右矩形和中點矩形建構並解讀黎曼和；
- 利用微積分基本定理來計算基本定積分；
- 在簡單的建模案例中應用換元積分法和分部積分法；
- 識別積分是否為反常積分，以及它是否收斂；
- 比較矩形法、梯形法、辛普森法與蒙地卡羅方法作為數值積分工具。

1 從面積到累積變化

定積分不僅僅是一種計算幾何面積的方法。在建模中，它通常代表一個累積的量：水進入水箱的總量、時間上的總成本、平均庫存、概率質量或總污染物負載。相同的符號

$$\int_a^b f(x) dx$$

可能表示面積、總變化或平均效應，視乎 f 代表甚麼。

啟動活動：積分量度甚麼？

假設 $r(t)$ 是學生到達食堂的到達速率，單位是每分鐘的學生數。那麼

$$\int_0^{20} r(t) dt$$

代表甚麼？它不是速率，而是首 20 分鐘內到達的學生總人數。

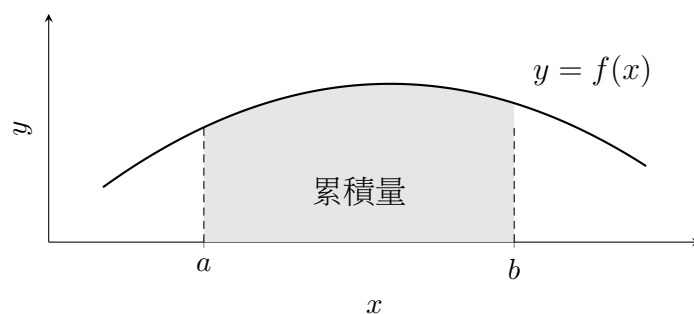


圖 1: 定積分在一個區間上累積垂直量 $f(x)$ 。如果 f 是速率，則積分是總變化。如果 f 是密度，則積分是總質量。

2 黎曼和：構建積分

區間劃分與黎曼和

$[a, b]$ 的一個區間劃分是以下分點數列

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

第 k 個子區間的寬度是 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 。如果 x_k^* 是子區間中的一個樣本點，對應的黎曼和是

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

對於一個等距劃分， $\Delta x = (b - a)/n$ 。常見的選擇是左端點、右端點和中點。

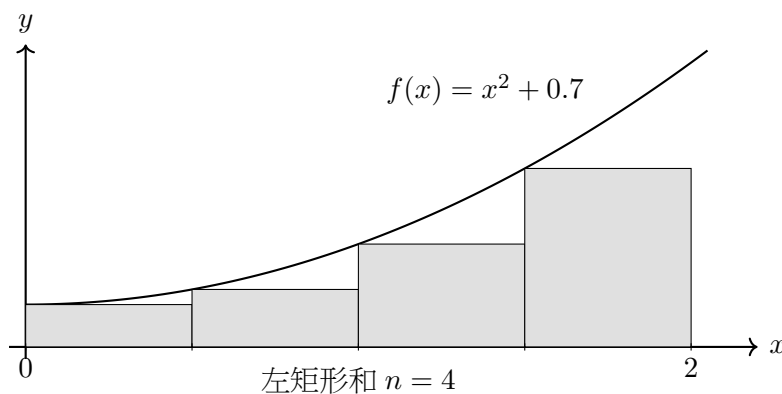


圖 2: 左黎曼和使用每個子區間左端點的高度。對於增函數，它會低估面積。

計算範例 1：左黎曼和

使用 $n = 4$ 個等寬子區間的左黎曼和近似

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx$$

這裡 $\Delta x = 0.5$ ，左樣本點為 $0, 0.5, 1, 1.5$ 。因此

$$S_L = 0.5 [f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5)] = 0.5(1 + 1.25 + 2 + 3.25) = 3.75.$$

精確值稍後為 $14/3 \approx 4.667$ ，因此左和低估了。

定積分

如果區間劃分的網格趨近於零時，黎曼和收斂於一個唯一的數，我們定義

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

當 $f \geq 0$ 時，這代表面積。當 f 改變符號時，它代表有符號面積：在 x 軸上方的面積貢獻為正，在下方的面積貢獻為負。

檢查點：檢查點

對於 $[a, b]$ 上的增正函數，左和或右和會更大？使用矩形而非公式來解釋。

3 微積分基本定理

微積分基本定理連接了補充章節 5 和本課程中的兩個概念：導數與積分。

微積分基本定理

設 f 在 $[a, b]$ 上連續。

- 第一部分：如果 $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ ，則 $A'(x) = f(x)$ 。
- 第二部分：如果 $F'(x) = f(x)$ ，則

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

第一部分說明累積量的變化率是 $f(x)$ ；第二部分說明定積分可以透過原函數求值。

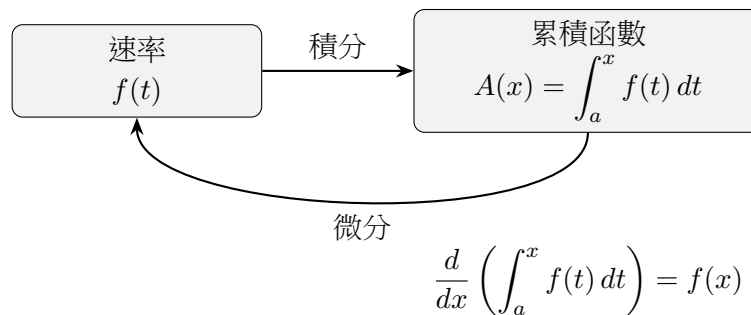


圖 3: 微積分基本定理第一部分說明，在累積函數的設定下，積分與微分互相抵消。

例題 2：利用微積分基本定理求值

求

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx.$$

原函數為 $F(x) = x^3/3 + x$ 。因此

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

這解釋了為甚麼 $n = 4$ 的左端點和 3.75 只是近似值。

例題 3：對積分求導

計算

$$\frac{d}{dx} \left(\int_2^{x^2} \sin(t^2) dt \right).$$

令 $u = x^2$ 。根據微積分基本定理第一部分和鏈式法則，

$$\frac{d}{dx} \int_2^u \sin(t^2) dt = \sin(u^2) \frac{du}{dx} = 2x \sin(x^4).$$

被積函數不一定有初等原函數；導數仍然很容易求得。

4 換元積分法與分部積分法

換元積分法作為反向鏈式法則

如果 $u = g(x)$ 且 $du = g'(x) dx$ ，則

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

對於定積分，改變極限： $x = a \mapsto u = g(a)$ 和 $x = b \mapsto u = g(b)$ 。

計算範例 4：帶有定積分的換元法

求

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx.$$

令 $u = x^2$ ，則 $du = 2x dx$ 且 $x dx = \frac{1}{2} du$ 。極限變為 $0 \mapsto 0$ 和 $2 \mapsto 4$ 。因此

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

分部積分法作為乘積法則的逆用

從 $(uv)' = u'v + uv'$ ，我們得到

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

一個有用的選擇規則是 **LIATE**：對數、反三角、代數、三角、指數。列表中較早出現的函數通常是 u 的一個好選擇。

計算範例 5：分部積分法

求

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

選擇 $u = x$ 和 $dv = e^x dx$ 。則 $du = dx$ 且 $v = e^x$ 。因此

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$$

檢查點：檢查點

使用換元積分法時，首要問題是：「哪個內函數的導數亦出現在被積函數中？」使用分部積分法時，首要問題是：「哪一部分在微分後會變得更簡單？」

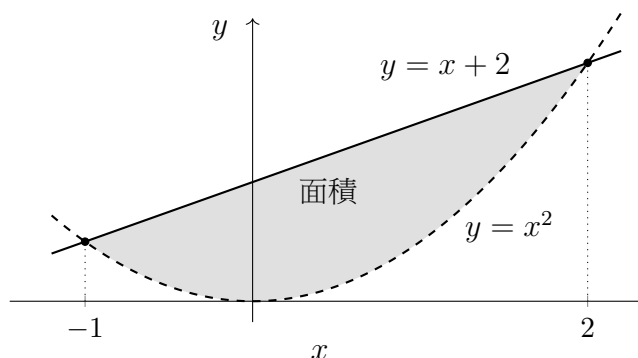
5 定積分的應用

兩曲線之間的面積

如果 $f(x) \geq g(x)$ 在 $[a, b]$ 上成立，則兩曲線之間的面積為

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

順序很重要：上曲線減去下曲線。



$$\text{面積} = \int_{-1}^2 [(x + 2) - x^2] dx$$

圖 4: 計算兩曲線之間的面積，積分上曲線減去下曲線。陰影區域由 $y = x + 2$ 和 $y = x^2$ 在 $x = -1$ 到 $x = 2$ 之間所界定。

計算範例 6：兩曲線之間的面積

求 $y = x^2$ 和 $y = x + 2$ 所圍成的面積。

交點滿足 $x^2 = x + 2$ ，即 $x = -1$ 或 $x = 2$ 。在此區間上， $x + 2 \geq x^2$ 。因此

$$A = \int_{-1}^2 [(x + 2) - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

平均值與累積變化量

連續函數 f 在 $[a, b]$ 上的平均值為

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

如果 $Q'(t) = r(t)$ ，則

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b r(t) dt.$$

這是流動、污染、人口、庫存和能源模型中使用的形式。

計算範例 7：平均庫存

在 EOQ 模型中，假設庫存在週期長度為 T 的過程中從 Q 線性減少到 0：

$$I(t) = Q \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

平均庫存為

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T Q \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = \frac{Q}{T} \left[t - \frac{t^2}{2T}\right]_0^T = \frac{Q}{2}.$$

這個熟悉的結果是一個積分陳述，而不僅僅是幾何三角形的論證。

模型檢視：模型批判：單位與符號

在報告積分之前，請檢查其單位。如果 $r(t)$ 是升/小時，而 t 以小時衡量，則 $\int r(t) dt$ 是升。同時檢查有符號的面積是否合理：負值可能代表流出、損失或修正，而不僅僅是幾何上的負面積。

6 反常積分與收斂性

有些建模積分延伸至無限區間或包含無界被積函數。這些是反常積分。它們必須使用極限來定義。

兩種常見的反常積分

對於無限區間，

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

對於在 a 處的無界奇點，

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

如果極限存在，則積分收斂。否則它發散。

計算範例 8：收斂與發散的比較

比較

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \quad \text{與} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x} dx.$$

對於前者，

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1,$$

因此它收斂。對於後者，

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty,$$

因此它發散。無限區間並不自動意味著無限面積。

檢查點：檢查點

為甚麼計算 $\int_{-1}^1 1/x^2 dx = [-1/x]_{-1}^1$ 並不成立？請找出隱藏的不連續點。

7 數值積分

許多建模中的積分沒有初等原函數。例如， $\int e^{-x^2} dx$ 出現在統計學中，但不能用初等函數表示。我們因此採用數值近似。

梯形法與辛普森法

對於 $[a, b]$ 的正則劃分，有 n 個子區間和 $h = (b - a)/n$ ：

$$T_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

如果 n 是偶數，辛普森法是

$$S_n = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

梯形法使用直線面板；辛普森法使用二次面板。

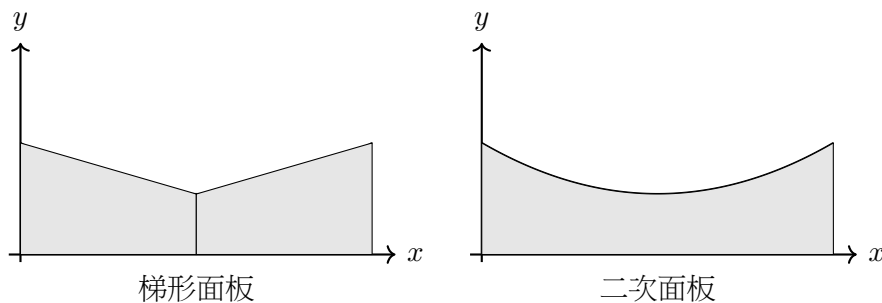


圖 5: 梯形面板由直線段近似曲線。辛普森法以二次曲線近似相鄰兩個子區間。

計算範例 9：比較數值規則

使用 $n = 4$ 個子區間估計

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

當 $h = 0.25$ 時，函數值約為

x_k	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$e^{-x_k^2}$	1.00000	0.93941	0.77880	0.56978	0.36788

因此

$$T_4 = 0.74298, \quad S_4 = 0.74685.$$

精確值約為 0.746824，因此辛普森法在此例更準確。

模型檢視：建模報告中的數值積分

一份好的報告不應只寫「我們使用了辛普森法」，還應交代區間、步長、停止準則和運算核查。例如：

我們以步長 $h = 0.01$ 的辛普森法估計積分。把子區間數目加倍後，所得數值的變化小於 10^{-4} ，因此數值誤差相對於資料不確定性很小。

8 總結與練習

關鍵觀念

- 黎曼和透過有限的區間來近似積分。
- 定積分是累積運算符：面積、總變化量、平均值、概率或質量。
- 微積分基本定理連接了累積的變化量與瞬時速率。
- 換元積分法是反向鏈式法則；分部積分法是反向乘法法則。
- 反常積分需要極限，並且可能收斂或發散。
- 數值積分是一種建模選擇；必須交代精度與運算成本的理據。

核心練習

1. 對 $\int_0^2 x^2 dx$ 在 $n = 4$ 時計算左端點和、右端點和與中點和，並與精確值比較。
2. 使用微積分基本定理求 $\int_1^4 (3x^2 - 2x + 5) dx$ 的值。
3. 使用換元積分法求 $\int_0^1 2x(1 + x^2)^5 dx$ 的值。
4. 使用分部積分法求 $\int_1^e \ln x dx$ 的值。
5. 判斷 $\int_1^\infty x^{-3/2} dx$ 是否收斂。
6. 找出函數 $f(x) = x^2$ 在區間 $[0, 3]$ 上的平均值。

練習核對與提示

1. 左端點和、右端點和與中點和分別為 $7/4$ 、 $15/4$ 與 $21/8$ ；精確值為 $8/3$ 。
2. 由微積分基本定理可得 63。
3. 令 $u = 1 + x^2$ ，積分值為 $21/2$ 。
4. 分部積分法給出 1。
5. 此反常積分收斂至 2。
6. 平均值為 3。

建模挑戰：食堂流入量

在午餐的前 30 分鐘內，學生到達速率採用下式建模：

$$r(t) = 18 + 0.9t - 0.03t^2, \quad 0 \leq t \leq 30,$$

其中 t 以分鐘計量， $r(t)$ 以每分鐘學生的數量表示。

1. 計算前 30 分鐘內到達的學生總數。
2. 求平均到達速率。
3. 解釋使用平滑的速率函數來表示學生到達的其中一個假設。
4. 建議一種利用觀測所得的排隊資料進行模型效度驗證的方法。

建模核對

模型預測共有 675 人到達，平均到達速率為每分鐘 22.5 名學生。完整答案亦須區分平滑的期望速率與離散到達事件，說明資料收集區間及量度規則，並提出樣本外比較：把速率積分所得的預測人數與觀測人數比較。

延伸練習

1. 證明：若 f 是奇函數且在 $[-a, a]$ 上可積分，則 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 。
2. 使用 $n = 4$ 的辛普森法近似 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ，並與 $\pi/4$ 比較。
3. 核證當 $\lambda > 0$ 時， $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ ，並解釋這對概率密度模型的意義。

延伸提示

第 1 題可在其中一半區間令 $u = -x$ 。第 2 題的辛普森法結果為 $8011/10200 \approx 0.785392$ ，接近 $\pi/4 \approx 0.785398$ 。第 3 題應先計算截斷後的積分，再令其上限趨向無窮；所得值為 1，符合概率密度的規範化要求。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第一冊 (OpenStax)
- 《微積分》第二冊 (OpenStax)

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

補充課 8：建模與模擬的概率基礎

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成這節兩小時的補充課後，學生應能：

- 利用樣本空間、事件與概率模型描述隨機試驗；
- 運用計數、補事件及容斥原理計算簡單概率；
- 區分條件概率、獨立性與互斥；
- 運用貝葉斯定理根據證據更新概率；
- 利用隨機變量、PMF / PDF、CDF、期望值及方差為不確定性建模；
- 識別二項、泊松、指數、正態或馬爾可夫鏈模型的適用情況；
- 解釋大數定律與中心極限定理如何為蒙地卡羅模擬提供理據。

1 概率為何屬於數學建模的一部分

當輸入固定時，確定性模型會給出一個輸出。真實系統卻經常需要另一套描述語言：顧客不會恰好每五分鐘到達一次；感測器讀數帶有雜訊；生產線偶爾產生次品；天氣亦會逐日改變。因此，建模報告不應只說「會發生甚麼」，還應回答「發生的可能性有多大」、「變異程度如何」及「我們有多大信心」。

引入活動：確定性還是隨機性？

把下列情境分類為主要屬於確定性、隨機性或兩者混合。

1. 一部機械人以固定速度 1.5 m/s 行駛 120 m。
2. 午膳時間有顧客進入飯堂。
3. 一個零件在一個月內有 2% 的故障概率。
4. 送貨路線已經規劃，但行車時間取決於天氣及擠塞情況。

有力的建模答案通常會把可預測的結構與隨機變異分開處理。

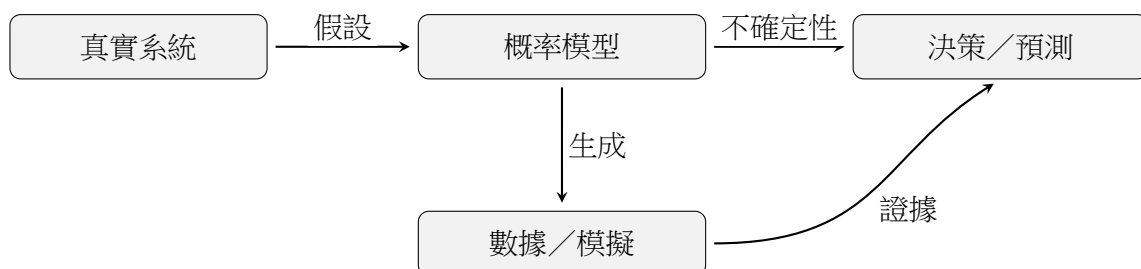


圖 1: 當假設需要描述不確定性、變異與證據，而非單一固定結果時，便須在建模中引入概率。

2 樣本空間、事件與計數

樣本空間與事件

隨機試驗是一個結果不確定、但可以描述所有可能結果的程序。樣本空間 Ω 是所有可能結果的集合；事件則是其子集 $A \subseteq \Omega$ 。

例題 1：兩顆骰子

擲兩顆公平骰子時，

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}, \quad |\Omega| = 36.$$

「點數和為 7」的事件是

$$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

所以 $\mathbb{P}(\text{點數和} = 7) = 6/36 = 1/6$ 。

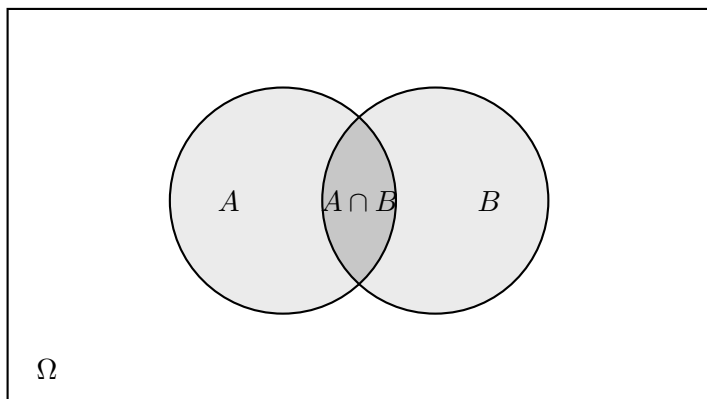
概率規則

對事件 A 與 B ，

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

若所有結果等可能且 Ω 是有限集，則

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

圖 2: 容斥原理把交集減去一次，因為它原先在 A 與 B 中各被計算了一次。

例題 2：生日問題

假設生日均勻分佈於 365 日。對 $n = 23$ 人，計算至少兩人同生日的概率。使用補事件較為容易。所有人生日均不同的概率為

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - 22)}{365^{23}} \approx 0.4927.$$

因此

$$\mathbb{P}(\text{至少有一對生日相同}) \approx 1 - 0.4927 = 0.5073.$$

只需 23 人，概率便已略高於一半。

檢查點：檢查點

一個袋內有 5 個紅球及 3 個藍球。不放回地抽取兩球。「第一球為紅球」與「第二球為紅球」是否獨立？利用條件概率解釋。

3 條件概率、獨立性與貝葉斯定理

條件概率

對滿足 $\mathbb{P}(B) > 0$ 的事件 A 與 B ,

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

這表示先把樣本空間限制為 B ，再重新正規化。

獨立性

若

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

則事件 A 與 B 互相獨立。當 $\mathbb{P}(B) > 0$ 時，這等價於 $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$ 。獨立不等同於互斥：若兩個正概率事件互斥，知道其中一個發生便表示另一個不可能發生，因此兩者並不獨立。

全概率公式與貝葉斯定理

若 $B_1, \dots, B_n$ 構成 Ω 的一個劃分，則

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

貝葉斯定理根據觀察所得的證據，更新某個原因的機率：

$$\mathbb{P}(B_k | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

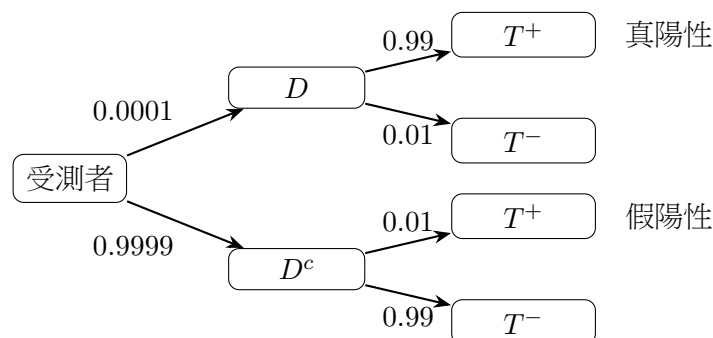


圖 3: 概率樹把先驗概率與檢測可靠度分開。當基準率極低時，假陽性分支可能佔主導。

例題 3：醫學檢測與基準率

某疾病每 10,000 人中有 1 人患上。某項檢測的靈敏度為 99%，特異度亦為 99%。一名隨機選出的受測者得到陽性結果。他患病的概率是多少？

令 D 表示「患病」， T^+ 表示「檢測呈陽性」。則

$$\mathbb{P}(D) = 10^{-4}, \quad \mathbb{P}(T^+ | D) = 0.99, \quad \mathbb{P}(T^+ | D^c) = 0.01.$$

因此

$$\mathbb{P}(D | T^+) = \frac{0.99(10^{-4})}{0.99(10^{-4}) + 0.01(0.9999)} \approx 0.0098.$$

即使檢測呈陽性，患病概率仍低於 1%。這並非表示檢測毫無用處，而是因為疾病罕見。

模型檢視：模型批判：報告中的貝葉斯定理

運用貝葉斯定理時，報告應說明先驗概率、證據可靠度，以及觀察證據後哪些數值有所改變。許多錯誤結論源於忽略基準率。

4 隨機變量、分佈、期望值與方差

隨機變量

隨機變量是函數 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ，把每個結果對應至一個數值。若其可能取值有限或可數，便稱為離散隨機變量；若概率以區間及積分描述，便稱為連續隨機變量。

PMF、PDF 與 CDF

對離散隨機變量，概率質量函數為

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad \sum_x p_X(x) = 1.$$

對連續隨機變量，概率密度函數滿足

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

對任何隨機變量，累積分佈函數為

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

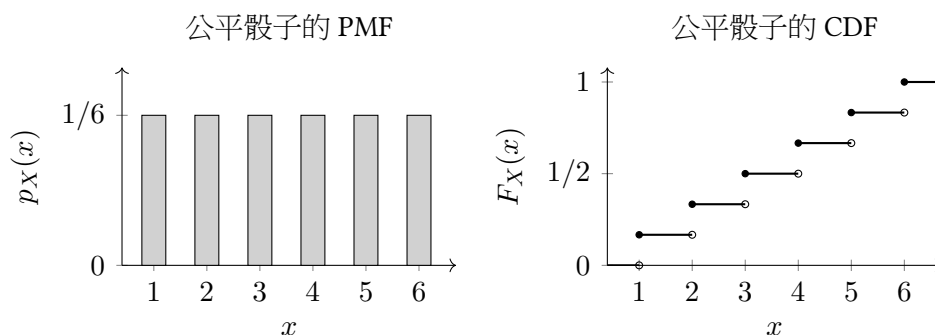


圖 4: 離散分佈的概率質量集中於若干點，而其 CDF 以跳躍方式增加。

期望值與方差

期望值是長期平均值：

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x p_X(x) \quad (\text{離散}), \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (\text{連續}).$$

方差衡量離散程度：

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

標準差為 $\text{SD}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ 。

例題 4：擲骰子的平均值與方差

令 X 為擲一顆公平六面骰子所得的點數。則

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3.5,$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6},$$

所以

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.917.$$

標準差約為 1.708。

例題 5：期望利潤

一間保險公司以 \$1,500 的保費售出一份一年期保單。若受保人死亡，索償額為 \$200,000，而該年內的死亡概率為 $p = 0.01$ 。保險公司的期望利潤為

$$0.99(1500) + 0.01(1500 - 200000) = 1485 - 1985 = -500.$$

在此保費下，每份保單的期望虧損為 \$500。這與決策理論及風險建模直接相關。

5 建模常用的具名分佈

何時使用哪一種分佈

分佈	建模問題	主要數值
伯努利 (p)	一次成功／失敗試驗	平均值 p ，方差 $p(1-p)$
二項 (n, p)	n 次獨立試驗中的成功次數	平均值 np ，方差 $np(1-p)$
泊松 (λ)	固定區間內隨機到達的次數	平均值 λ ，方差 λ
指數 (λ)	泊松到達之間的等候時間	平均值 $1/\lambda$ ，無記憶性
正態 (μ, σ^2)	測量誤差、平均值、自然變異	平均值 μ ，方差 σ^2

例題 6：二項品質控制

一間工廠的次品率為 $p = 0.02$ 。在一批 $n = 100$ 件產品中，令 X 為次品數目。則 $X \sim \text{Bin}(100, 0.02)$ ，且

$$\mathbb{E}[X] = 100(0.02) = 2.$$

次品不多於 2 件的概率為

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 \binom{100}{k} (0.02)^k (0.98)^{100-k} \approx 0.677.$$

例題 7：泊松到達與指數等候時間

顧客以平均每小時 12 人的速率到達服務窗口。若以泊松模型描述到達過程，則一小時內的到達人數為 $X \sim \text{Pois}(12)$ ：

$$\mathbb{P}(X = 10) = e^{-12} \frac{12^{10}}{10!} \approx 0.105.$$

直至下一名顧客到達的等候時間為 $T \sim \text{Exp}(12)$ 小時，故

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{12} \text{ 小時} = 5 \text{ 分鐘}.$$

這是隊列模擬的概率基礎。

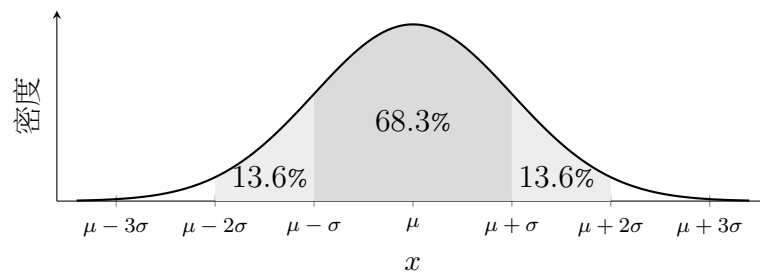


圖 5: 正態分佈常用於描述測量誤差、自然變異與抽樣分佈。約 68.3% 的數值位於平均值的一個標準差範圍內。

檢查點：檢查點

下列各情況應使用哪一種分佈？

1. 未來 10 分鐘內到達的學生人數。
2. 隨機選出的零件是否有缺陷。
3. 直至下一名顧客到達的等候時間。
4. 感測器重複讀數的測量誤差。

6 蒙地卡羅、大數定律與中心極限定理

概率與模擬之間的連繫很簡單：若無法精確計算某個量，有時可透過反覆進行隨機試驗作出估計，而相關理論則解釋估計為何會逐漸改善。

大數定律

令 $X_1, X_2, \dots$ 為平均值等於 μ 的獨立同分佈隨機變量。樣本平均值

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

依概率收斂至 μ 。以建模語言來說，反覆模擬所得的平均值會趨近期望值。

中心極限定理

若 $X_1, \dots, X_n$ 獨立同分佈，平均值為 μ 、方差為 σ^2 ，則當 n 足夠大時，

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

因此， μ 的近似 95% 置信區間為

$$\bar{X}_n \pm 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}},$$

其中 s 為樣本標準差。

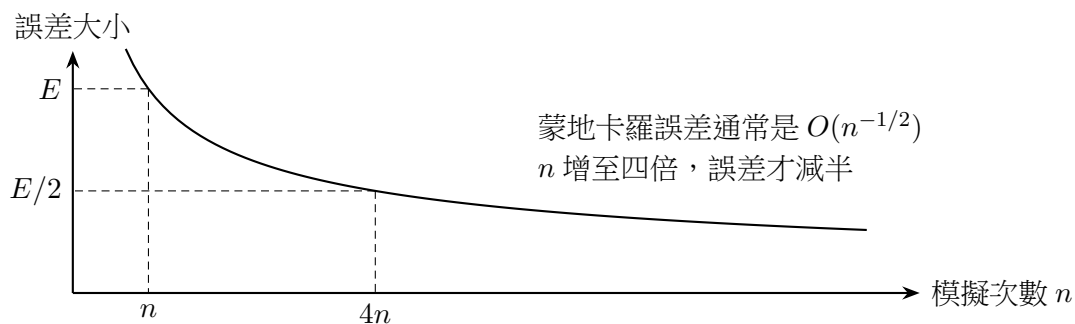


圖 6: $1/\sqrt{n}$ 收斂速率解釋了蒙地卡羅方法為何靈活，卻往往收斂緩慢。

例題 8：蒙地卡羅的樣本數目

假設某個蒙地卡羅估計量是伯努利指標的平均值，所以其標準差最多為 $1/2$ 。要令正態近似的 95% 置信區間半寬最多為 0.005， n 至少應為多少？

$$1.96 \frac{1/2}{\sqrt{n}} \leq 0.005 \implies \sqrt{n} \geq 196 \implies n \geq 38416.$$

因此，在這個最壞情況的方差上界下，正態近似設計至少需要 38416 個樣本。當所估計的概率接近 0 或 1 時，仍須另行核查有限樣本的覆蓋率。

模型檢視：報告模擬不確定性

競賽報告不應只列出模擬估計值，還應交代重複次數、標準誤、置信區間，以及在合理擾動參數後結論會否改變。

7 第一個馬爾可夫鏈模型

離散時間馬爾可夫鏈

若有限狀態空間上的序列 $X_0, X_1, X_2, \dots$ 之下一個狀態只取決於目前狀態，而不取決於完整歷史，便稱為馬爾可夫鏈：

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \dots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}.$$

矩陣 $P = (P_{ij})$ 是轉移矩陣；其每一行的總和均為 1。

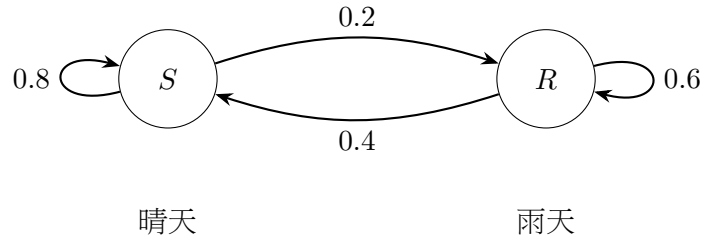


圖 7: 描述天氣的二狀態馬爾可夫鏈。由每個狀態離開的概率總和為 1。

例題 9：兩日後的天氣預測

狀態 S 表示晴天， R 表示雨天。假設

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix},$$

其中各行表示今日天氣，各列表示明日天氣。若今日是晴天，兩日後的分佈為

$$(1, 0)P^2 = (1, 0) \begin{pmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{pmatrix} = (0.72, 0.28).$$

因此，兩日後下雨的概率為 0.28。

例題 10：平穩分佈

平穩分佈 $\pi = (\pi_S, \pi_R)$ 滿足 $\pi P = \pi$ 及 $\pi_S + \pi_R = 1$ 。由天氣轉移矩陣可得

$$\pi_S = 0.8\pi_S + 0.4\pi_R \implies 0.2\pi_S = 0.4\pi_R \implies \pi_S = 2\pi_R.$$

再結合 $\pi_S + \pi_R = 1$ ，得

$$\pi = (2/3, 1/3).$$

長期而言，約三分之二的日子是晴天。

8 分層建模工作坊

工作坊任務：飯堂隊列的不確定性

某飯堂平均每 10 分鐘有 18 名學生到達。繁忙時段的到達過程以泊松模型描述。

1. 計算未來 10 分鐘恰好有 20 人到達的概率。
2. 計算或近似計算多於 24 人到達的概率。
3. 若一名服務人員每 10 分鐘可服務 20 名學生，這會產生甚麼風險？
4. 撰寫一段文字，解釋泊松假設是否合理。

競賽式報告段落

我們把每個 10 分鐘時段的到達人數建模為 $X \sim \text{Pois}(18)$ ，並假設在短暫繁忙時段內，各次到達互相獨立且速率大致固定。由此可得 $\mathbb{E}[X] = 18$ 及 $\text{Var}(X) = 18$ ，所以典型波動約為 $\sqrt{18} \approx 4.24$ 人。由於每名服務人員每 10 分鐘只能服務 20 名學生，系統可能在不可忽略的時段比例中超出負荷。因此，我們建議評估服務容量時，不應只考慮平均到達率，還應考慮上尾概率 $\mathbb{P}(X > 20)$ 及結果對估計速率的敏感度。

模型檢視：模型批判

概率模型是假設而非事實。泊松到達模型假設各次到達互相獨立，而且速率大致固定。若學生在鐘聲響起後成群到達，獨立性假設便很薄弱；若午膳期間的速率急劇改變，固定速率假設亦很薄弱。模型效度驗證應把實際到達人數的平均值與變異程度同模型比較。

9 核心練習與延伸問題

核心練習

1. 擲兩顆公平骰子。求 $\mathbb{P}(\text{點數和} = 8)$ 及 $\mathbb{P}(\text{點數和} \geq 10)$ 。
2. 一個袋內有 5 個紅球及 3 個藍球。不放回地抽取兩球，求兩球均為紅球的概率。
3. 一間工廠有兩部機器。機器 A 生產 70% 的產品，次品率為 1%；機器 B 生產 30% 的產品，次品率為 4%。隨機選出的產品是次品，求它來自 B 的概率。
4. 令 X 為擲公平硬幣 4 次所得的正面次數。寫出其分佈，並計算 $\mathbb{E}[X]$ 。
5. 若 $X \sim \text{Pois}(5)$ ，計算 $\mathbb{P}(X = 3)$ 及 $\mathbb{P}(X = 0)$ 。
6. 若 $T \sim \text{Exp}(6)$ 小時，求 $\mathbb{E}[T]$ 及 $\mathbb{P}(T > 0.5)$ 。

練習核查與提示

1. 兩個概率分別為 $5/36$ 及 $1/6$ 。
2. 概率為 $\binom{5}{2}/\binom{8}{2} = 5/14$ 。
3. 貝葉斯公式給出 $0.30(0.04)/[0.70(0.01) + 0.30(0.04)] = 12/19$ 。
4. $X \sim \text{Bin}(4, 1/2)$ ，所以 $\mathbb{P}(X = k) = \binom{4}{k}/16$ 且 $\mathbb{E}[X] = 2$ 。
5. 兩個概率分別為 $e^{-5}5^3/3! \approx 0.14037$ 及 $e^{-5} \approx 0.006738$ 。

6. $\mathbb{E}[T] = 1/6$ 小時 = 10 分鐘，而 $\mathbb{P}(T > 0.5) = e^{-3} \approx 0.0498$ 。

建模挑戰

一個小型支援中心接收請求的過程為泊松過程，速率是每小時 $\lambda = 10$ 個。服務時間近似服從平均值為 5 分鐘的指數分佈。

1. 把平均服務時間轉換為每小時的服務速率 μ 。
2. 計算使用率 $\rho = \lambda/\mu$ 。
3. 解釋 ρ 接近 1 的含意。
4. 提出一項可用於驗證到達率假設的數據來源，以及一項可用於驗證服務時間假設的數據來源。

建模核查

服務速率為每小時 $\mu = 12$ 個，而 $\rho = 10/12 = 5/6 \approx 0.833$ 。應把它解釋為擬合所得的負荷指標，而非泊松到達或指數服務時間成立的證明。完整的模型效度驗證計劃應指定帶時間戳的到達數據、實際服務時長、時間變化與相依性的診斷，以及留出數據比較。

延伸練習

1. 證明：若 A 與 B 互相獨立，則 A 與 B^c 亦互相獨立。
2. 令 $X \sim U(0, 1)$ 及 $Y = -\ln X$ 。推導 Y 的 CDF，並識別其分佈。
3. 令 $X_1, \dots, X_n$ 為獨立伯努利 (p) 隨機變量。利用期望值的線性性質證明 $\mathbb{E}[\sum X_i] = np$ 。
4. 在天氣馬爾可夫鏈中，若今日是雨天，計算三日後為晴天的概率。
5. 舉出一個 $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ，但 X 與 Y 並不獨立的例子。

延伸提示

第 1 題使用 $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ 。在第 2 題，當 $y \geq 0$ 時， $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ ，故 $Y \sim \text{Exp}(1)$ 。第 3 題可把各期望值相加。第 4 題中，三日後為晴天的概率是 0.624。第 5 題的一個例子是 $X \sim U(-1, 1)$ 、 $Y = X^2$ ：兩者的協方差為 0，但變量並不獨立。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《基礎統計學》第二版（OpenStax）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

補充課 9：建模所需的線性代數基礎

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成這節兩小時的補充課後，學生應能：

- 利用向量表示數據、決策與狀態；
- 計算並解釋內積、範數、線性組合及張成空間；
- 把矩陣理解為表格、線性變換或方程組；
- 運用高斯消元法求解小型方程組；
- 解釋秩、自由變量及齊次方程組的解結構；
- 把線性代數連繫至最小二乘法、馬爾可夫鏈、博弈論及量綱分析；
- 解釋特徵向量與平穩分佈在動態建模中的重要性。

1 線性代數為何屬於建模的一部分

微積分描述一個量如何改變；線性代數則描述多個量如何組合。這在數學建模中無可避免：送貨路線包含多段行車時間，回歸模型包含多個殘差，馬爾可夫鏈包含多個轉移概率，而量綱分析問題亦包含多個物理指數。

引入活動：向量在哪裏？

為下列每個建模情境找出一個自然的向量。

1. 機械人的路線途經五幢建築物，並記錄五段行程時間。
2. 學校飯堂記錄六個十分鐘時段內的到達人數。
3. 一間公司連續多週追蹤三個品牌的市場佔有率。
4. 回歸模型比較十個數據點的預測值與觀察值。

目的並非令符號變得更繁重，而是使多變量資訊易於閱讀與計算。

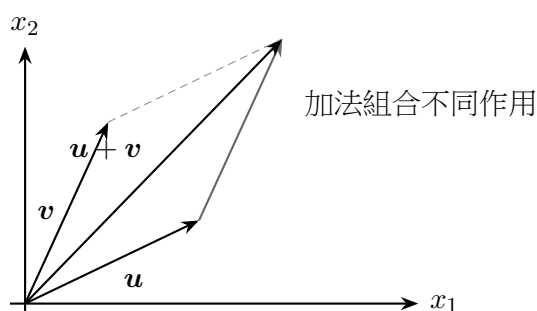


圖 1: 向量加法可為位移、資源使用量，或各組成部分的累積變化等合成作用建模。

2 作為數據組合的向量

向量、內積與範數

$\mathbb{R}^n$ 中的向量是一列有序數值：

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

對 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

內積衡量方向的一致程度。若 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ，兩個向量便互相正交。

例題 1：資源使用向量

一部送貨機械人會使用電量、時間及職員注意力。假設某條路線的

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 42 \\ 3 \end{pmatrix}$$

表示 18 個電量單位、42 分鐘及 3 次職員介入。成本向量

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

為各個分量賦予權重。總加權成本為

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = 0.4(18) + 1.2(42) + 8(3) = 81.6.$$

這與第 6 講線性規劃目標 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ 的概念相同。

線性組合與張成空間

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 的線性組合為

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k.$$

所有這類組合所成的集合稱為張成空間，記作

$$\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k).$$

若只有把所有係數設為零才能得到 $\mathbf{0}$ ，這些向量便線性獨立。

例題 2：偵測線性相依

令

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

由於

$$\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_3,$$

三個向量線性相依。以建模語言來說，第三項特徵沒有帶來新方向；它已由首兩項特徵解釋。

檢查點：檢查點

在 $\mathbb{R}^3$ 中，四個向量能否線性獨立？不作計算而加以解釋。

3 作為結構模型的矩陣

矩陣乘法

一個 $m \times n$ 矩陣 $\mathbf{A}$ 透過

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

把 $\mathbb{R}^n$ 中的向量映射到 $\mathbb{R}^m$ 中。若 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 且 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ，則

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

乘積 $\mathbf{AB}$ 表示變換的合成：先進行 $\mathbf{B}$ ，再進行 $\mathbf{A}$ 。

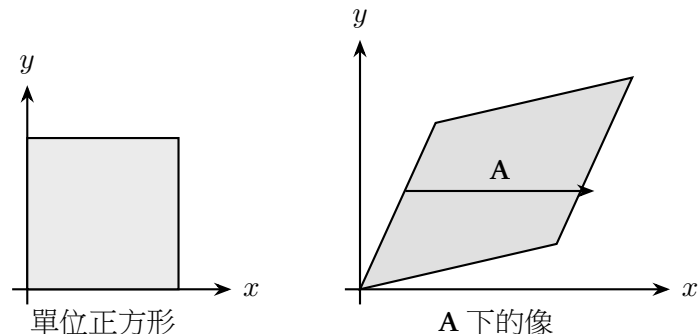


圖 2: 矩陣可以視為變換。 $\mathbf{A}$ 的各列向量顯示單位基向量會被移到何處。

例題 3：以矩陣乘積表示轉移

假設一個二狀態天氣模型使用轉移矩陣

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix},$$

其中各行表示今日狀態，各列表示明日狀態：晴天 S 或雨天 R 。若今日肯定是晴天，行向量為

$$\mathbf{x}_0^\top = (1, 0).$$

一日後，

$$\mathbf{x}_1^\top = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{P} = (0.8, 0.2).$$

兩日後，

$$\mathbf{x}_2^\top = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{P}^2 = (0.72, 0.28).$$

矩陣的冪描述反覆轉移，是馬爾可夫鏈建模的核心。

模型檢視：模型批判：矩陣假設了甚麼？

轉移矩陣假設下一個狀態以固定方式取決於目前狀態。對天氣、顧客移動或疾病進程，應考慮：

- 轉移概率會否隨時間保持穩定？
- 明日狀態只取決於今日，還是亦取決於上一週？
- 所有相關狀態是否均已納入？

矩陣雖然精簡，但精簡的符號亦可能隱藏很強的假設。

4 利用高斯消元法求解方程組

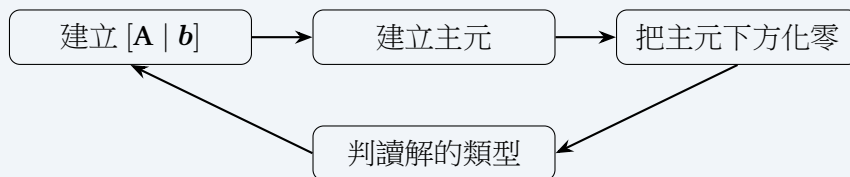
線性方程組

n 個未知數的 m 條線性方程可寫成

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

高斯消元法對增廣矩陣 $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ 進行行運算，從而顯示主元、自由變量及方程組是否相容。

高斯消元流程



例題 4：一個 3×3 方程組

求解

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6, \\ 2x + 3y - z = 4, \\ -x + y + 4z = 9. \end{cases}$$

增廣矩陣可作如下化簡：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & 5 & 15 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \end{array} \right].$$

回代得 $z = 9/4$ 、 $y = 5/4$ 及 $x = 5/4$ 。因此

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right).$$

秩與解的類型

矩陣的秩是行階梯形中主元的數目。方程組有：

- 無解，若行化簡得到 $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \mid c]$ 且 $c \neq 0$ ；
- 唯一解，若每一個變量列均有主元；
- 無限多個解，若方程組相容但具有自由變量。

對 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，

$$\dim(\text{零空間}) = n - \text{rank}(\mathbf{A}).$$

例題 5：零空間與無量綱乘積

對單擺模型，假設週期 T 可能取決於長度 L 、質量 m 及重力加速度 g 。無量綱乘積具有下列形式：

$$T^a L^b m^c g^d.$$

在 M, L, T 各行中使用量綱 $[T] = (0, 0, 1)$ 、 $[L] = (0, 1, 0)$ 、 $[m] = (1, 0, 0)$ 及 $[g] = (0, 1, -2)$ ，所得量綱方程為

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

方程為 $c = 0$ 、 $b + d = 0$ 及 $a - 2d = 0$ 。取 $d = 1$ ，得

$$(a, b, c, d) = (2, -1, 0, 1),$$

所以其中一個無量綱乘積是

$$\Pi = \frac{T^2 g}{L}.$$

這正是白金漢 Π 定理背後的零空間計算。

5 以線性代數表達最小二乘法

殘差向量與正規方程

對數據 (x_i, y_i) 及直線 $y = a + bx$ ，定義

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

預測值為 $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ ，殘差則為

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}.$$

最小二乘法選取 $\boldsymbol{\beta}$ ，使 $\|\mathbf{r}\|^2$ 最小。正規方程為

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}.$$

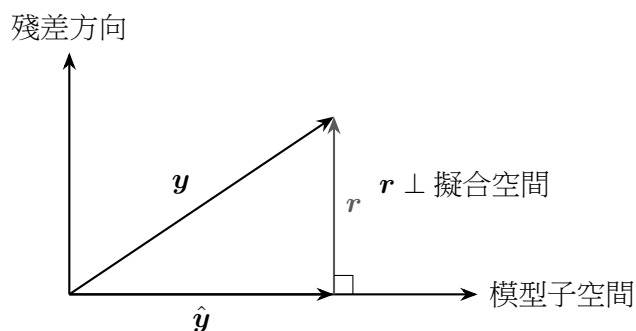


圖 3: 最小二乘法選取擬合向量 $\hat{y}$ ，使殘差向量與模型子空間正交，從而得到 $\mathbf{X}^\top \mathbf{r} = \mathbf{0}$ 。

例題 6：擬合直線

對以下數據擬合 $y = a + bx$ ：

$$(0, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 4).$$

則

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

計算

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

求解

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

解為 $a = 0.9$ 、 $b = 0.9$ 。擬合模型為

$$\hat{y} = 0.9 + 0.9x.$$

模型檢視：模型批判：矩陣計算並非完整模型

正規方程在平方誤差準則下計算最佳直線。建模報告仍須討論殘差形態、單位、離群值、關係是否應為線性，以及預測範圍是否適當。

6 特徵值、平穩狀態與長期行為

特徵值與特徵向量

對方陣 $\mathbf{A}$ ，若非零向量 $\mathbf{v}$ 滿足

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

則 $\mathbf{v}$ 是對應特徵值 λ 的特徵向量。在變換下， $\mathbf{v}$ 的方向保持不變，只有大小改變。

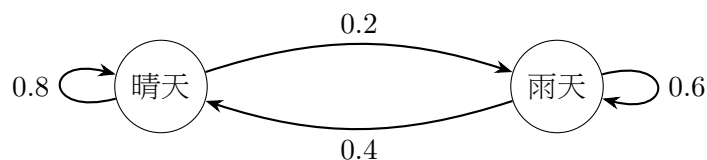


圖 4: 一個二狀態馬爾可夫鏈。平穩分佈是轉移矩陣對應特徵值 1 的左特徵向量。

例題 7：平穩分佈

對

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix},$$

平穩分佈 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$ 滿足

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}, \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

第一條方程給出

$$0.8\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1 \quad \Rightarrow \quad 0.4\pi_2 = 0.2\pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = 2\pi_2.$$

結合 $\pi_1 + \pi_2 = 1$ ，可得

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

在此模型中，長期而言約三分之二的日子是晴天。

例題 8：種群矩陣

令 J_n 與 A_n 分別表示第 n 年的幼年及成年種群數量。假設每個成年個體產生 0.6 個幼年個體，30% 的幼年個體成熟，而 80% 的成年個體存活。則

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{M}$ 的主導特徵值描述長期增長因子。求解

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0.6 \\ 0.3 & 0.8 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 0.8\lambda - 0.18 = 0$$

得 $\lambda \approx 0.983$ 。由於主導增長因子略低於 1，模型預測種群長期緩慢下降。

7 分層建模工作坊

建模工作坊

按準備程度選擇一條路線。

核心路線。利用消元法求解一個 3×3 線性方程組，並解釋解的類型。

挑戰路線。利用正規方程對五個數據點擬合直線，並計算殘差向量。

延伸路線。求一個三狀態轉移矩陣的平穩分佈，並解釋長期狀態比例。

每組應在計算前，以一小段文字解釋矩陣所代表的事物。

競賽式表達

建模報告可以簡潔地寫成：

我們以向量表示系統狀態，並利用矩陣編碼轉移。反覆行為透過矩陣乘法計算；長期分佈則連同 $\sum_i \pi_i = 1$ ，求解平穩方程 $\pi P = \pi$ 而得。此解釋假設轉移概率保持穩定，而且目前狀態已包含足夠資訊以預測下一步。

檢查點：離堂短答

以三句話回答：

1. 高斯消元法中的主元告訴你甚麼？
2. 殘差向量為何對最小二乘法有用？
3. 平穩分佈在馬爾可夫鏈模型中有甚麼意義？

8 練習

練習 1：向量

1. 求 $(3, 4, 0)$ 方向上的一個單位向量。
2. 計算 $(1, 2, 3)$ 與 $(4, -1, 2)$ 的內積，再求兩者的夾角。
3. 判斷 $(1, 0, 2)$ 、 $(3, 1, 4)$ 與 $(2, 1, 0)$ 是否線性獨立。
4. 在送貨模型中， $\mathbf{x} = (8, 20, 2)$ 記錄距離、時間及延誤次數。若 $\mathbf{c} = (1.5, 0.8, 10)$ ，解釋 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ 。

向量核查

單位向量為 $(3/5, 4/5, 0)$ 。第 2 題的內積為 8，故 $\cos \theta = 8/\sqrt{294}$ 且 $\theta \approx 62.19^\circ$ 。第 3 題中，以三個向量構成的行列式為 -2 ，故它們線性獨立。加權送貨成本在 $\mathbf{c}$ 所定義的成本尺度下為 48。

練習 2：矩陣與方程組

1. 對

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

計算 $\mathbf{AB}$ 與 $\mathbf{BA}$ 。

2. 利用高斯消元法求解：

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y + z = 10. \end{cases}$$

3. 解釋方程組

$$x + 2y + 3z = 1, \quad 2x + 4y + 6z = 3$$

為何無解。

4. 求以下方程組的所有解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

矩陣與方程組核查

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 19 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

第 2 題的解為 $(x, y, z) = (4/5, 3, 8/5)$ 。第 3 題中，第二條方程的左方是第一條的兩倍，但 $3 \neq 2(1)$ ，故方程組不相容。對第 4 題，令自由參數 $s, t \in \mathbb{R}$ ，則

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(0, 1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1).$$

練習 3：建模連繫

1. 利用 $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ ，對 $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 6)$ 擬合 $y = a + bx$ 。

2. 對

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix},$$

求平穩分佈。

3. 一個零和博弈的收益矩陣為

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

令列玩家無差異，求行玩家的混合策略。

4. 在量綱分析中，解釋無量綱獨立群的數目為何等於「變量數目減去量綱矩陣的秩」。

建模核查

擬合直線為 $\hat{y} = 1.3 + 0.9x$ 。平穩分佈為 $(19/41, 13/41, 9/41)$ 。行玩家的混合策略為 $(1/3, 2/3)$ ，它由令兩個列收益相等而得。對量綱分析，利用秩一零化度定理，把自由指數方向的數目連繫至量綱矩陣的零化度。

練習 4：延伸

1. 求 $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特徵值與特徵向量。

2. 令 $\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 。從幾何角度解釋為何 $\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(\beta) = \mathbf{R}(\alpha + \beta)$ 。

3. 證明：若 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{A}$ 對應特徵值 λ 的特徵向量，則 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{A}^k$ 對應特徵值 λ^k 的特徵向量。

4. 對方陣，列出三種與其可逆等價的說法。

延伸提示

特徵值—特徵向量配對為： $\lambda = 5$ 對應方向 $(1, 1)$ ， $\lambda = 2$ 對應方向 $(1, -2)$ 。對旋轉，可合成幾何作用，或使用角度和公式。第 3 題可對 k 使用數學歸納法。三項有效的可逆等價條件為：行列式非零、滿秩及零空間只含零向量。

附錄 A：算法總結

任務	實用方法
求解 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	對 $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ 作行化簡，再進行回代。
求零空間	對 $\mathbf{A}$ 作行化簡，為自由變量設定參數，並寫出基向量。
檢驗獨立性	把向量置於各列，核查每一列是否均有主元。
求最小二乘直線	建立 $\mathbf{X}$ ，計算 $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ 與 $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$ ，並求解正規方程。
求平穩分佈	求解 $\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$ 及 $\sum_i \pi_i = 1$ 。
求特徵值	求解 $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ 。
求特徵向量	對每個特徵值，求解 $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 。

附錄 B：與主課的連繫圖

工具	出現位置
內積與範數	第 3 講的殘差向量；第 6 講的線性目標 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ 。
矩陣乘法	第 5 講的轉移矩陣；第 8 講的混合策略。
高斯消元法	第 6 講的單純形思想；第 11 講的無量綱乘積。
秩與零空間	第 11 講的白金漢 Π 定理；第 3 講的設計矩陣。
最小二乘法	第 3 講的模型擬合與殘差分析。
特徵值	第 5 講的馬爾可夫鏈；第 9 講的線性動力系統；第 12 講的離散系統。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 18.06SC 線性代數（MIT OpenCourseWare）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模講義

補充課 10：多變量微積分與拉格朗日乘數

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成這節兩小時的補充課後，學生應能：

- 透過公式、等值曲線及建模情境詮釋多變量函數；
- 計算並詮釋偏導數，理解其為每次只改變一個變量時的敏感度；
- 運用梯度找出最陡變化方向及各方向的變化率；
- 建立局部線性近似，並說明每個敏感度係數的單位；
- 找出臨界點，並以海森矩陣分類；
- 運用拉格朗日乘數求解單一約束的最優化問題；
- 將乘數詮釋為局部影子價格；
- 交代假設、運算／程式核證及限制，清楚傳達最優化結果。

1 多個變量如何改變建模問題

單變量模型探討一個輸入改變時，輸出如何隨之變化。多變量模型則要問：是哪一個輸入改變、沿哪個方向改變，以及改變受到哪些約束。例如，飯堂管理人員可選擇員工配置 x 、服務櫃檯數目 y 及備餐水平 z 。等候時間、成本與服務質素都取決於向量 (x, y, z) ，而非單一數值。

引入活動：哪些量可受控制？

某學校活動的預期淨效益為

$$B(x, y) = 80x + 60y - 2x^2 - y^2,$$

其中 x 和 y 是活動水平。總員工工時約束為 $x + y = 20$ 。

1. 哪個表達式是目標？哪個表達式是約束？
2. 為甚麼不能只考察 x 來最大化 B ？
3. 增加 x 而「保持 y 不變」是甚麼意思？

本課將建立有系統地回答這些問題所需的工具。

函數與等值曲線

二變量函數是一條規則

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

等值曲線是集合 $f(x, y) = c$ 。同一條等值曲線上的點給出相同輸出。等高線圖運用多條等值曲線描述曲面，毋須繪製容易失真的三維圖像。

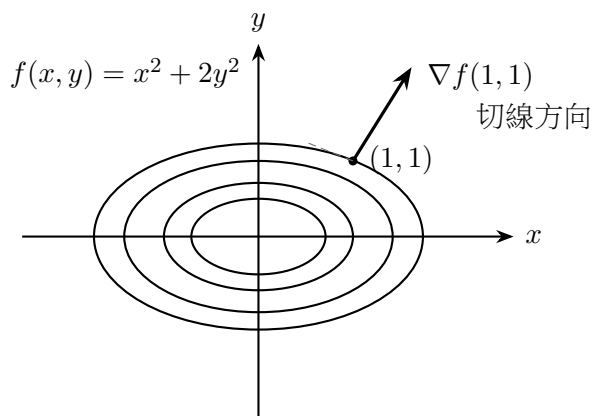


圖 1: 梯度與等值曲線正交。沿曲線移動會改變方向，卻不會改變函數值。

2 偏導數與局部敏感度

偏導數

對函數 $f(x, y)$ ，

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

計算 f_x 時，保持 y 不變並對 x 微分；計算 f_y 時，則保持 x 不變。在建模語言中，這些量稱為邊際效應。

示例 1：詮釋單位

假設飯堂的每日營運成本為

$$C(x, y) = 400 + 30x + 45y + 0.8x^2 + 0.5xy,$$

其中 x 是員工工時， y 是已準備的餐膳批次數目。那麼

$$C_x = 30 + 1.6x + 0.5y, \quad C_y = 45 + 0.5x.$$

在 $(x, y) = (10, 8)$ ，

$$C_x(10, 8) = 50, \quad C_y(10, 8) = 50.$$

詮釋：在這個營運點附近，增加一個員工工時會令每日成本增加約 50 個貨幣單位；多準備一批餐膳亦會增加約 50。兩個數值在此相等，但單位不同：前者是每員工工時的成本，後者是每批次的成本。

局部線性近似

對小變化 Δx 和 Δy ，

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y.$$

因此變化可近似為

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

這是切線近似的多變量版本，亦常是建模報告中的第一項敏感度計算。

示例 2：敏感度估算

運用飯堂成本模型在 $(10, 8)$ 的結果，估算員工工時增加 0.5 小時、餐膳批次減少 1 時的成本變化：

$$\Delta C \approx C_x(0.5) + C_y(-1) = 50(0.5) - 50 = -25.$$

模型預測成本減少約 25 個貨幣單位。這是局部估算；除非先檢查曲率，否則不應把結果外推至大幅變化。

檢查點：檢查點

若 $f_x(a, b) = 0$ ，但 $f_y(a, b) > 0$ ， (a, b) 是否必然為局部最小值？請從幾何角度解釋。

3 梯度與方向變化**梯度與方向導數**

梯度把所有一階偏導數集合起來：

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

對單位向量 $\mathbf{u}$ ，方向導數為

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

梯度指向函數增加得最快的方向， $-\nabla f$ 指向減少得最快的方向，而 $\|\nabla f\|$ 是最大瞬時增加率。

示例 3：在溫度場中移動

設

$$T(x, y) = 30 - 0.5x^2 - y^2 + 2x$$

表示溫度（單位為 $^{\circ}\text{C}$ ），而 x, y 以公里為單位。在 $(1, 1)$ ，

$$\nabla T = (-x + 2, -2y) = (1, -2).$$

升溫最快的方向是

$$\frac{(1, -2)}{\sqrt{5}},$$

最大升溫率為每公里 $\sqrt{5}^{\circ}\text{C}$ 。若學生向東步行， $\mathbf{u} = (1, 0)$ ，則 $D_{\mathbf{u}}T = 1^{\circ}\text{C}/\text{km}$ 。

模型檢視：模型批判：梯度是局部量

梯度由模型在某一點計算而得，並不保證遠離該點後同一方向仍然最佳。若路線較長，應沿途更新梯度，或求解路徑規劃問題，而非一直沿著一支固定箭頭前進。

沿路徑的鏈式法則

若移動點沿 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ 行進，則

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{r}'(t).$$

這條公式把場的敏感度 ∇f 與移動 $\mathbf{r}'(t)$ 分開。

4 無約束最優化與海森矩陣

臨界點

在可微函數的內部局部最大值或最小值處，

$$\nabla f = \mathbf{0}.$$

這些點稱為臨界點。與單變量情況一樣，方程是必要條件，但並非充分條件：臨界點可能是最小值、最大值或鞍點。

二變量的海森判別法

海森矩陣為

$$\mathbf{H}f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

在臨界點令 $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ 。

條件	分類
$D > 0$ and $f_{xx} > 0$	局部最小值
$D > 0$ and $f_{xx} < 0$	局部最大值
$D < 0$	鞍點
$D = 0$	無法判定

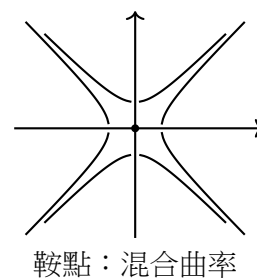
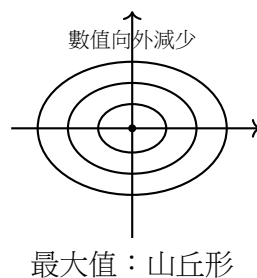
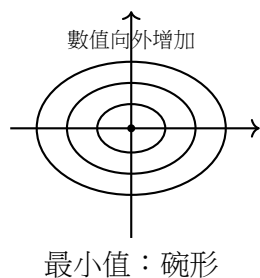


圖 2: 等值線的形態可區分局部最小值、局部最大值與鞍點；海森矩陣以代數方式記錄這種局部曲率。

示例 4：分類臨界點

對

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5,$$

$$\nabla f = (2x - 2, 4y - 8) = \mathbf{0} \Rightarrow (x, y) = (1, 2).$$

海森矩陣為

$$\mathbf{H}f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

故 $D = 8 > 0$ 且 $f_{xx} = 2 > 0$ 。因此 $(1, 2)$ 是局部最小值。配方可進一步顯示它也是全域最小值：

$$f = (x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 - 4.$$

示例 5：鞍點

對 $g(x, y) = x^2 - y^2$ ， $\nabla g = (2x, -2y)$ ，因此唯一的臨界點是 $(0, 0)$ 。海森矩陣為 $\text{diag}(2, -2)$ ，且 $D = -4 < 0$ ，所以原點是鞍點：沿 x 軸移動會令 g 增加，沿 y 軸移動則令它減少。

5 拉格朗日乘數：在約束上最優化

幾何原理

假設要在約束 $g(x, y) = c$ 下最優化 $f(x, y)$ 。在正則的受約束極值處， f 的等值曲線與約束相切，兩者的法向量互相平行：

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y) = c.$$

純量 λ 稱為拉格朗日乘數。

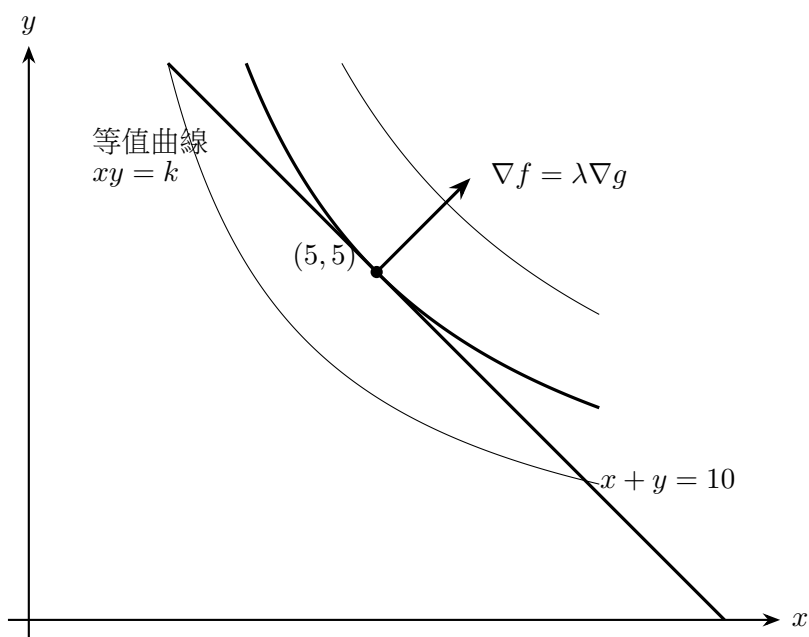


圖 3: 在 $x + y = 10$ 的約束下， $f(x, y) = xy$ 的最大值出現在可達的最高等值曲線與約束相切之處，即 $(5, 5)$ 。

拉格朗日方法

在約束 $g(x, y) = c$ 下最優化 $f(x, y)$ ：

1. 計算 ∇f 與 ∇g ；
2. 聯立求解 $\nabla f = \lambda \nabla g$ 與 $g = c$ ；
3. 在所有候選點計算 f ；
4. 檢查定義域邊界、正值限制，以及約束是否正則；

5. 結合情境詮釋結果，包括單位與敏感度。

示例 6：固定周界下的最大面積

設矩形邊長為 $x, y > 0$ ，周界為 20。最大化

$$f(x, y) = xy \quad \text{並受約束} \quad g(x, y) = x + y = 10.$$

由於

$$\nabla f = (y, x), \quad \nabla g = (1, 1),$$

拉格朗日方程為

$$y = \lambda, \quad x = \lambda, \quad x + y = 10.$$

故 $x = y = 5$ ，最大面積為 25。當趨近正值範圍的邊界時，面積趨近 0，證實內部候選點是受約束最大值。

檢查點：檢查點

為甚麼對矩形問題求解 $\nabla f = 0$ 並不恰當？這樣做會忽略可行集的甚麼特徵？

6 影子價格與生產配置模型

示例 7：配置有限資源

某工場選擇生產水平 x 和 y 。每週效益為

$$P(x, y) = 60x + 40y - 2x^2 - y^2,$$

並受資源限制

$$x + y = 20, \quad x, y \geq 0.$$

令 $g(x, y) = x + y$ 。則

$$\nabla P = (60 - 4x, 40 - 2y), \quad \nabla g = (1, 1).$$

方程

$$60 - 4x = \lambda, \quad 40 - 2y = \lambda, \quad x + y = 20$$

給出 $x = 10$ 、 $y = 10$ 及 $\lambda = 20$ 。最優效益為

$$P(10, 10) = 700.$$

由於目標函數是凹函數（海森矩陣為 $\text{diag}(-4, -2)$ ），這是全域受約束最大值。

乘數作為影子價格

把資源約束寫成 $x + y = c$ ，並以 $P^*(c)$ 表示最優值。在 $c = 20$ 附近，

$$\frac{dP^*}{dc} = \lambda \approx 20.$$

因此，局部而言，每增加一個資源單位約值 20 個效益單位。這不代表每個額外單位永遠都值 20；隨著營運點改變，乘數也會改變。

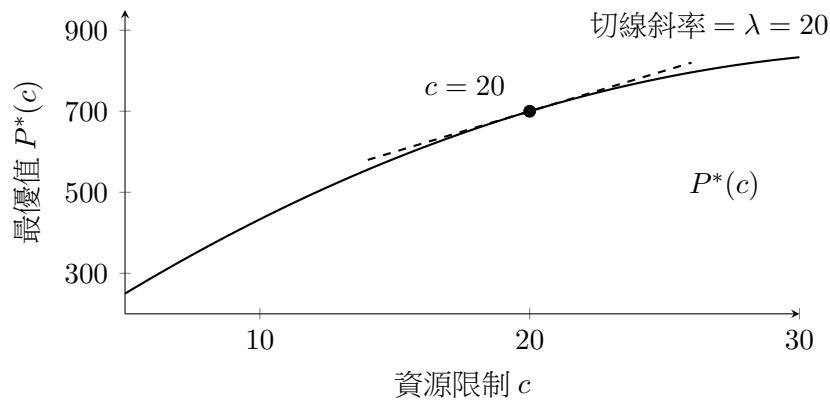


圖 4: 影子價格是最優值曲線相對於資源限制的斜率。它是局部敏感度，而非固定不變的價格。

模型檢視：最優化尚未證明的事情

在建議 $(x, y) = (10, 10)$ 前，應檢查：

- x 和 y 是否可以分割，還是必須為整數？
- 資源關係是否恰好為 $x + y = 20$ ，還是只有 $x + y \leq 20$ ？
- 效益係數是否由數據估計？其不確定性有多大？
- 二次模型在建議解附近是否仍然合理？
- 是否遺漏最低服務水平或員工容量等約束？

若模型不完整，數學上的最優點仍可能是欠佳的現實建議。

7 分層最優化工作坊

核心路線：梯度與海森矩陣

對

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 10,$$

找出臨界點，以海森矩陣分類，再把 f 寫成配方形式，核證該分類。

挑戰路線：受約束幾何

求

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

在圓 $x^2 + y^2 = 25$ 上的最大值與最小值。分別以拉格朗日乘數及點積幾何解釋答案。

延伸路線：建模與敏感度

某農場把土地 x 分配予作物 A，把土地 y 分配予作物 B。利潤為

$$\Pi(x, y) = 100x + 80y - x^2 - 2y^2,$$

其中 $x + y = 50$ 且 $x, y \geq 0$ 。

1. 求連續最優解及乘數。
2. 連同單位詮釋乘數。
3. 檢驗土地限制由 50 改為 51 時會發生甚麼變化。

4. 指出一項可能令數學最優解難以實行的假設。

8 傳達結果

競賽式結論範本

有力的結論應說明：

1. 決策：建議的變量值及目標值；
2. 可行性：建議所滿足的約束；
3. 運算 / 程式核證：海森矩陣、凹性、邊界比較或數值確認；
4. 敏感度：乘數的意義或小幅擾動測試；
5. 限制：至少一項可能影響實施的假設。

例：「在連續二次模型及具約束力的 20 單位資源限制下，建議配置為 (10, 10)，效益為 700。負定海森矩陣證實目標函數全域凹。乘數 20 表示局部而言，每增加一個資源單位約值 20 個效益單位。實施前仍須檢查整數限制與參數不確定性。」

檢查點：離堂短問

以兩句話解釋 $\nabla f = \mathbf{0}$ 與 $\nabla f = \lambda \nabla g$ 的分別，再指出一個拉格朗日候選點未必能成為有效最終建議的原因。

9 練習題

練習 1：偏導數與局部變化

1. 對 $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$ ，計算 f_x 與 f_y 。
2. 對 $T(x, y) = 25 - 0.2x^2 - 0.5y^2$ ，求在 (2, 1) 的梯度，以及朝向 (5, 5) 的方向導數。
3. 當 (x, y) 由 (3, 4) 變為 (3.03, 3.98) 時，運用局部線性化估算 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 。
4. 對以工時及材料公斤數為輸入的成本函數，解釋 f_x 與 f_y 的單位。

偏導數檢查

第 1 題有

$$f_x = 2xy + ye^{xy}, \quad f_y = x^2 + xe^{xy}.$$

在 (2, 1)， $\nabla T = (-0.8, -1)$ ；朝向 (5, 5) 的單位方向為 (3/5, 4/5)，所得方向導數為 -1.28。在 (3, 4) 附近線性化 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 得 5.002。最後一題應分別為兩個偏導數附上每工時的成本及每公斤的成本單位。

練習 2：無約束最優化

找出並分類所有臨界點：

1. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4x + 6y$ ；
2. $g(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ ；

3. $h(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

4. $q(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ 。

對每一題，解釋海森判別法能否得出確定結論。

臨界點檢查

臨界點及分類依次為： $(2, -1)$ ，最小值； $(-1, 0)$ ，鞍點；對 h ， $(0, 0)$ 是鞍點， $(1, 1)$ 是局部最小值；對 q ， $(0, 0)$ 是鞍點，而 $(1, 1)$ 及 $(-1, -1)$ 是局部最小值。在列出的每個臨界點，海森行列式均不為零，因此判別法皆能得出確定結論。

練習 3：拉格朗日乘數

運用拉格朗日乘數並核證結果：

1. 在約束 $x^2 + 4y^2 = 8$ 下最大化 xy ；
2. 求平面 $x + 2y + 3z = 6$ 上最接近原點的點；
3. 在 $x + y + z = 12$ 且 $x, y, z > 0$ 下最大化 xyz ；
4. 在 $2x + y = 12$ 且 $x, y \geq 0$ 下最大化 $5x + 8y - x^2 - y^2$ 。

拉格朗日乘數檢查

第 1 題的最大值點為 $(2, 1)$ 及 $(-2, -1)$ ，函數值為 2。第 2 題最近的點為 $(3/7, 6/7, 9/7)$ 。第 3 題有 $(x, y, z) = (4, 4, 4)$ ，最大值為 64。第 4 題有 $(x, y) = (37/10, 23/5)$ ，最大值為 $409/20$ ；核證時應與可行端點比較。

練習 4：建模挑戰

某製造商選擇兩個連續生產水平。利潤為

$$\Pi(x, y) = 90x + 70y - 1.5x^2 - y^2 - 0.5xy,$$

並受約束 $2x + y \leq 60$ 及 $x, y \geq 0$ 。

1. 求無約束最優點，並檢驗它是否可行。
2. 若資源約束具約束力，求解等式約束問題。
3. 比較所有相關候選點及邊界的目標值。
4. 詮釋乘數，並討論整數生產要求會否改變建議。
5. 運用上面的範本，撰寫五句建模結論。

建模檢查

無約束點 $(580/23, 660/23)$ 違反 $2x + y \leq 60$ 。在具約束力的直線上，連續最優解為

$$(x, y) = \left(\frac{160}{9}, \frac{220}{9} \right), \quad \Pi = \frac{18200}{9} \approx 2022.22.$$

此值高於兩條坐標軸上的最佳候選點： $(0, 35)$ 的函數值為 1225， $(30, 0)$ 的函數值為 1350。採用 $\nabla \Pi = \lambda \nabla(2x + y)$ 的約定時， $\lambda = 110/9$ 是多一個資源單位的局部價值。若生產量必須為整數，檢查附近可行點後會選出 $(18, 24)$ ，利潤為 2022。完整結論須交代連續變量假設、邊界比較、乘數的局部性、整數檢查，以及一項模型效度驗證或不確定性限制。

選修延伸 A：多個約束

對約束 $g_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, g_k(\mathbf{x}) = c_k$ ，必要條件變為

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \dots + \lambda_k \nabla g_k.$$

在候選點，各約束的梯度必須線性獨立。在正則性條件成立時，每個乘數量度目標對相應約束水平的局部敏感度。

選修延伸 B：不等式約束

若可行集包含 $g(\mathbf{x}) \leq c$ 等不等式，約束可能是活躍或非活躍的。約束活躍時，通常可令 $g = c$ ，再以拉格朗日乘數研究解。更有系統的方法採用卡魯什-庫恩-塔克條件，已超出本補充課的範圍。在報告中，應明確檢查不等式是否具約束力，而非一開始便假定等式成立。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 《微積分》第三冊（OpenStax）
- 非線性限制最佳化指南（NEOS Guide）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模競賽的寫作課程

W1: 論文架構與評審導航

Kenneth Sok Kin Cheng

2026 年 8 月 20 日修訂

學習目標

在這節兩小時寫作課結束時，學生應能：

- 區分競賽規則與流傳但未經核證的寫作慣例，並在提交前驗證正確的規則集；
- 解釋建模報告中每個主要部分的職責；
- 組織報告，以便評審能快速定位答案、假設、證據和限制；
- 利用可追溯性地圖連結問題要求、模型、結果、模型效度驗證與結論；
- 運用基於證據的問題來評估論文，而非憑藉虛構的評分百分比；
- 使用什麼-為什麼-影響-測試的模式重寫欠充分的假設；
- 在撰寫正文之前，為競賽問題建立一個完整的各部分藍圖；
- 對草稿進行一次簡短的評審導航檢查。

1 論文是模型的介面

一個團隊可能擁有正確的數學推導、有用的程式碼和合理的建議。除非報告允許讀者重構推理過程，否則這些成果仍不能發揮應有作用。因此，競賽論文不是團隊工作歷程的流水帳。它是由問題通往可辯護決策的精心設計路徑。

啟動活動：60 秒搜尋測試

假設你正在評估一份不熟悉的 20 頁報告。您有六十秒時間來定位：

1. 主要建議；
2. 核心模型方程式或演算法；
3. 最重要的假設；
4. 一個效度驗證結果；
5. 一個限制。

哪些視覺或結構特徵能幫助您找到每一項？列出至少四項：章節標題、結果表格、方程式引用、圖表說明、粗體結論，或任務到章節的對應圖。

證據鏈

一份強有力的報告使以下鏈條清楚呈現：

問題 → 假設與數據 → 模型 → 結果 → 檢查 → 決策。

每個箭頭都是一個必須解釋的陳述。例如，一個假設應影響模型；一個數值結果應回答一個任務；一項效度驗證應影響建議中應表達的信心水平。

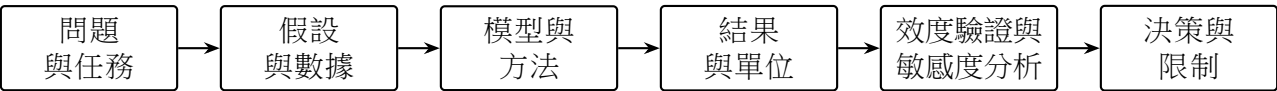


圖 1: 建模報告是一條證據鏈。缺失的環節比缺失的裝飾性章節更具損害性。

模型檢視：論文不是時間順序的故事

團隊通常按照他們的工作順序撰寫：失敗的嘗試、程式碼除錯、新想法、另一次失敗的嘗試、最終模型。評審需要的是邏輯順序。失敗的方法可以簡要提及以證明設計選擇，但主要敘事應呈現最清晰、最清楚、最可辯護的論證路徑。

2 規則摘要：寫作前先核證

格式規則是問題的一部分。它們會因競賽和年份而改變，因此團隊在寫作前應創建一份單頁合規表。下表記錄了與報告設計相關的 2026 年官方規則；在未來競賽前務必重新檢查當前的官方指示。

2026 報告格式比較

	HiMCM 2026	IM ² C International 2026
團隊與工作窗口	最多四名學生；團隊可以在公佈的 14 天競賽窗口期間工作。	同一學校最多四名學生；連續五天的期間。
首頁	第 1 頁是摘要表。鼓勵提供目錄。	單頁摘要表，單頁目錄，然後是解決方案。
頁數計算	摘要加上最多 24 頁：總共 25 頁。包含目錄、參考文獻、註釋和附錄。	解決方案最多 24 頁；單頁摘要表和單頁目錄是分開的。結尾的參考文獻和附錄不計入 24 頁的解決方案限制。
字體格式	英文 PDF；可讀字體至少為 12 點。	英文；A4 紙，邊距至少 1.5 公分或 Letter 等效；至少 12 點。
識別資訊	頁首中包含控制號和頁碼；不包含學生、顧問或學校名稱。	頁首中包含控制號和頁碼；不包含學生、顧問或學校名稱。
人工智慧文件記錄	必須識別和引用使用 LLM 或其他人工智慧工具；在 25 頁解決方案之後附加一份單獨的人工智慧使用報告，不計入該限制範圍內。	遵循當前的 IM ² C 和區域指示；不要假設 HiMCM 的人工智慧報告格式會自動轉移。

檢查點：檢查點：哪些陳述是不安全的？

將每項陳述標記為安全或不安全，然後修復不安全的部分。

- “所有建模競賽都允許 25 頁。”
- “摘要應是第一頁。”
- “附錄從不計入頁數限制。”

4. “如果論文很長，使用 10 點字體是可以接受的。”
5. “團隊應在建立範本前核證當前的規則。”

模型檢視：合規層與寫作層

競賽規則告訴你必須提交什麼。寫作原則告訴你如何使推理易於跟隨。例如，HiMCM 要求提供摘要表，但規則並不保證摘要是具資訊性的。合規性是必要的；溝通品質仍然需要設計。

3 讀者優先的論文架構

原始草稿將某一種章節順序視為強制格式，這過於僵化。好的論文具有可辨識的共同功能，但當論證會因此更清晰時，相鄰功能可以合併。考驗不在於「我們是否完全使用這些標題？」，而在於「讀者能否找到每一項必要證據？」

建議的架構

層級	典型章節	讀者的問題
前言資料	摘要；目錄	團隊做了什麼並發現了什麼？各項內容位於何處？
定位	問題重述；目標；假設；符號；資料	具體回答了什麼，在什麼解釋下？
模型核心	基線模型；精煉模型；演算法；推導過程	為什麼選擇這個模型，以及它是如何運作的？
結果	數值或分析結果；圖形；決策表	答案是什麼，附帶單位和背景資訊？
證據	運算／程式核證；模型效度驗證；不確定性；敏感度分析	讀者應相信結果的原因，以及它在何時會改變？
決策	建議；優勢；限制；結論	接下來的行動是什麼，我們應該多謹慎些什麼？
後記資料	參考文獻；附錄；所需揭露資訊	資訊來自何處，支持細節在哪裡？

模型檢視：有用的靈活性

- 結果可以緊接在每個模型之後呈現，而不是出現在一個遙遠的「結果」章節中。
 - 當檢查對於理解該模型至關時，驗證可以與模型並列整合。
 - 如果優勢和限制是具體且可見的，則可以放在結論中。
 - 通常不需要單獨的文獻回顧章節；在介紹建模選擇的地方引用相關來源。
- 不應消失的是功能：假設、結果、檢查、限制和參考文獻必須保持可找到。

卡片排序活動：建立邏輯順序

將以下卡片排列成一個關於校車路線規劃問題的連貫論文路徑：

距離資料 路線演算法 最終路線 問題任務 假設 基準值

對行車時間的敏感度

建議

可能存在多種可辯護的順序。對於每一對相鄰的卡片，寫一句話解釋為什麼第二個依循第一個。

例題 1：連貫的排隊研究論文骨架

對於一個學校食堂的排隊問題，簡潔的章節規劃可能如下：

1. 問題詮釋。定義績效度量：平均等待時間、第 90 百分位等待時間和人員成本。
 2. 資料與假設。解釋如何估計到達時間和服務時間，以及何時泊松模型是合理的。
 3. 基線容量檢查。在模擬之前比較到達率 λ 和服務容量 $c\mu$ 。
 4. 離散事件模擬。陳述事件、狀態變數、演算法、預熱期和重複次數。
 5. 依據人員配置的結果。呈現一個包含等待時間、隊列長度、利用率和成本的表格。
 6. 模型效度驗證。在匹配的假設下，比較單伺服器模擬與分析的 M/M/1 結果。
 7. 敏感度分析。改變高峰到達率和服務時間分佈。
 8. 建議。選擇滿足服務目標的最小人員配置水平；在極端高峰期間說明限制。
- 該結構反映的是證據鏈，而不是團隊的工作日記。

4 評分準則解讀為證據地圖

HiMCM官方描述強調建模與問題解決、分析、結論、溝通、清晰度、支持和組織。IM²C 指引要求提供變數、假設、合理的模型設計、測試、敏感度以及優勢或弱點。這些來源未公佈原始草稿中使用的百分比權重。因此，請將以下內容作為一項教學視角，而非官方評分公式。

一份有力的報告需要回答的五個問題

1. 任務覆蓋度：團隊是否回答了問題陳述中的所有要求？
2. 模型推理：假設、數據選取和方法是否恰當且有充分的理由？
3. 數學執行：方程、演算法、計算和解釋是否正確？
4. 證據與穩健性：模型是否根據數據、理論、基準、極限情況或替代假設進行了檢查？
5. 溝通與合規性：讀者是否能遵循論證、定位結果、核實來源，並確認規則是否已遵守？

證據地圖

問題	清楚而有力的證據	弱信號
任務覆蓋度	任務列表、對應小節、最終答案表	僅隱含地或完全沒有回答任何任務
模型推理	假設的理由；基準到精煉的邏輯；方法選擇	一種時尚的方法出現，但沒有比較或需要
執行	定義的符號；推導的方程；可重現的演算法；單位	最終公式未附帶解釋或維度
證據	基準、數據對照、殘差、敏感度表、不確定性	「模型是準確且魯棒的」但沒有數值檢查
溝通	資訊充分的標題、結果呼叫、交叉引用、一致的符號表示	文字牆，隱藏答案，沒有標示的圖，符號漂移
合規性	正確的格式、匿名性、引文、披露、文件檢查	論文中的團隊名稱，錯誤的頁數，缺少來源文件

證據搜尋

閱讀任何建模論文的兩頁摘錄。針對上述五個問題中的每一個，標註一個提供證據的句子、方程、圖形或表格。如果找不到證據，請寫下修補該缺口的確切添加內容。

檢查點：檢查點

一篇文章使用進階遺傳演算法並報告了一個非常低的目標值。還剩下哪些證據問題沒有得到回答？請指出該論文還需要至少三種具體的檢查。

5 假設是設計決策

假設不應只是例行交代的一句話。它會改變可行的模型、參數的解釋以及建議的強度。

四部分假設模式

對於每一個重要的假設，請說明：

1. 內容 (**What**)：精確的簡化或主張；
2. 原因 (**Why**)：證據、領域推理或明確的實用必要性；
3. 影響 (**Effect**)：什麼成為可能，以及可能引入的扭曲；
4. 檢驗 (**Test**)：如何在之後檢查或變異該假設。

並非每一個次要的假設都需要四個單獨的段落，但每一個高影響的假設都應該使這四個想法可以被追溯。

例題 2：弱假設與改進

弱假設：“我們假設客戶的到達是泊松過程。”

改進後：“在 20 分鐘的尖峰間隔內，我們將客戶的到達建模為具有恆定速率 λ 的泊松過程。當到達大致獨立且觀察到的計數在該間隔內沒有明顯趨勢時，這是合理的。該假設允許指數間隔採樣以及與排隊公式的比較。由於學生可能成群地到達，我們還使用突發到達重新運行模擬並比較人員配置建議。”

重寫工作室

使用內容 – 原因 – 效果 – 檢驗來改寫以下假設中的兩個：

1. “交通速度是恆定的。”
2. “人口不遷移。”
3. “所有客戶都表現相同。”
4. “數據是準確的。”

劃線承認可能弱點的句子。一個強假設部分不應假裝簡化沒有代價。

模型檢視：不要將假設與其後果分開

開頭的一長串內容很容易被遺忘。當它們進入方程式時，請回顧假設：「根據假設 A2，到達率是恆定的，因此...」之後的敏感度分析應該確定哪些假設實際上已經被測試。這創造了可追溯性，而不是一個裝飾性的列表。

6 結果、模型效度驗證與敏感度分析必須清楚可見

一個結果不僅僅是一個數字。一個完整而有用的結果單元包含一個問題、一個量度指標、帶有單位的數值、一個比較以及一個決策的含意。

優先呈現結果單元

使用以下模式：

任務 → 量度指標 → 結果 → 比較 → 決策。

範例：「為了使第 90 百分位等待時間低於 6 分鐘，需要三個服務櫃檯。模擬估計為 5.4 分鐘（95% 間隔 5.1–5.7），而使用兩個服務櫃檯則為 8.9 分鐘。因此，我們建議在高峰期使用三個服務櫃檯。」

例題 3：緊湊的證據表

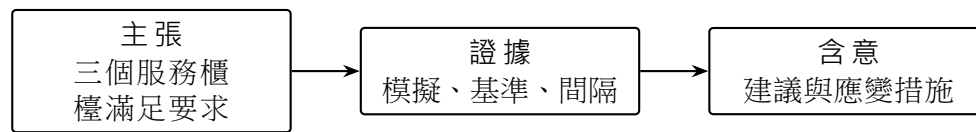
情境	服務櫃檯數	平均等待時間 (分鐘)	第 90 百分位	利用率
基準	2	4.8	8.9	0.91
建議值	3	2.1	5.4	0.64
到達率 +20%	3	3.6	7.2	0.77
服務速度 –10%	3	3.0	6.4	0.71

該表格不僅僅是顯示輸出。它揭示了當需求增加 20% 時，建議值未能達到目標，因此結論應包含高峰需求的應變措施。

模型效度驗證與敏感度分析並不相同

- 運算 / 程式核證：我們是否正確地解決或編寫了模型？範例：手動計算、守恆檢查、單元測試、收斂測試。
- 模型效度驗證：模型是否足夠好地代表真實系統？範例：留出數據、外部基準、專家預期、觀察到的趨勢。
- 敏感度分析：當輸入或假設改變時，結論如何變化？

- 不確定性分析：由於輸入或模擬的不確定性，報告的輸出有多不確定？
- 論文可能會使用不同的章節名稱，但它不應混淆這些任務。



一個標題或段落應解釋這三個框之間的關係；讀者不應僅從圖中推斷出來。

圖 2: 當主張、支持證據和決策含意被明確聯繫時，一個結果才會具有說服力。

檢查點：圖說測試

哪一個圖說較有力？為甚麼？

1. “圖 4. 敏感度分析。”
2. “圖 4. 將峰值到達率增加 20% 會導致即使使用三個服務櫃檯，第 90 百分位等待時間也超過 6 分鐘；因此，建議需要一個超載計劃。”

7 可追溯性與評審導航

一份報告應使讀者能夠追溯每一個問題要求到結果，以及每一項建議到證據。

任務至證據矩陣

在起草之前，請建立如下表格：

問題任務	模型 / 方法	結果位置	核查 / 限制
估算當前效能	排隊模擬	表 3, 第 5.1 節	與觀察樣本比較
選擇人手配置	成本－服務權衡	圖 6, 第 5.2 節	到達率敏感度
規劃特殊高峰期	情境模型	表 5, 第 6 節	高峰出現時間不確定

如果某一行有空欄，則報告尚未準備就緒。

評審導航稽核

交換藍圖或草稿。審閱者有 90 秒時間，不得向作者提問。記錄您找到的頁面或部分：

1. 每個問題任務；
2. 主要模型；
3. 主要數值結果；
4. 最強的效度驗證檢查；
5. 最具決策影響的敏感度結果；
6. 最終建議與限制。

在 90 秒內未找到的任何內容都需要結構性修復，而不僅僅是語法編輯。

模型檢視：導航非裝飾

目錄、編號方程式、描述性標題、圖注和交叉引用能減少讀者的搜尋成本。裝飾性的顏色、複雜的圖表和過多的方框不會自動改善導航。僅在揭示邏輯層次時才使用視覺層次結構。

8 整合藍圖工作坊

工作坊：在解決問題前設計論文

一所學校希望在 7:30 至 8:00 之間減少單一入口的擁堵。學生步行、乘私家車或巴士到校。學校可以改變車道分配、人員部署和到達引導。目標是在不造成門外不安全的隊列的情況下減少延誤。

團隊合作，產出一份單頁報告藍圖，包含：

1. 一個包含可測量輸出的三句話問題詮釋；
2. 一個任務清單和任務與證據矩陣；
3. 三個高影響的假設，以「什麼—為什麼—效果—測試」的形式呈現；
4. 一個基準模型和一個有根據的改進方案；
5. 一個建議的結果表，包含欄標和單位；
6. 一個運算核證檢查、一個模型效度驗證檢查，以及兩個敏感度情境；
7. 一個包含單句目的陳述的章節大綱；
8. 一個最終建議句子模板，包含一個條件和限制。

不要計算最終答案。產物是可辯護論文的架構。

分級路線

- 核心路線：使用確定性到達流模型和簡單的容量比較。
- 挑戰路線：添加時變到達量和離散事件模擬。
- 延伸路線：定義一個平衡延誤、成本和安全的多目標分數；解釋如何論證權重設定和測試它們。

所有路線必須保持相同的證據鏈和任務可追溯性。

9 進入 W2 的準備事項

W1 的要點

1. 規則是針對競賽和年份而異的。僅在檢查官方指示後才建立模板。
2. 標準架構是有用的，但章節名稱和位置應服務於邏輯證據鏈。
3. 不要將非官方的百分比權重視為官方的評分準則。請評估可見的證據。
4. 每個主要的假設都應揭示所做的假設、原因、其影響以及如何進行測試。
5. 結果必須易於定位，並且必須將數字與比較和決策聯繫起來。
6. 運算／程式核證、模型效度驗證、敏感度分析和不確定性回答不同的問題。

7. 一個任務與證據矩陣以及 90秒導航審核能及早暴露結構缺口。

檢查點：課末檢核

在四句話以內：

1. 說明你將對下一次報告進行的某個結構性更改；
2. 指出一個你將測試的假設，而不是僅僅陳述它；
3. 解釋模型效度驗證與敏感度分析之間的區別；
4. 陳述 W2 必須教會你關於單頁摘要的內容。

在 W2：撰寫摘要中，我們將通過四個功能來構建第一頁：問題、方法、定量結果和決策洞察。學生將診斷薄弱的摘要，並在不丟失證據的情況下起草逐步精簡的版本。

附錄 A：論文架構檢查表

審查問題	需要定位的證據
論文是否回答了所有任務？	任務列表、匹配的結果章節、任務與證據矩陣
讀者能否理解模型？	定義的符號、假設、推導或演算法、單位
讀者能否找到答案？	摘要、標註的結果表、明確的結論
實施是否經過核證？	手工算例、單元測試、守恆或收斂檢查
模型對現實的表徵是否通過效度驗證？	數據對照、基準、留出案例、預期趨勢
建議是否穩健？	參數和結構敏感度；不確定性區間
限制是否與決策相關？	建議可能失敗的條件
文件是否合規？	當前頁數限制、字體、匿名性、頁首、引用、披露
評審者能否快速導航？	具描述力的章節標題、圖表說明、交叉引用、一致的符號表述

附錄 B：獨立論文閱讀任務

選擇一篇最近的傑出 HiMCM 論文或已發表的 IM²C 作品。不要一開始便評斷數學內容。首先產生：

1. 其章節地圖；
2. 一個任務與證據矩陣；
3. 每個主要數值結果的首次位置；
4. 一個強假設、標題、效度驗證和限制的範例；
5. 一項值得借鑑的結構設計和一個你將更改的決策。

然後將報告與本課程中的五個證據問題進行比較。

附錄 C：本課程所核實的官方來源

- COMAP, 2026 HiMCM/MidMCM 競賽指示與規則。

- COMAP, HiMCM/MidMCM 提示文章。
- IM²C 挑戰概覽與建模要求。

規則可能會更改。在競賽前立即核實當前的官方文件。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- HiMCM / MidMCM 競賽指引 (COMAP)
- IM²C 挑戰概覽與建模要求 (International Mathematical Modeling Challenge)
- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引 (SIAM / COMAP)

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模競賽寫作課程

W2：摘要表——主張、證據與決策

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本節兩小時課堂後，學生應能夠：

- 區分競賽摘要表、引言、學術摘要、方法清單與團隊工作日記；
- 在撰寫正文前建立證據清單；
- 將題目中的每項主要任務對應至模型、結果與決策；
- 以任務、策略、發現、信任／決策四個功能區塊組織摘要；
- 選取少量與決策相關的數字，並連同單位、基準及適用條件報告；
- 在精簡的主張中區分運算／程式核證、模型效度驗證、敏感度分析與不確定性分析；
- 在不削弱研究成果的前提下提出附有條件的建議；
- 在保留任務覆蓋與證據鏈的同時精簡草稿；
- 從答案可見度、證據、一致性與精確度進行快速同儕審閱。

1 競賽摘要表應完成甚麼

摘要並非把每個章節等比例縮短。它是一份決策簡報：讀者毋須翻閱完整報告，也應能辨認任務、建模路徑、主要發現，以及建議背後信心水平或限制。

官方指引也支持這項重點。現行 HiMCM 指示要求解答以摘要表開首，並要求團隊清楚呈現主要構想與結果；現行 IM²C USA 指示則指出評審十分重視摘要，而且最重要的結論應予突出。這些來源都沒有支持「評審恰好只看七分鐘」或「摘要佔 60% 分數」之類未經證實的說法。我們應依據官方要求，而非競賽傳聞。

啟動活動：20 秒答案測試

閱讀一頁摘要二十秒，然後把它蓋起來。在不回看的情況下回答：

1. 團隊須作出甚麼決策，或求出甚麼數值？
2. 團隊的主要建議或數值答案是甚麼？
3. 哪個模型或方法產生這些結果？
4. 哪些證據令建議可信？

若讀者無法憑記憶回答至少三項，這份摘要便尚未發揮摘要應有的功能。

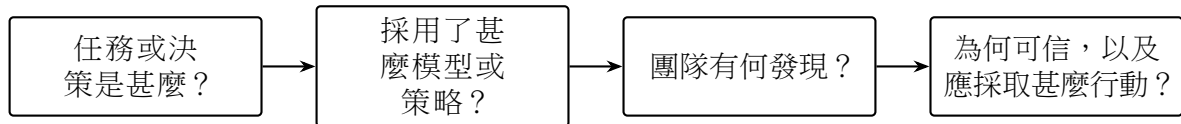


圖 1：摘要應回答讀者的四個問題。措辭與次序可以不同，但四項功能都應清晰可見。

模型檢視：摘要表、引言與學術摘要並不相同

- 引言鋪陳背景、解釋問題及交代報告結構，因此可以稍後才呈現數值答案。
- 研究論文的學術摘要通常遵循學術慣例，以精簡形式交代目的、方法、結果與結論。
- 競賽摘要表更接近一份供決策者閱讀的簡報：它應直接陳述答案、辨明建模架構，並說明答案為何站得住腳。

直接把引言複製為摘要，通常會造成背景資訊過多、結果過少。

2 不要從正文起筆：先建立證據清單

摘要薄弱，往往不只是句子寫得不好，而是證據取捨失當。團隊在判斷哪些任務、結果、比較與限制必須放進一頁之前，便急於寫成完整段落。

五欄證據清單

起草前，為每項重要任務填寫一列：

任務	核心答案	方法	證據 / 核證	條件 / 限制
必須回答甚麼？	數值、排名、路線、閾值或建議	產生結果的模型或演算法	基準、模型效度驗證、不確定性或敏感度分析	答案在甚麼情況下可能改變？

沒有核心答案的一列，表示分析尚未完成；沒有證據的一列，表示主張缺乏支持；沒有適用條件的一列，則可能反映過度自信。

例題 1：學校巴士案例的證據清單

一所學校須為 226 名學生重新設計路線，所用巴士每輛可載 60 人。目標是在最長預定車程不超過 45 分鐘的前提下，縮短乘車時間。

任務	答案	方法	證據 / 核證	條件
選擇車隊規模	四輛巴士	容量下界加路線規劃模型	$226/60 = 3.77$ ，故至少需要四輛	假設所有登記乘客當日均乘車
設計路線	四條路線，總長 87.4 公里	先分群、再作車輛路線規劃的啟發式方法與局部搜尋	現有路線總長 103.6 公里	不考慮道路封閉
縮短乘車時間	平均 28.2 分鐘；最長 44.1 分鐘	時變最短路徑	現有平均為 42.9 分鐘；所有規劃路線均短於 45 分鐘	使用早上行車時間估計
測試需求變動	在 20 個受測需求情境中，四輛巴士在 18 個情境仍足夠	各地區學生數作 ± 10 擾動後重新分配	在 17 個情境中，最長車程仍短於 45 分鐘	兩個高需求情境需要第五輛巴士

摘要毋須塞進表內所有數字；它只須保留能回答任務、證明改善幅度，以及揭示決策邊界的數字。

檢查點：檢查點：還欠甚麼？
某團隊寫道：「優化後的路線長度為 87.4 公里。」請根據證據清單指出至少三項欠缺的資訊。可追問：相對哪個基準？用了多少輛巴士？須符合甚麼容量與時間限制？結果有多穩定？

模型檢視：任務覆蓋先於文字優雅
即使摘要行文出色，只要遺漏一項必要任務，仍是不完整。把題目的任務動詞抄出來——估計、設計、比較、建議、測試——再檢查每個動詞是否直接出現，或是否已有明確結果句作答。

3 四個功能區塊——保留實用彈性

四區塊構想是一項有用的設計工具，卻不應被當作僵硬的段落規則。

建議的四區塊架構

區塊	主要功能	必須包含
1.任務 (Task)	引導讀者	決策情境、所需輸出、重要約束
2. 策略 (Strategy)	解釋模型架構	基準至改良的次序、具名方法、資料的用途
3. 發現 (Findings)	提供答案	先寫主要結果，再寫單位、比較與任務覆蓋
4. 信任與決策 (Trust and decision)	校準信心並連接行動	模型效度驗證／敏感度證據、閾值或注意事項、建議

典型的一頁摘要可以粗略分配 2-3 句給任務、3-5 句給策略、4-6 句給發現，以及 2-4 句給信任／決策。這些只是起草時可參考的範圍，並非硬性規則。

任務 (Task)：點明決策、輸出與約束——不是交代競賽歷史。

策略 (Strategy)：顯示模型如何銜接——不是羅列軟件和方程式。

發現 (Findings)：由答案寫起，再交代改善、閾值或不確定性。

信任 / 決策 (Trust/Decision)：交代核查、測試範圍與下一步行動。

圖 2：一個穩定的起草架構。若答案非常迫切，而且毋須額外背景即可理解，也可採用結果先行的開首。

模型檢視：何時適合以結果開首

若題目明顯以決策為導向，摘要可以答案開首：

我們建議一般上課日安排四輛巴士；預測乘客數達 236 人時開始提早檢視車隊；確認乘客數達 241 人（即超過二百四十人）時啟用第五輛應變巴士。

下一句仍須交代任務與適用條件。結果先行只是改變證據的呈現次序，並不等於可以刪去必要背景。

4 撰寫任務與策略區塊

4.1 任務區塊：精簡問題，而非刪光背景

有力的任務區塊應令交付成果一目了然。除非某項背景會改變建模選擇，否則毋須在此詳述歷史。

例題 2：薄弱與改良的任務區塊

薄弱

校車在很多地方都很重要，很多學生每天都乘搭校車。本文研究校車路線規劃；這是一個複雜問題。

改良

學校須以每輛容量 60 人的巴士接載 226 名學生，同時縮短車程，並確保每條預定路線的車程少於 45 分鐘。因此，我們尋找最小可行車隊、符合容量限制的路線組合，以及應對每日需求不確定性的啟動規則。

改良版本在兩句內點明決策變量、約束與所需輸出。

任務區塊句式

[決策者] 須為 [系統 / 群體] 作出 [決策]，並符合 [主要約束]。我們估計 / 設計 / 比較 [所需輸出]，以 [效能指標] 為主要準則。

4.2 策略區塊：先交代架構，後交代技術細節

策略區塊應解釋為何需要多種方法，以及它們如何互相銜接。軟件清單並不是建模策略。

例題 3：方法清單與模型架構

薄弱

我們使用 *Python*、分群、*Dijkstra* 演算法、最佳化、模擬與敏感度分析。

改良

我們先由容量限制導出車隊規模下界，再把鄰近車站分群，並在以時間加權的道路網絡上求最短路徑，以建立可行路線。其後以局部搜尋在路線之間交換車站，目標是縮短最長車程，而不只減少總距離。最後，我們在擾動後的地區需求下重新執行分配，找出四輛巴士不再足夠的條件。

改良版本呈現的是一連串有因果關係的建模決定。軟件只屬實作細節，可從摘要省略。

檢查點：檢查點：說明每次修正

逐項說明後一階段補救了前一階段的甚麼弱點：

1. 容量下界 → 可行路線規劃；
2. 最小總距離路線 → 針對最長車程的局部搜尋；
3. 名義需求 → 擾動需求下重新執行。

加入改良步驟，應是因為基準模型遺漏了重要因素，而不是因為第二種演算法聽起來較先進。

5 寫出有證據支撐的發現

發現區塊不是存放所有輸出的倉庫，而應呈現有層次的主張。

結果的三個層次

1. 決策結果：題目要求的路線、數量、排名、閾值或建議。
2. 效能證據：相對基準或要求的改善。
3. 穩健性邊界：決策在甚麼測試範圍內維持不變，以及何時改變。

摘要通常需要三個層次，但每層只選少量最有解釋力的數字。

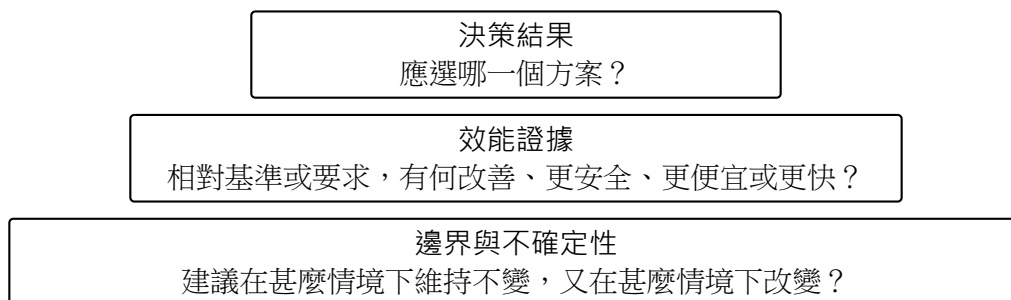


圖 3: 結果的選取應由決策推進至量化支持，再交代測試邊界。

量化主張必須有語境

有用的結果句通常包含下列數項：

- 數值與單位：28.2分鐘、87.4 公里、四輛巴士；
- 基準或目標：由 42.9 分鐘下降、低於 45 分鐘限制；
- 範圍：早上路線、226名登記學生、一般需求；
- 不確定性或測試範圍：20個情境中的 18 個、各地區 ± 10 名學生；
- 決策含義：維持四輛巴士、達到啟動條件時加入第五輛。

例題 4：逐步加強結果句

版本	句子
過於含糊	優化後的路線比現有路線好得多。
只有數值	平均車程為 28.2 分鐘。
加入比較	平均車程由 42.9 分鐘降至 28.2 分鐘，減少 34.3%。
可供決策	採用四輛巴士時，平均車程由 42.9 分鐘降至 28.2 分鐘，最長路線為 44.1 分鐘，符合 45 分鐘要求。
校準主張	採用四輛巴士時，平均車程由 42.9 分鐘降至 28.2 分鐘，最長路線為 44.1 分鐘；四輛巴士在 20 個擾動需求情境中的 18 個仍然可行，另有兩個高需求情境須使用第五輛。

模型檢視：精簡選數

數字越多，不代表證據越強。可選約三至六個各有用途的核心數字，分別回答答案、改善幅度、約束及穩健性邊界；路線細節、參數表和次要指標則留在正文。

檢查點：檢查點：補充分母

「方法的成功率為 90%」並不完整。請重寫句子，交代成功率來自哪些情境或重複試驗、輸入範圍為何，以及以甚麼閾值判斷成功。

6 交代可信度，同時避免誇大

最後一個區塊應告訴讀者發現為何可信，以及這種信任的界線。

四種不同的證據動詞

術語	回答的問題	摘要用語
運算 / 程式核證	我們有否正確實作或求解模型？	“手算的四站小型案例與程式輸出一致。”
模型效度驗證	模型有否重現相關現實或公認基準？	“預測車程與兩個留出早上的觀測值平均相差 2.4 分鐘。”
敏感度分析	輸入或假設改變時，結果如何變化？	“四輛巴士方案在 20 個擾動需求情境中的 18 個仍然可行。”
不確定性分析	估計值周圍有甚麼範圍或概率？	“在所有重複試驗中，模擬所得第 90 百分位等待時間介乎 7.8–9.1 分鐘。”

若唯一檢查只是程式順利執行，便不應寫成“validated”；若沒有說明測試範圍與結果指標，也不應聲稱結果“robust”。

例題 5：加入限制而不自我否定

薄弱表述

模型有很多不切實際的假設，所以結果可能不準確。

改良表述

四輛巴士的建議在已測試的各區 ± 10 名學生擾動下保持穩定，但測試未涵蓋道路

封閉和異常集中的缺席。因此，我們建議平日安排四輛巴士，預測乘客數達 236 人時提早檢視車隊，並在確認乘客數達 241 人（即超過二百四十人）或主要路線無法使用時啟用第五輛應變巴士。

改良版本清楚交代已測範圍、未測條件與實際應對方式。

精確用語庫

避免使用	有相應證據時可改用
模型證明了……	模型預測……／在所述假設下，分析顯示……
解決方案是最佳的。	解決方案是所述線性模型的最優解。／它是已測候選方案中找到的最佳結果。
結果是穩健的。	當 p 由基準值的 0.8 倍變至 1.2 倍時，建議維持不變。
模型是準確的。	留出觀測值上的平均絕對模型效度驗證誤差為 2.4 分鐘。
方法很有效率。	對 250 個節點的測試案例，執行時間由 48 秒降至 7 秒。

7 完整寫作轉化

本節把例題 1 的證據清單轉化為一份完整的競賽式摘要。案例只供說明；重點是句子設計，而非巴士路線本身的數學計算。

初稿

本文研究校車路線問題。我們使用分群、最短路徑、一種最佳化演算法、*Python* 和敏感度分析。我們發現模型表現良好，並能減少路線。結果顯示四輛巴士很好，學校應採用我們的模型。研究存在若干限制，但未來工作可以改善。

模型檢視：診斷

草稿只提及研究主題，沒有實際約束；它羅列工具，卻沒有交代建模架構；它也沒有按任務給出單位、基準、閾值或結果。「表現良好」、「很好」和「限制」均是缺乏證據的標籤，而建議亦沒有啟動條件。

完整示範摘要

任務。學校須以每輛容量 60 人的巴士運送 226 名登記學生，同時縮短車程，並確保每條早上路線少於 45 分鐘。我們求出最小可行車隊、建立路線方案，並判斷何種需求不確定性會令系統需要額外容量。

策略。我們先從容量限制求得下界，證明至少需要四輛巴士。其後把相鄰車站分群，並以道路網絡上的時間加權最短路徑連接各站。由於只減少總距離可能造成某條路線過長，局部搜尋階段會在維持容量可行的前提下，於不同巴士路線之間交換車站，以縮短最長車程。最後，我們在二十個需求擾動情境下重新執行分配；每個情境把各地區乘客數增加或減少最多十人。發現。我們建議一般上課日採用四條路線，總長 87.4 公里。相對現有 103.6 公里的方案，路線總長減少 15.6%。預測平均乘車時間由 42.9 分鐘降至 28.2 分鐘，而最長預定車程為 44.1 分鐘，符合少於 45 分鐘的要求。四輛巴士在 20 個需求擾動情境中的 18 個仍然可行；在兩個需求最集中的高需求案例中，至少一條路線會超出容量，因而需要第五輛巴士。

信任與決策。手工追蹤的小型案例重現了路線成本計算，而模型車程亦已與最佳化前的早上行車紀錄比較。因此，這項方案適用於一般需求，但不應視為無條件成立。我們建議平日安排四輛巴士，預測乘客數達 236 人時開始提早檢視車隊，並在確認乘客數達 241 人（即超過二

百四十人)、地區需求異常集中,或主要道路封閉令行車時間矩陣失效時,啟用第五輛應變巴士。

檢查點：句子功能檢查

請在完整摘要中分別畫線標示：

1. 陳述核心答案的句子；
2. 交代相對基準改善幅度的句子；
3. 報告約束測試的句子；
4. 報告敏感度分析的句子；
5. 把無條件建議改成附條件建議的句子。

若兩項不同的必要任務只能依靠同一句含糊句子作答，便須增加具體資訊。

8 精簡與修訂

一頁限制帶來的是取捨問題。目標不是平均縮短每句，而是移除價值較低的材料，同時保護完整證據鏈。

三遍修訂

1. 完整性檢查：每項主要任務都有答案嗎？建議及重要條件是否明確？
2. 證據檢查：每項主要主張都有數值、比較、核查或測試範圍支持嗎？
3. 精簡檢查：刪去歷史敘述、工作過程、重複的方法細節、空泛形容詞、軟件名稱、方程式及填充式的未來工作。

不要從精簡開始；簡短但不完整的摘要，仍然不完整。

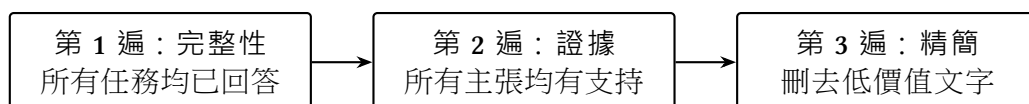


圖 4: 修訂次序很重要。在核對任務覆蓋前刪改，可能會誤刪唯一回答某項要求的句子。

例題 6：精簡而不丟失證據

精簡前——44 字

為判斷我們提出的路線模型在各地區所分配的學生人數改變時能否繼續有效運作，我們進行了一項涵蓋多個替代需求情況的敏感度分析。

精簡後——19 字

我們在二十個情境下重新執行分配，各地區需求擾動為 ± 10 名學生。

較短的句子仍保留行動、樣本數、所改變的輸入及擾動範圍。

模型檢視：必須保護的高價值細節

保留任務答案、決策閾值、單位、基準、模型效度驗證指標、測試範圍及建議的適用條件。可以刪去競賽年份、團隊工作流程、程式語言、方程式、冗長參數清單，以及「未來工作可以改善模型」一類空泛句子。

9 寫作工作坊與同儕審閱

核心路線：由證據寫成摘要

運用校車證據清單，自行撰寫一份 12–16 句的摘要，不要照抄上述完整版本。要求如下：

- 回答全部四項任務；
- 包含至少四個有單位的數值或量化比較；
- 包含一句運算／程式核證或模型效度驗證陳述；
- 包含一項敏感度邊界；
- 以附有條件的建議作結。

挑戰路線：兩種開首

分別撰寫摘要首四句的兩個版本：

1. 任務先行；
2. 結果先行。

與同伴交換草稿。哪個版本既令答案更易辨認，又不會令背景含糊？

延伸路線：摘要中的指標衝突

假設最短路線方案把總距離降至 82 公里，卻令一名學生的車程達 51 分鐘；平衡方案的總距離為 87.4 公里，但所有車程均少於 45 分鐘。請用兩句解釋為何建議採用平衡方案，並說清目標、約束與取捨，不要在沒有定義的意義下稱任何方案為「最佳」。

兩分鐘同儕審閱——課堂工具，並非官方評分準則

每項給予 0、1 或 2 分。

準則	問題
任務覆蓋	每項主要要求都能與答案對應嗎？
答案可見度	能在十秒內找到核心建議嗎？
模型架構	讀者能理解各方法如何銜接，以及為何需要改良嗎？
量化證據	重要主張有單位、基準、閾值或不確定性支持嗎？
信任校準	有否準確描述運算／程式核證、模型效度驗證或敏感度分析，並附上邊界或注意事項？
精簡與一致性	每句均有作用，而且所有數字與正文一致嗎？

評分後只寫兩項意見：最有價值的一句，以及最重要的一項修訂。

檢查點：課末檢核

按每項提示各寫一句：

1. 你所解決的一個建模問題之核心答案；
2. 令答案具有意義的一個基準或閾值；
3. 支持讀者信任答案的一項證據；
4. 令建議改變的一項條件。

這四句正是日後撰寫「發現」與「信任／決策」區塊的核心。

10 進入 W3 前的準備

W2 重點整理

1. 撰寫正文前，先建立證據清單。
2. 把四個區塊視為四項功能：任務（Task）、策略（Strategy）、發現（Findings）、信任／決策（Trust/Decision）。
3. 先寫核心答案，再寫次要輸出。
4. 報告數字時交代單位、基準、閾值與範圍。
5. 準確區分運算／程式核證（verification）、模型效度驗證（validation）、敏感度分析（sensitivity analysis）與不確定性分析（uncertainty analysis）。
6. 限制若能轉化為條件、啟動規則或警告，便具有決策價值。
7. 按完整性 → 證據 → 精簡的次序修訂。
8. 摘要必須與正文、表格及結論完全一致。

在 **W3**：假設、效度驗證與敏感度分析，我們會建立本節「可信度句子」背後所需的證據。學生將設計可供檢驗的假設，區分模型的運算／程式核證與現實世界的模型效度驗證，並把參數變動轉化為與決策相關的敏感度結論。

附錄 A：證據清單工作紙

任務（Task）	核心答案 （Headline answer）	方法（Method）	證據／核證 （Evidence/check）	條件／限制（Condition/caveat）

附錄 B：句式

- 任務 (**Task**)：[決策者] 須在 [約束] 下 [作出決策]；因此，我們估計 / 設計 / 比較 [輸出]。
- 架構 (**Architecture**)：我們先以 [基準] 開始，再加入 [改良] 以補救 [具名弱點]，最後進行 [測試 / 決策階段]。
- 核心結果 (**Headline result**)：我們建議 [行動 / 數量]，其在 [範圍] 下產生 [附有單位的指標]。
- 比較 (**Comparison**)：相對 [基準]，[指標] 由 [舊值] 變為 [新值]，改善 [百分比或絕對值]。
- 模型效度驗證 (**Validation**)：相對 [留出資料 / 基準]，模型達到 [誤差或一致程度量]。
- 敏感度分析 (**Sensitivity**)：當 [輸入] 在 [範圍] 內改變，建議維持不變；但達到 [閾值] 時，建議便會改變。
- 附條件決策 (**Conditional decision**)：在 [條件] 下採用 [行動 A]；達到 [啟動條件] 時改用 [行動 B]。

附錄 C：最終一致性核對表

- 題目要求的每項任務均在摘要及正文出現。
- 核心數字與最終結果表完全一致。
- 單位、分母、時間範圍及情境數均清楚可見。
- 「最優 (optimal)」、「已驗證 (validated)」、「穩健 (robust)」與「準確 (accurate)」均有恰當證據支持。
- 除非影響可重現性或解釋，否則不列軟件名稱。
- 除非方程式本身就是核心結果，否則不在摘要放入方程式。
- 建議須包含決策者、行動及相關條件。
- 摘要不包含正文沒有出現的引文或主張，也不附參考文獻表。
- 頁面符合當前官方競賽樣式與識別規定。

官方來源註記。本節涉及競賽規則的陳述，已於 2026 年七月按 COMAP 2026 HiMCM/MidMCM Instructions 及 2026 IM²C USA Instructions 核對。規則、樣式及地區要求或會改變；每次參賽前應重新查閱最新官方頁面。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- HiMCM / MidMCM 競賽指引（COMAP）
- 組織研究文章（IEEE Author Center）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模競賽寫作課程

W3：建立可信度——假設、效度驗證與敏感度分析

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本節兩小時課堂後，學生應能夠：

- 解釋假設、運算／程式核證、模型效度驗證、敏感度及不確定性在模型報告中扮演的不同角色；
- 編寫一份四部分的假設卡：陳述、理由／證據、模型後果及壓力測試；
- 區分數學建模的假設與定義、參數值、範圍選擇或數學要求；
- 建構一份假設追蹤表，將每個假設與方程式、輸出及測試聯繫起來；
- 區分運算 / 程式核證與模型效度驗證，並區分兩者與校準 (calibration)；
- 根據模型的目的和可用資料，選擇適當的效度驗證證據；
- 設計逐一變動、情境、結構及以模擬為本的敏感度檢查；
- 以輸入範圍、輸出指標、決策改變及實務啟動條件報告敏感度；
- 區分參數敏感度與估計結果的不確定性；
- 撰寫精簡的可信度段落，以證據支持建議，而非只以形容詞稱讚建議。

1 可信度來自證據結構，而非自信形容詞

只有當讀者看得見結論為何值得認真考慮，模型才真正有用。「我們的模型準確而穩健」這句話本身不會增加可信度；可信度來自一條清楚可追溯的證據鏈，把現實詮釋、檢驗結果與決策後果連接起來。

官方競賽指引亦強調這點。現行 COMAP 指引要求團隊陳述假設及其理由，並分析假設被改變或移除時，結果有多敏感。IM²C 資源則把數學建模描述為一個反覆循環：解答必須回到現實情境接受檢驗與評估。章節名稱可以不同，但舉證責任不會消失。

啟動活動：對可信度主張進行排序

某團隊建議採用四輛巴士。請由最欠說服力至最有用排列以下主張，再說明每項還欠甚麼證據。

1. 「我們的模型非常可靠。」
2. 「在基準資料下，所有巴士均符合 60 人容量限制。」
3. 「在 12 個留出上課日中，預測路線時間的平均絕對誤差為 2.4 分鐘。」
4. 「在 20 個需求情境中，四輛巴士在 18 個情境仍然足夠；總乘客數超過 240 人時則需要第五輛。」

後三項各自回答不同問題，任何一項都不能取代其餘兩項。

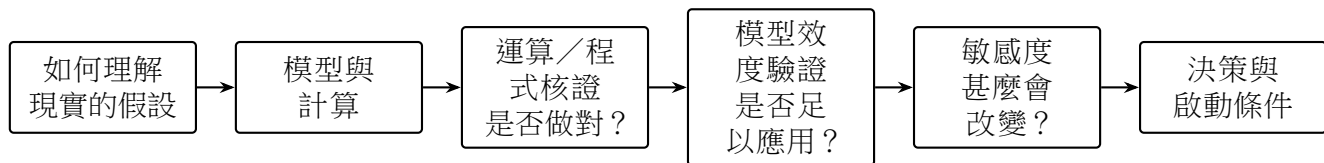


圖 1: 報告憑證據鏈建立可信度。任何薄弱環節都應化為適用條件或後續檢驗，而不是被隱藏。

必須避免合併的五個術語

術語	問題	典型證據
假設 (Assumption)	我們對系統作出哪項主張，才得以建立模型？	領域證據、資料規律、研究範圍的理由，以及明確交代的權衡。
校準 (Calibration)	哪些參數值令模型配合所選資料？	估計程序、訓練資料、目標函數與擬合值。
運算／程式核證 (Verification)	我們有否正確實作並求解所述模型？	單位、不變量、手算案例、程式測試、收斂及獨立實作。
模型效度驗證 (Validation)	模型是否足以應付原定用途？	留出資料、外部比較、實地證據、方法間預測比較及領域合理性。
敏感度／不確定性 (Sensitivity / uncertainty)	輸入與知識上的不確定性如何影響輸出或決策？	擾動、情境、分佈、區間、替代模型結構及決策轉換。

檢查點：檢查點：在寫作前分類

對每個句子進行分類。

- 「我們由 40 個觀測服務時間估計服務率 μ 。」
 - 「當到達率設定為零時，模擬的佇列保持空著。」
 - 「預測平均等待時間與實際觀測相差 0.8 分鐘。」
 - 「把指數服務時間改為固定服務時間後，建議由三個服務台減至兩個。」
 - 「我們假設早上需求在 7:15 至 8:00 期間保持平穩。」
- 建議的標籤：校準、運算／程式核證、模型效度驗證、結構敏感度、假設。

2 把假設寫成可檢驗的建模選擇

假設既不是道歉，也不是羅列顯然事實。它是對系統作出的刻意選擇，會改變數學表示或結論的適用範圍。

四部分假設卡

對每項重要假設，請寫出：

- 陳述–甚麼？一項精確而且可能不成立的主張。
- 理由 / 證據–為甚麼？資料、文獻、領域知識，或公開而合理的簡化理由。
- 模型後果–影響？它會改變哪條方程式、哪種演算法、哪個參數或多少計算負擔？
- 風險 / 壓力測試–若不成立，又如何？假設可能如何失效？哪項敏感度分析或模型效度驗證可以回應風險？

第四部分把「假設」一節與後續證據接通，形成完整迴路。

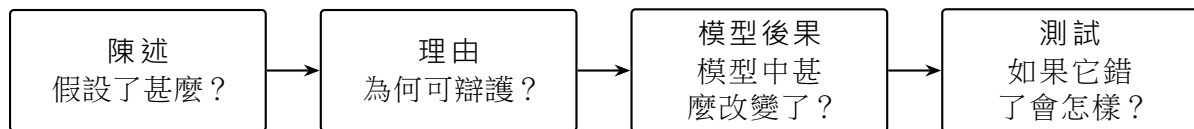


圖 2：一個完整的假設卡連接了詮釋、數學和後續的測試。

例題 1：學校巴士案例的假設卡

假設 A – 註冊乘客代表每日需求。

陳述。基準路線問題納入全部 226 名登記乘客，並假設每人都會在所建模的早上乘車。

理由。登記資料是唯一完整的乘客位置資料，亦為一般上課日提供較保守的需求估計。

模型後果。容量約束採用 226 個固定需求點，導出下界 $\lceil 226/60 \rceil = 4$ 輛巴士。

風險/測試。缺席及補登記的規律可能改變各區負荷，因此我們在 20 個地區需求情境中，把乘客數作 ± 10 擾動後重新執行模型。

假設 B – 已觀測的早上行車時間可套用於未來。

陳述。由 12 個一般上課日早上估計所得的路段行車時間，用作未來一般平日的代表值。

理由。資料已排除假日、道路工程與惡劣天氣；同一路段內的變異亦小於路段之間的變異。

模型後果。因此，可用固定行車時間矩陣評估路線，而毋須另建時變交通模擬器。

風險/測試。繁忙時段的擠塞可能延長所有路線。我們測試由 0.90 到 1.10 的乘性行車時間倍數，並設定延誤啟動條件。

模型檢視：不要將每個句子都放入假設部分

- “巴士容量為 60 人”可能是一個輸入或政策約束，而不是假設，如果它由問題指定。
- “若巴士 i 服務車站 j ，令 $x_{ij} = 1$ ”是一項定義。
- “每條路線必須從學校開始和結束”是一個可行性規則。
- “一般早上的行車時間保持穩定”是一項假設，因為現實可能不符合它。
- “我們只研究早上行程”是一個範圍決策；請在引入範圍的地方解釋它，並記錄它對結論的影響。

該部分應該包含重要的選擇，而不是報告中使用的每一個事實。

假設追蹤表

假設追蹤表可防止重要假設在第 3 頁後消失。

假設	進入之處	若不成立的風險	證據或測試
每日需求 = 226	容量和路線分配	超載或不必要的車隊	需求情境；240 名乘客的閾值
路段時間穩定	時間矩陣和乘載限制	低估最長車程	留出 GPS 誤差；0.90–1.10 時間因子
無道路封閉	最短路徑網絡	不可行的計劃路線	移除使用最多的道路的情境
每個車站代表一個接載群組	需求聚合	額外的步行負擔	最大步行距離檢查

沒有下游影響的假設可能是不相關的。沒有測試的高風險假設是一個可見的證據差距。

檢查點：假設審核

在你的現有專案中，選一項假設，畫線標出直接依賴它的方程式、資料處理步驟或演算法。然後寫下將報告其壓力測試的句子。如果無法識別，請修改或刪除該假設。

3 運算 / 程式核證：我們有否正確求解所述模型？

運算／程式核證關心的是所寫數學及程式實作是否正確。模型即使完全通過核證，仍可能不適用於現實；反過來，概念上合適的模型也可能因程式錯誤而產生錯誤結果。

實用的核證方法

1. 量綱 / 單位檢查：每個方程式的兩邊都具有相容的單位。
2. 約束檢查：報告的每一個解都滿足容量、非負性、預算、守恒和邏輯規則。
3. 極限情況或手算案例：重現一個答案已知的小型案例。
4. 不變量檢查：守恒總量維持不變；概率總和為一；流量保持平衡。
5. 數值精煉：縮小步長或收緊容差後，輸出只出現可忽略的變化。
6. 獨立實作：由另一種方法、另一套軟件或另一位組員重現關鍵結果。
7. 可重現記錄：如這些設定會影響結果，須記錄資料版本、隨機種子、求解器設定與停止規則。

選擇切合模型的檢查，不要只寫一段空泛文字，聲稱「程式已經檢查」。

例題 2：運算 / 程式核證段落

在解釋最佳化路線前，我們先核證可行性與程式實作。所有 226 名學生都被恰好分配一次，沒有巴士超過 60 人容量，每條路線都從學校開始和結束，計算出的路線距離等於所含路段長度之和。在六站手算案例中，程式重現了窮舉所得的 18.6 公里最優解。由 50 個隨機初始解啟動局部搜尋，其中 43 次得到相同的最佳目標值；所有執行結果亦均在該值的 0.7% 以內。這些檢查顯示，所報方案確實是所述路線模型的一致輸出；它們尚未證明行車時間假設能代表未來的早上。

模型檢視：校準不等於效度驗證

擬合的迴歸可以匹配其訓練資料，因為其參數是為了做到這一點而選擇的。若把佇列模型的服務率校準至樣本平均值，模型自然可以重現該平均值。這建立了校準，而非獨立的效度驗證。

為測試保留一些證據：較後時段、留出地點、外部案例、另一項可觀測量或獨立方法。當資料稀少時，應說明限制，而不是將在樣本內擬合稱為「效度驗證」。

4 模型效度驗證：模型是否足以支援決策？

模型效度驗證取決於目的。路線時間模型即使不能把每段車程精確預測至分鐘，仍可能足以比較兩套路線方案。報告必須說明用途、指標、比較對象與接受準則。

模型效度驗證主張範本

完整的模型效度驗證主張須回答四個問題：

1. 目標 (Target): 測試的是何種可觀察或與決策相關的量？
2. 比較對象 (Comparator): 與何種資料、基準、替代方法或既定範圍進行比較？
3. 指標 (Metric): 誤差、一致率、秩相關係數、覆蓋率或定性模式？
4. 判斷 (Judgment): 為何這種一致程度足以應付模型的原定用途？

範例：「在 12 個留出早上中，路線時間預測的平均絕對誤差為 2.4 分鐘，最大誤差為 5.1 分鐘。由於候選路線相差 8–19 分鐘，此精度足以用來排序方案，卻不足以承諾準確到達時間。」

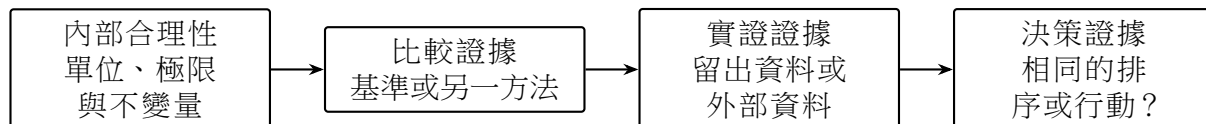


圖 3: 證據越獨立、越接近原定決策，模型效度驗證通常越有力；但不是每個專案都能達到每個層級。

按模型類型選擇驗證證據

模型類型	有用的效度證據	應避免的弱替代方案
迴歸／預測	留出誤差、殘差規律、基準比較、區間覆蓋	只報告訓練 R^2
最佳化	可行性、下界／上界、與基準方案或標準測例比較、情境表現	未交代最優性差距或適用範圍，便稱求解器輸出為「最優」
模擬	手算案例、解析特例、重複試驗的收斂、模型輸出與資料比較	只執行一次，而且不報告隨機種子或不確定性
動態模型	初始條件重現、守恆性、定性趨勢、樣本外軌跡	擬合於相同資料的視覺上相似曲線
決策指標／排序	專家或外部排序、首選方案的穩定性、已知案例的回測	沒有外部標準的高內部一致性

例題 3：以基準與留出資料作模型效度驗證

我們從兩個層級檢驗路線模型對決策是否足夠。

行車時間預測。建立模型時留出十二個上課日早上的資料。在 48 個「路線一日期」組合中，平均絕對誤差為 2.4 分鐘，最大誤差為 5.1 分鐘。誤差沒有隨路線長度而系統性增加。

決策比較。在全部 12 個早上中，模型都把現有方案排在建議方案之後。每名乘客的實際平均差異為 13.6 分鐘，模型預測則為 14.7 分鐘。雖然個別路線時間仍有不確定性，但建議方案在留出資料下仍然成立。

檢查點：修復效度句子

弱：“我們的模型與真實資料高度一致，因此是有效的。”

請加入目標、比較對象、指標與決策判斷，再重寫此句。不要絕對地聲稱「模型有效」；模型效度驗證只支持模型對某項指定用途是否足夠，而非證明普遍真理。

5 敏感度與不確定性：決策能否經得起變動？

敏感度分析改變輸入或建模選擇，再量度其影響。不確定性分析則表示我們對輸入或隨機輸出所知不完整，並以範圍或分佈報告。兩者相關但並不相同。

四種有用的敏感度分析層次

1. 局部 / 逐一變動 (OAT) 敏感度：固定其餘輸入，只讓一項輸入在合理範圍內變動。方法快速而易於解釋，但看不到交互作用。
2. 情境分析：在一般日、繁忙日與中斷日等連貫的情境中，同時改變多個輸入。
3. 結構敏感度：替換分佈、目標、函數形式、聚合規則或模型族。
4. 全域 / 模擬基礎敏感度：對不確定輸入作聯合抽樣，再研究輸出分佈或重要性指標。

方法應配合決策。簡單的雙參數模型可能只需 OAT 加一項結構檢查；非線性隨機系統則可能需要聯合抽樣。

以決策語言報告敏感度

對每項被改變的輸入，請說明：

1. 名目值和合理範圍；
2. 輸出指標和基準值；
3. 輸出變化的幅度或方向；
4. 建議、排名、可行性或閾值是否改變；
5. 結果對資料蒐集或應變規劃有何含義。

結果可以在數值上敏感而決策不變，也可以數值看似穩定卻非常接近硬性約束。因此，輸出變化與實際行動都要報告。

例題 4：OAT 表格與決策邊界

輸入 / 測試	基準值	下限	上限	決策影響
總乘客數	226	206	246	少於 241 人時用四輛；246 人時用五輛
行車時間倍數	1.00	0.90	1.10	路線方案不變；超過 1.02 時 45 分鐘限制失效
巴士容量	60	54	66	容量 54 人時用五輛；容量 60 或 66 人時用四輛
目標中的距離權重	1.00	0.75	1.25	同一車隊；路線順序略有改變
道路可用性	全部路段	–	移除使用量最高的路段	四輛巴士仍然可行；距離增加 6.8 公里

車隊建議在中等幅度的行車時間與網絡變化下保持穩定，但會在兩個清晰閾值改變：乘客數超過 240 人，或有效容量低於 57 人。車程服務標準較車隊規模脆弱，因此時間表需要預留緩衝。

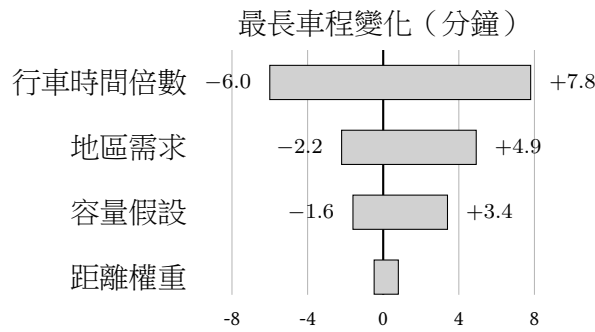


圖 4：示意旋風圖。橫條顯示在指定輸入範圍內的輸出變化；圖本身不表示發生概率或決策閾值。

模型檢視：旋風圖必須有表格作依據

沒有說明輸入範圍的橫條圖無法重現；排序後的橫條亦不能顯示參數交互作用或發生機率。請在表格或圖說列出名目值與範圍，再以正文指出與決策相關的閾值。

可選的標準化敏感度

當輸入具有不同的單位時，局部彈性可以幫助比較相對影響：

$$E_{y,x} \approx \frac{\Delta y / y_0}{\Delta x / x_0}.$$

彈性為 1.5 意味著輸入變化 1% 約產生輸出變化 1.5%，在基準值附近。這只是局部摘要，不能證明全域關係呈線性。

例題 5：結構敏感度改變建議

最小總距離的模型形式產生 82.0 公里的方案，但有一組學生仍須在巴士上乘坐 51.0 分鐘。把目標改為會懲罰最長車程的平衡目標後，所得方案為 87.4 公里，最長車程為 44.1 分鐘。因此，建議對目標函數具有結構敏感度。我們不會只因總距離較短，便稱 82.0 公里方案「更好」。我們建議採用平衡方案，因為它符合既定服務標準；同時也須報告此選擇多走 5.4 公里的效率代價。

6 整合案例：寫出完整的可信度論證

以下例子沿用 W2 的校車證據，示範同一組數值分析如何分別寫成三個功能不同的報告段落。

例題 6：可直接用於競賽報告的假設段落

A1：一般日需求。我們假設全部 226 名登記乘客都會在目標早上乘車。登記資料是唯一完整而附有地理位置的需求資料集，亦給出較保守的基準。此假設固定容量需求，並導出至少四輛 60 座巴士的下界。由於缺席與新增登記會重新分配各區負荷，第 7 節測試 20 個地區需求情境，並報告車隊改變的閾值。

A2：可套用的行車時間。路段行車時間由 12 個一般上課日早上估計，並視為未來一般平日的代表。這樣毋須另建交通流模擬，亦可透過同一個時間矩陣比較候選路線。此假設在交通中斷日較不可靠，因此模型效度驗證採用留出早上的資料，而敏感度分析則把所有路段時間乘以 0.90 至 1.10 的倍數。

例題 7：可直接用於競賽報告的核證與效度驗證段落

運算 / 程式核證。每名乘客恰好獲分配一次；所有容量限制、以學校為起點及終點的要求，以及路線連續性均獲滿足。程式重現六站窮舉所得的最優解，並在 50 個隨機起點中的 43 個得到同一最佳目標值。

模型效度驗證。在 12 個留出早上中，預測路線時間的平均絕對誤差（MAE）為 2.4 分鐘，最大誤差為 5.1 分鐘。模型預測建議方案可把平均乘車時間縮短 14.7 分鐘，實際觀測改善則為 13.6 分鐘。兩者的一致程度足以支援方案比較，但個別到達時間仍須預留緩衝。

例題 8：可直接用於競賽報告的敏感度與決策段落

各地區最多 ± 10 名乘客的需求擾動下，四輛巴士方案在 20 個情境中的 18 個仍然可行。兩個失敗情境均出現在總乘客數超過 240 人總容量時。行車時間擾動不改變車隊規模，但一般日路段時間增加約 2% 以上，便會超出 45 分鐘服務限制。移除使用量最高的道路會令距離增加 6.8 公里，卻不改變車隊建議。

因此，我們建議一般日使用四輛巴士，時間表預留三分鐘緩衝；預測乘客數達 236 人時提早檢視車隊，確認乘客數達 241 人或預測有重大中斷時，則啟用第五輛巴士。這是附有條件的實務建議，並非宣稱四輛巴士在所有情況都足夠。

為何這三個部分不應相互重複

- 假設 在呈現結果之前解釋了選擇並確定了風險。
- 運算 / 程式核證與模型效度驗證 顯示模型實作與預測是否可信。
- 敏感度 / 不確定性 顯示輸出或決策在哪裏改變，並把邊界轉化為啟動條件。

在所有三個部分中重複「模型是合理的」會浪費空間並使證據變得不可見。

7 削弱可信度的寫法

模型檢視：修正這些常見的誇大說法

薄弱措辭	以證據修正
“假設是合理的。”	說明來源、觀察到的範圍、簡化的益處以及失效模式。
“模型是經過驗證的。”	說明測試的目標、資料或基準、指標以及預期的用途判斷。
“結果是穩健的。”	說明輸入範圍、輸出變化以及決策是否改變。
“誤差很小。”	提供指標、單位、基準尺度和比較對象。
“蒙地卡羅證實了模型。”	說明採樣了甚麼、重複了多少次、不確定性以及重現了哪個分析聲明。
“改變假設影響很小。”	說明改變的假設，並量化輸出或決策的變化。

檢查點：證據句測試

圈出你目前談論可信度的段落中每個形容詞：合理、準確、現實、可靠、穩健、穩定、可忽略、顯著。逐一加入令其可量度的證據，否則刪去。

8 分層寫作工作坊

核心路線：建立假設追蹤表

對一個飯堂排隊模型，利用以下候選假設完成四列追蹤表：平穩到達率、獨立到達、固定服務台數，以及沒有顧客中途離開。每列須指出假設進入模型的環節、不成立時的風險，以及一項壓力測試。

挑戰路線：設計驗證計劃

一項迴歸模型預測自行車使用量，依賴於溫度、降雨量、一天類型和路線長度。你有 180 個每日觀測值。請提出：

1. 一種校準程序；
 2. 兩項運算／程式核證檢查；
 3. 留出資料上的兩項模型效度驗證指標；
 4. 一個基準模型；
 5. 一個關於該模型是否足以為自行車儲存設施進行人員配置的標準。
- 不要僅使用訓練 R^2 作為唯一證據。

延伸路線：將不確定性轉化為決策規則

某水庫模型預測，日放水量為 24 ML 時，儲水量在 100 個抽樣氣候需求情境中的 91 個維持於安全閾值以上。日放水量降至 22 ML 後，成功情境增至 100 個中的 98 個，但農場供水減少 8%。請寫出一項建議，交代權衡、不確定性，以及轉換政策的啟動條件。

同儕審閱：無作者解釋

交換草稿並回答：

1. 哪個假設產生最大的決策風險？
2. 哪些內容經過運算／程式核證？哪些內容接受了模型效度驗證？

3. 是否有任何校準證據被錯誤地稱為模型效度驗證？
 4. 哪個敏感度範圍最具決策相關性？
 5. 在哪個閾值時建議發生變化？
 6. 哪一句話超出了證據的範圍？
- 即使作者不在旁補充解釋，可信度段落也必須站得住腳。

9 課末檢核與 W4 準備

課末檢核

為你的現有專案撰寫四個句子：

1. 一張完整的假設卡，壓縮成一到兩句話；
2. 一個具體的檢查，包含一個運算／程式核證的論點；
3. 一項包含比較對象與指標的模型效度驗證主張；
4. 一項包含決策改變條件的敏感度主張。

如果這四個句子可以互相替換，則區別尚未明確。

W3 重點整理

1. 假設應與方程式、風險和後續測試相連。
2. 運算／程式核證詢問所陳述的模型是否被正確求解；模型效度驗證詢問它是否足以達成既定目的。
3. 校準使用資料來設定參數，不應作為獨立的效度驗證來呈現。
4. 敏感度分析需要輸入範圍、輸出指標與決策後果。
5. 結構敏感度通常比重複擾動數值參數更能揭示資訊。
6. 不確定性應成為區間、概率、情境頻率或實務啟動條件。
7. 可信度是透過可追溯的證據贏得的，而非透過形容詞。

在 **W4**：建模報告的學術英語，我們會由證據架構轉向句子與段落控制：主張力度、審慎語氣、主動語態、方程式整合、銜接，以及常見翻譯問題。

附錄 A：假設追蹤表

假設陳述	理由 / 證據	模型後果	風險與計劃測試

附錄 B：模型效度驗證計劃矩陣

待測試論點	獨立證據	指標	比較對象	充分性規則

附錄 C：敏感度報告句式

- 將 [輸入] 從 [下限] 變為 [上限]，會使 [輸出] 從 [數值] 變為 [數值]，而 [決策] 保持不變。
- 當 [輸入] 約跨越 [閾值] 時，建議從 [A] 切換到 [B]。
- 在所有測試的輸入中，[參數] 對 [指標] 有最大的影響； $\pm X\%$ 的變化會產生 [輸出範圍]。
- 用 [替代方案] 替換 [模型假設]，表明對 [特徵] 存在結構敏感度，從而改變了 [輸出/決策]。
- 在 [數字] 個共同採樣的情境中，[決策] 在 [數字或百分比] 內是可行的；當 [條件] 發生時，失敗會主要發生。
- 數值輸出是敏感的，但排名保持穩定，因為 [邊際或閾值]。

附錄 D：把結果稱為穩健之前

請檢查報告是否陳述了以下內容：

- ☐ 輸入或假設有所變化；
- ☐ 合理範圍及其來源或理由；
- ☐ 輸出指標與基準值；
- ☐ 輸出中的數值變化；
- ☐ 是否改變了可行性、排名或建議；
- ☐ 考慮的交互作用或結構替代方案，以及相關材料；
- ☐ 測試所指向的實務閾值或應對措施。

附錄 E：本課使用的官方資源

- **COMAP HiMCM/MidMCM Tips Article**：強調假設及其理由、清晰的建模過程、敏感度、優劣勢、結論和可讀的呈現。
- **COMAP Problem Guidance Example**：說明可藉調整或移除假設來檢驗敏感度。
- **IM²C Mathematical Modelling Framework**：將建模呈現為一個涉及解釋、數學工作、評估和完善的循環過程。
- **IM²C Writing a Modelling Report**：強調清晰、完整的溝通，以便他人能夠評估和使用模型。

競賽特定的要求可能會改變。在每次競賽前，請重新檢查當前的官方規則和問題指示。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- GAIMME：數學建模教育的教學與評核指引（SIAM / COMAP）
- HiMCM / MidMCM 競賽指引（COMAP）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模競賽寫作課程

W4：學術英語——精確、連貫與證據

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本節兩小時課堂後，學生應能夠：

- 把學術寫作視為引導讀者檢視證據的工具，而非裝飾或逐字翻譯；
- 為每句分配清晰的修辭功能：主張、證據、解釋、限定或轉折；
- 運用主張-證據-解釋-含義的結構來建構段落；
- 根據可用證據的強度與範圍，校準動詞和限制詞；
- 根據資訊焦點而非習慣，選擇主動語態或被動語態；
- 對模型陳述、已完成的程序、報告的結果及建議，保持時態的一致性；
- 運用「已知-新資訊」次序、必要的重複與清晰指代建立連貫性；
- 把方程式、表格與圖納入完整論證；
- 在不刪除必要推理的情況下，修改冗長、模糊或翻譯式的句子；
- 辨認中文／粵語寫作者在英文中常見的語言轉移模式；
- 按照正確的順序執行整體層次、段落層級、句子層級和校對層次的校對；
- 產出一個精煉的競賽風格的結果段落，使其中每項主張仍可追溯至證據。

1 學術英語應協助讀者核查論證

科學寫作的價值不在於語氣有多正式，而在於讀者能否找到主張、辨認證據、理解推理，並看見結論的適用條件。複雜句式可以掩飾薄弱推理；簡潔而準確的句子反而會把推理缺口顯露出來。

啟動活動：相同結果，不同論述方式

下列三段英文都採用同一個示意性合成教學案例：四輛巴士、每日路線 87 公里、平均乘車時間由 43 分鐘降至 28 分鐘，以及乘客數超過 240 人時需要第五輛巴士。

A. “After a comprehensive and sophisticated analysis, our highly robust model perfectly determines an optimal arrangement of buses.”

B. “We used optimization. The answer is four buses. The result is good and can solve the problem.”

C. “The optimized plan uses four buses and 87 km of daily routes, reducing mean ride time from 43 to 28 minutes. Four buses remain feasible in 18 of 20 demand scenarios; a fifth is required when ridership exceeds 240.”

請在英文版本 C 中畫線標示主張、證據、比較與條件，再用中文說明：為何版本 A 語氣很有自信，提供的可核查資訊卻較少？

競賽英文的三項標準

1. 精確 (**Precise**)：數量、比較、條件和指代對象都清楚可辨。
 2. 可追溯 (**Traceable**)：讀者可以把主張對應至方程式、表格、圖、資料集或測試。
 3. 精簡 (**Economical**)：每句都履行必要功能；精簡不等於刪去證據或解釋。
- 正式詞彙並非必要；精確、可追溯與精簡才是必要條件。

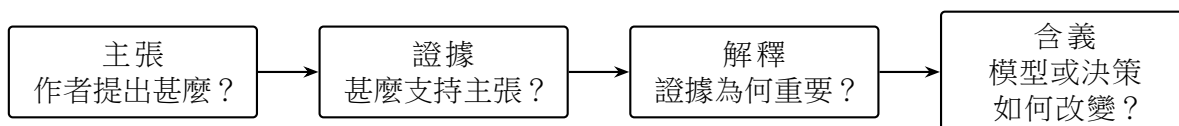


圖 1: 有力的段落先提出主張，再給證據、解釋證據，最後交代對建模或決策的含義。四項功能不一定各佔一句，但都應清楚可見。

檢查點：檢查點：資訊性還是僅僅正式性？

以下英文句子只有正式外殼，沒有實質資訊。請以指標、比較、條件或決策結果改寫。

1. “It is worth mentioning that our model is very effective.”
2. “A comprehensive analysis was conducted on the obtained results.”
3. “Figure 4 clearly shows an obvious trend.”
4. “Our method has strong practical significance.”

有用的修改應提供一個指標、比較、條件或決策的結果。

2 讓每句承擔一項功能

句子即使文法正確，若沒有清楚功能，仍會削弱段落。潤飾用字前，先判斷每句要完成甚麼工作。

五種常見的句子角色

角色	讀者問題	典型形式
主張 (Claim)	作者提出甚麼？	“The four-bus plan satisfies all baseline capacity constraints.”
證據 (Evidence)	甚麼支持這項主張？	“Maximum occupancy is 57 passengers against capacity 60.”
解釋 (Interpretation)	證據為何重要？	“The margin is small, so the plan may be fragile under demand growth.”
限定 (Qualification)	主張在哪個範圍或條件下成立？	“This conclusion applies to the observed 7:00–8:00 demand window.”
過渡 (Transition)	這如何帶出下一步？	“We therefore test higher-ridership scenarios in Section 7.”

例題 1：句子功能清晰可辨的段落

Claim. The four-bus solution is feasible but operates close to its capacity limit. **Evidence.** In the baseline assignment, the most heavily loaded bus carries 57 passengers against a capacity of 60. **In-**

terpretation. The three-seat margin is unlikely to absorb substantial enrollment growth or clustered absences from alternative routes. **Transition.** We therefore examine demand scenarios up to 260 riders before making the final recommendation.

這段英文依次呈現主張、量化證據、解釋與下一步行動，讀者不必猜測數字對決策的含義。

方法：句子功能審核

在草稿每句旁寫一個字母：C (主張)、E (證據)、I (解釋)、Q (限定) 或 T (過渡)。

- 只有 C 句的段落欠缺依據。
- 只有 E 句的段落只是堆砌資料。
- 沒有 I 句，讀者便要自行猜測建模含義。
- T 句過多，只會有路標而沒有內容。
- Q 句應該縮小主張，而不是使其難以理解。

模型檢視：一個段落，一個主導問題

每段應集中回答一個主要問題，例如：

- 為甚麼這個假設是合理的？
- 這個參數是如何估算的？
- 結果顯示了甚麼？
- 這個模型對於預期的決策是否足夠？
- 哪個參數改變了建議？

如果一段文字回答了兩個不相關的問題，請將其分開。如果兩個連續的段落回答了相同問題，請將它們合併或區分它們。

3 讓主張力度配合證據力度

審慎措辭 (hedging) 並非隨意插入 “perhaps” 或 “might” 等詞語，而是令主張的範圍與強度準確配合現有證據。

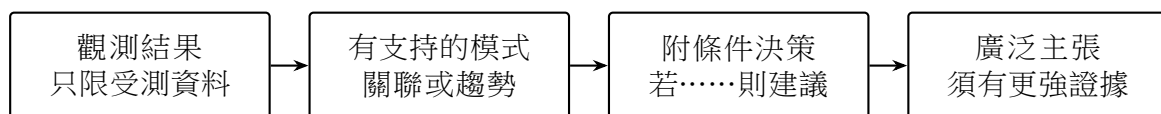


圖 2: 主張越廣泛、越接近因果斷言，所需證據便越強。競賽報告通常較能支持附有條件的建議，而不足以支持普遍斷言。

英文報告動詞的主張強度

動詞或短語	適當用法	範例
shows / gives	直接的數學或表格結果	“Equation (8) gives an early-review trigger of 236 projected riders.”
indicates / suggests	支持的模式但尚未普遍確立	“The scenario results suggest that route 3 is the main bottleneck.”
is consistent with	在不聲稱確認的情況下表示一致	“The estimate is consistent with the 2025 school count.”
supports	證據加強了主張但並未證明其真實性	“Held-out errors below 3 minutes support use for scheduling.”
recommends	在既定標準下得出的決策	“Under the tested scenarios, the model recommends four buses.”
proves / guarantees	只宜保留給數學證明或明確保證	對實證效度或現實世界的成效通常不恰當。

例題 2：過度主張、過度保留與恰當校準

過度主張 (**Overclaim**): “Our model proves that four buses are optimal for every future year.”

過度審慎表達 (**Over-hedge**): “The results might perhaps indicate that four buses could possibly be enough in some situations.”

校準 (**Calibrated**): “Under the observed road network and tested demand scenarios up to 240 riders, the shortest feasible plan found uses four buses and satisfies the capacity and ride-time constraints.”

校準後的英文句子交代了證據範圍、目標與約束，毋須依靠含糊副詞。

方法：以數值界定主張範圍

應優先寫出可量度的邊界，而不是使用含糊限定詞。

- “approximately 28 minutes” → “28.1 minutes after rounding to the nearest minute”;
- “fairly accurate” → “MAE 2.4 minutes on 12 held-out days”;
- “robust to demand” → “unchanged for total ridership from 205 to 240”;
- “usually feasible” → “feasible in 18 of 20 tested scenarios”;
- “small error” → 說明誤差，並解釋它為甚麼足以支持該項決策。

檢查點：檢查點：選擇最強辯護性動詞

請按證據力度，從 *shows*、*suggests*、*is consistent with*、*supports* 和 *proves* 中選擇一個。

1. 一個符號推導建立了目標是凸的。
2. 20 個情境的模擬在 16 個案例中使路線 3 達到容量極限。
3. 預測的計數 232 與外部學校計數 228 有差異。
4. 留出資料的 MAE 為 2.4 分鐘，低於 5 分鐘的排程容忍度。

4 以語態與時態控制資訊焦點

主動與被動不是互相競爭的寫作風格；兩者只是把不同資訊放在主語位置。

按寫作目的選擇語態

- 當團隊的選擇、解釋或責任十分重要時，使用主動語態：“We define,” “we exclude,” “we compare,” “we recommend.”。
- 當程序或對象應佔據主語位置，且施事者已知或不重要時，使用被動語態：“Travel times were estimated from GPS records.”。
- 不要用被動語態隱藏責任：“Three data points were removed”應改為“We removed three duplicated records”，並應說明標準。
- 當“we”變得重複時，應避免強迫使用主動語態：多個連續以“We”開頭的句子通常可以圍繞模型、資料或結果進行重新組織。

例題 3：按資訊焦點選語態，不作機械輪替

選擇：“We restrict the morning period to 7:00–8:00 because demand is approximately stationary within this window.”

程序：“Link travel times were estimated from 30 GPS runs and rounded to the nearest 0.1 minute.”

解釋：“We interpret the 2.4-minute held-out error as adequate because bus departures are scheduled at 5-minute intervals.”

結果焦點：“A fifth bus is required once total ridership exceeds 240.”

實用的英文時態系統

時態	主要用途	範例
現在時	方程式、圖表、一般模型特性、當前論點	“Equation (6) enforces capacity.” “Figure 4 shows the threshold.”
過去時	已完成的資料收集、擬合、模擬或實驗	“We collected 30 GPS runs and fitted the link times.”
現在完成時	先前的研究或持續到現在的變化；應謹慎使用	“Several studies have modeled school transport as a routing problem.”
未來／條件時	未來研究、實務結果或假設情境	“If ridership exceeds 240, the school will require a fifth bus.”

不要因為開始新句便轉換時態；只有時間位置或修辭功能改變時，才應改變時態。

模型檢視：自我指涉

“We” 通常最能清楚標示團隊作出的選擇。應避免以 “the authors,” “one,” 或 “it was decided” 掩蓋責任；讀者需要知道誰設定閾值、刪除記錄、選用方法或解釋結果。

5 以已知與新資訊建立段落連貫性

若每句都由讀者已有的資訊出發，再以需要強調的新資訊收結，段落便較容易連貫。這就是已知–新資訊原則。

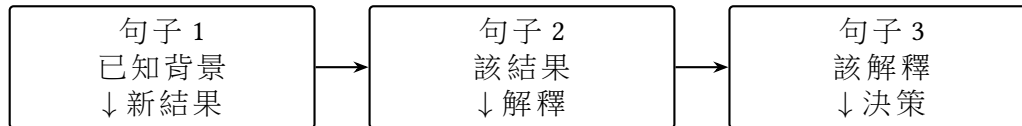


圖 3：讓前句以新資訊收結，後句再把它當作已知資訊接續，便可在毋須堆砌銜接詞下建立清晰指代鏈。

例題 4：連貫性斷裂與修正

連貫性斷裂：“The model minimizes total distance. Capacity is 60. We used 20 scenarios. Route 3 is important. A fifth bus may be needed.”

修正後：“The model minimizes total distance subject to a capacity of 60 passengers per bus. This capacity becomes binding on route 3 in 16 of the 20 demand scenarios. Because route 3 absorbs most enrollment growth, the four-bus plan fails once total ridership exceeds 240. We therefore begin an early fleet review at 236 projected riders and add a fifth bus from 241 confirmed riders.”

方法：毋須刻意換同義詞也能建立連貫性

- 當指代相同對象時，重複相同的技術術語。不要僅僅為了避免重複而輪流使用 “model”、“framework”、“mechanism” 和 “scheme”。
- 使用名詞短語而非指向不明的代詞：上文有多個可能所指時，“This threshold” 會比 “This” 清楚。
- 在對比發生的地方使用對比：“The analytical estimate is 15.8 minutes, whereas the simulation estimate is 16.1 minutes.”
- 只有句子結構未能清楚顯示邏輯關係時，才加入銜接詞。
- 保持符號穩定。符號的改變是連貫性的失敗，而不僅僅是數學錯誤。

檢查點：檢查點：修復指代鏈

修改以下內容，使每一個 “this”、“it” 和 “they” 都有一個單一清晰的指代對象：

“The demand estimate was compared with the route plan, and it was inaccurate. This affected it, so they were changed. This shows the model should be improved.”

6 把方程式與圖表納入論證

一個方程式、表格或圖表不會自行解釋。前後正文應告訴讀者它為何出現、哪種模式重要，以及該模式如何改變建模決策。

在正文解讀圖表的四個步驟

在介紹表格或圖表時：

1. 目的 (**Purpose**): 說明圖表回答甚麼問題。
2. 指引 (**Reference**): 引導讀者找到正確的圖或表。
3. 模式 (**Pattern**): 識別重要的比較、趨勢或閾值。
4. 含義 (**Implication**): 把模式連接至模型或建議。

不要僅僅寫 “The results are shown in Figure 3.”

例題 5：把方程式寫進完整句子

弱：

$$D = \sum_{i,j} d_{ij} x_{ij}.$$

“This is our objective function.”

更強：“We minimize total daily route length,

$$D = \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij}, \quad (1)$$

where d_{ij} is the distance from stop i to stop j and $x_{ij} = 1$ when that link is used. The objective in Eq. (1) penalizes unnecessary detours but does not by itself control ride-time equity; we impose that requirement separately as a constraint.”

英文句子先引入方程式，再以標點把它納入句法，並定義符號、解釋模型含義。

例題 6：表格評論應提供額外資訊

弱：“Table 4 shows the sensitivity results. It can be seen that demand changes the answer.”

更強：“Table 4 compares the recommended fleet size across demand scenarios. The four-bus plan remains feasible up to 240 riders but fails at 245 because route 3 exceeds capacity. Demand therefore changes the decision discontinuously at a clear operational threshold rather than gradually across the entire range.”

方法：報告可供核查的數字

- 包含單位和比較基準：例如 “28 minutes, down from 43,”，而不僅僅是 “28。”
- 表達分母：例如 “18 of 20 scenarios,”，而不是當情境數量很重要時寫 “90%”。
- 只保留資料所支持的精度。把乘車時間建議寫成 28.137846 分鐘便過度精確。
- 區分估計與目標或約束：預測等待時間、所需等待時間和允許的最大等待時間是不同的量。
- 將條件放在數字旁邊：“MAE 2.4 minutes on 12 held-out days.”
- 只有在配對次序十分清楚時才使用 “respectively”（分別）；拆成兩個子句通常更易閱讀。

模型檢視：避免沒有資訊的圖表評論

諸如 “as can be clearly seen,”、“obviously,” 和 “the figure below” 等措辭很少能增加資訊。應點明圖表編號、陳述模式，並解釋其後果。若正文逐一重複表格內的數字，便應改為概括讀者真正需要留意的比較。

7 精簡文字，但保留推理

精簡是壓縮語言，同時保留主張、證據、解釋與限定條件；頁數緊張並不是刪除證據的理由。

六種有效的英文精簡方法

草稿模式	修訂
“In order to” / “due to the fact that”	使用 “to” / “because.”
“We conducted an analysis of”	使用動詞: “We analysed.”
重複的措辭: “It should be noted that”	刪除它並陳述事實。
用逗號和 “which” 連接的幾個動作	為每個主要動作單獨組成一個句子或直接使用動詞進行協調。
空泛形容詞: “robust,” “effective,” “significant”	用指標、比較或決策邊界替換。
冗長的名詞鏈: “route demand growth threshold analysis”	使用介詞重構: “analysis of the demand threshold for route growth.”

例題 7：句子手術

草稿: “In order to carry out the validation of the model, we conducted a comparison of the predicted travel time results with the actual observed travel time data, which were collected by us during twelve different school days.”

修訂: “We validated predicted travel times against GPS observations from 12 school days.”

此英文修訂把字數由 37 個減至 12 個，同時保留了動作、目標、比較對象、來源和樣本數。

中文 / 粵語寫作者常見的英文語言遷移模式

這些只是語言遷移傾向，並非寫作者本身的缺點；把模式明確列出，便可有系統地檢查英文。

1. 欠缺明確主語的主題——評論開首: “For our model, the assumption is important.” → “Our model relies on this assumption.”
2. 逗號串連句: 分開多個獨立動作或使用協調動詞。
3. 重複的 “**which**”: 用直接動詞或分開的句子替換關係子句鏈。
4. 籠統銜接詞: “Besides” → “In addition,” “However,” 或根據邏輯不使用銜接詞。
5. 冠詞和數的一致問題: 檢查每一個單數可數名詞和每一個複數技術術語。
6. 名詞堆疊式翻譯: “make a determination of” → “determine.”
7. 不清楚的 “**this**”: 使用 “this error,” “this threshold,” 或 “this comparison.”
8. 過度使用 “**can**”: 區分數學可能性、實證傾向和建議。

例題 8：把受語言遷移影響的段落改成科學英文

草稿: “For the route result, we can see that it has a relatively good performance, and besides, the average time is decreased, which can prove our method is effective, which is very meaningful for the school.”

修訂: “The optimized routes reduce mean ride time from 43 to 28 minutes. This 15-minute reduction meets the school’s 30-minute target, supporting use of the plan for the current demand level.”

8 整合案例：潤飾巴士論證

以下沿用 W2 與 W3 的示意性合成巴士案例，把同一組證據改寫成連貫而可供發表的英文段落。

例題 9：原始草稿

“We use genetic algorithm to solve this bus problem. The algorithm gives four buses, which has 87 km route. It makes the time become 28 minutes from 43 minutes, so it is very good. In order to prove our model, we compare the data, and the error is only 2.4 minutes. Besides, after doing many sensitivity tests, we can know that the result is robust, but when the number is more than 240, it needs five buses. Therefore our model can effectively solve the school problem.”

工作坊：重寫前先診斷

請在英文初稿標出至少八個問題，包括：

- 一個語法問題；
- 一個未經支持或過於強烈的動詞；
- 一個缺失的條件；
- 一個不清楚的參考；
- 一個證據/解釋的差距；
- 一個時態或語態問題；
- 一個銜接問題；
- 一個可以縮短的措辭。

先理清段落主張與證據次序，才逐句修訂。

例題 10：可直接用於競賽報告的修訂

We solve the capacitated school-bus routing problem using a genetic algorithm with route length as the primary objective and capacity and ride time as constraints. The best solution found uses four buses and 87 km of daily routes, reducing mean student ride time from 43 to 28 minutes. On 12 held-out school days, predicted route times have a mean absolute error of 2.4 minutes, which is below the school's 5-minute scheduling tolerance. The four-bus decision remains feasible in 18 of 20 demand scenarios; however, route 3 exceeds capacity when total ridership rises above 240. We therefore recommend four buses for current enrollment, an early review at 236 projected riders, and a fifth bus from 241 confirmed riders.

修訂段落的句子功能

1. 方法和模型的範圍。
2. 帶有基準比較的標題結果。
3. 模型效度驗證以及預期的應用解釋。
4. 敏感性邊界和失效機制。
5. 有條件的建議和實務啟動條件。

段落精簡，是因為每句功能不同，不是因為刪去了證據。

分層寫作工作坊

核心路線。運用上述五種功能，改寫一個六句的結果段落。保留所有數字和條件。

挑戰路線。為巴士案例寫出兩個段落版本：一個放在摘要，一個放在結果部分。解釋哪些細節應留在正文，以及原因。

延伸路線。加入一項限制：GPS 觀測僅涵蓋正常交通。修改建議，使其在道路封閉或嚴重擠塞期間仍有參考價值，同時不誇大模型表現。

9 依四輪次序修訂

論證尚未穩定便校對文法，只會浪費時間。修訂應由整體問題逐步收窄至細節。

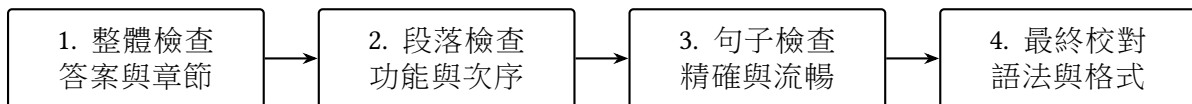


圖 4：由整體邏輯逐步檢查至表層正確性。一句潤飾的句子無法修復遺失的結果或不受支持的建議。

方法：四輪檢查

1. 整體檢查–覆蓋範圍。本節是否回答了原定問題？是否包含核心結果、證據、限制和決策？
2. 段落檢查–邏輯。每個段落是否包含一個主導問題以及一個可見的主張–證據–解釋順序？
3. 句子檢查–精確度。主語、動詞、指代、單位、比較、條件和報告動詞是否準確？
4. 最終校對–文字與一致性。檢查文法、冠詞、複數、拼寫、符號、方程式／圖表引用、標點、大寫和格式。

切勿僅執行第 4 輪檢查。

模型檢視：工具輔助修訂

文法檢查器和語言模型可以提出更清楚的表達方式，但不得編造證據、更改數字、加強主張或改變技術含義。可以用它們產生候選寫法，惟每項修改都必須回到模型、資料和預定適用範圍逐一核對，並遵守相關競賽的工具使用及披露要求。

檢查點：課末檢核

重寫你目前專案中的一個段落並提交：

1. 原始段落；
2. 句子角色標籤；
3. 修改後的段落；
4. 一個你削弱或加強的主張以及基於證據的理由；
5. 一個被刪除的詞組以及它不必要的理由。

10 核心練習與重點整理

核心練習 1：角色修復

以下段落包含主張和證據，但缺乏解釋或決策的連結。在不重複數字的情況下，添加兩句話。
 “The baseline simulation gives a mean wait of 7.8 minutes. With a second server, mean wait falls to 2.6 minutes. The 95th-percentile waits are 21.4 and 6.9 minutes, respectively.”

核心練習 2：主張校準

重寫每一項主張，使其與證據允許的強度相符。

1. 證據：在 20 個情境中，有 18 個支持相同的決策。主張：“The decision is always robust.”
2. 證據：在一個觀察性資料集中，相關係數 $r = 0.81$ 。主張：“Temperature causes demand.”
3. 證據：一個凸性證明。主張：“The numerical solver probably found a minimum.”
4. 證據：在 5 分鐘容忍度下，留出資料的平均絕對誤差 (MAE) 為 2.4 分鐘。主張：“The model is perfect.”

核心練習 3：視覺評論

就一個敏感度表撰寫三句話：

1. 確定輸出影響最大的參數；
 2. 確定改變決策的第一個參數；
 3. 陳述這些發現所指向的測量或實務行動。
- 不要重複表格中的每一個單元格。

建模—寫作挑戰

從一篇已完成的建模論文中選取 150–220 字的段落。完成全部四輪修訂，並提供一個包含以下欄位的簡短審核表：

發現問題	所做的修改	使用的證據或原理
------	-------	----------

目標不是把字數減至最低，而是寫出一段每項主張都可追溯、每句都有明確功能的文字。

W4 重點整理

1. 學術英語引導讀者檢視證據，不能裝飾薄弱推理。
2. 讓每句承擔一項功能，並讓每段回答一個主導問題。
3. 令主張強度配合證據強度；應以量化邊界取代含糊限定詞。

4. 根據資訊焦點和責任選擇主動語態或被動語態。
5. 透過已知-新資訊的順序和穩定的技術術語來建立連貫性，而非過多的銜接詞。
6. 引入方程式和圖表、辨認模式，並說明它對建模的含義。
7. 由整體邏輯、段落到句子逐層修訂，最後才校對文字與格式。
8. 清晰、可量度而可追溯的英語，勝過浮誇的正式語氣。

在 **W5**：圖表、表格與 **LaTeX** 工作流程中，我們會由文字證據轉向視覺證據：如何設計能承載論點的圖表和表格、把它們納入報告，並建立可靠的提交流程。

附錄 A：按修辭功能分類的英文句式

功能	有用的句子框架
定義範圍	“We restrict the analysis to... because...”；“The model applies when...”
引入方法	“To estimate X, we...”；“We formulate the problem as...”
陳述結果	“The model gives...”；“The optimized plan uses...”
比較	“Compared with the baseline,...”；“Whereas Model 1..., Model 2...”
解釋	“This pattern indicates...”；“The difference matters because...”
限定	“Under the tested scenarios,...”；“Within the observed range,...”
驗證	“On held-out data,...”；“The estimate is consistent with...”
報告敏感度	“The decision remains unchanged until...”；“The recommendation switches when...”
建議	“We therefore recommend... provided that...”；“If X exceeds..., then...”
限制	“This conclusion does not cover...”；“The main limitation is...”

附錄 B：常用精簡替換

長或弱形式	首選形式
in order to	to
due to the fact that	because
conduct an analysis of	analyse
make a comparison between	compare
it should be noted that	delete, or “Note that” when essential
a large number of	many, or give the number
has the ability to	can
with regard to	regarding / about / on
according to the above results	the results / Table X / Eq. (Y)
we can clearly see that	the figure shows / the data indicate
very robust / highly accurate	state range, error, scenario count, or threshold
prove the real-world model	support / validate for the intended use
obtain the result of	obtain / estimate / compute
carry out the calculation of	calculate
make use of	use

附錄 C：段落檢核表

對於每一段落，請完成以下內容：

1. 主導問題：本段落回答了哪一個單一讀者問題？
2. 主張：本段最強烈的斷言是甚麼？
3. 證據：哪個數字、方程式、圖、來源或測試支持它？
4. 解釋：證據為何重要？
5. 範圍：該主張在甚麼條件下適用？
6. 含義：下一步應作出哪項模型選擇、限制或決策？
7. 連貫性：每一句話是否都從讀者已有的資訊出發？
8. 文字：主語、動詞、指代對象、單位與交叉引用是否清晰正確？

附錄 D：最終語言檢核表

- ☐ 每段都有一個主導問題。
- ☐ 每項主要主張後都有證據或證據引用。
- ☐ 解釋不完全留給讀者。
- ☐ 報告動詞與證據強度相符。
- ☐ 條件和限制位於其所限定的主張附近。
- ☐ “This”、“it” 和 “they” 都有明確的指代對象。
- ☐ 方程式已被引入、妥善加上標點，並獲得解釋。
- ☐ 正文中的圖表說明指出了重要模式和含義。
- ☐ 數字包含單位、基準線、分母和適當的精度。
- ☐ 空泛形容詞與客套短語已被移除。
- ☐ 技術術語和符號保持一致。
- ☐ 最終校對過程未改變數學含義或證據。

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核			
目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- 組織研究文章（IEEE Author Center）

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則
封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。

數學建模競賽寫作課程

W5：視覺證據、LaTeX 與提交工程

Kenneth Sok Kin Cheng

修訂日期：2026 年 8 月 20 日

學習目標

完成本節兩小時寫作課後，學生應能夠：

- 把方程式、表格、圖、圖說與頁面編排視為證據論證的一部分，而非裝飾；
- 按讀者需要，有意識地選擇正文、方程式、表格、統計圖、示意圖、地圖或演算法展示；
- 建立清晰的頁面層次，同時支援快速掃讀與仔細核查；
- 排版方程式時妥善處理定義、標點、編號和交叉引用，使其在修訂期間保持穩定；
- 設計具備單位、適當精度、不確定性及明確比較基準的表格；
- 選擇配合分析問題的統計圖類型，並避免誤導性的坐標軸、編碼與尺度；
- 撰寫完整圖說，說明圖中內容及編碼、點出主要發現，並連接至決策；
- 區分可重現的製圖流程與最後階段的手動格式調整；
- 組織一個可獨立編譯、適合 Overleaf、檔名可預測且不依賴脆弱外部資源的 LaTeX 專案；
- 在開始寫作前制定頁數預算與特定競賽的規則卡；
- 執行內容、視覺、技術、匿名、來源及提交前檢查；
- 把一項建模結果整理成可供競賽使用的一頁內容，當中包含文字、數學、視覺呈現及決策陳述。

1 視覺呈現是證據主張，而非裝飾

讀者不會直接看見團隊的計算過程；他們看見的是團隊放在頁面上的一連串經過選擇的元素：句子、方程式、表格、統計圖、圖說及文獻引用。每個元素都應協助讀者回答以下三個問題之一：

1. 團隊建立了甚麼模型，或計算了甚麼？
2. 有甚麼證據支持這項主張？
3. 證據導向哪項決策？

因此，經過潤飾的頁面不只是美觀，而是讓讀者核查論證的介面。

啟動活動：相同證據，不同頁面

兩份草稿均報告同一個示意性合成校巴案例：四輛巴士、每日路線 87 公里、平均乘車時間由 43 分鐘降至 28 分鐘，以及乘客數超過 240 人時需要第五輛巴士。

草稿 A 包含一段密集文字、一張沒有標示的螢幕截圖，以及欄名只有“A”、“B”和“C”的表格。

草稿 B 先陳述核心結果，再展示附有單位的路線時間比較、標示 240 人的門檻，並用圖說解釋該門檻為何重要。

請二人一組，列出草稿 A 中「技術上存在、實際上卻難以取得」的證據；再辨認草稿 B 哪些頁面特徵，能在不改變數學內容下加快核查。

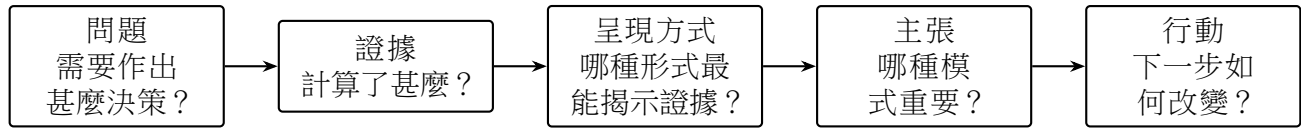


圖 1: 視覺證據鏈。只有當呈現形式揭示主張所需的證據，而主張又能支持決策時，視覺呈現才算成功。

視覺傳達準則

競賽中的視覺呈現應具備以下特質：

1. 必要 (**Necessary**)：它比單靠文字更有效地回答問題。
2. 可解讀 (**Interpretable**)：標籤、單位、符號、尺度及編碼均有定義。
3. 可追溯 (**Traceable**)：正文會引用它，而視覺呈現可連接至資料、方程式或程式碼。
4. 誠實 (**Honest**)：尺度及資料選擇不會誇大或隱藏差異。
5. 連接決策 (**Decision-connected**)：圖說或前後正文會說明該模式為何重要。

2 先選擇呈現方式，再處理格式

常見錯誤之一，是因為某種圖表看起來吸引而選用它。正確的選擇應從讀者需要完成的任務出發。

按讀者任務選擇呈現方式

讀者任務	通常採用	理由
理解一項關係	方程式配合正文	顯示變量、假設及數學結構。
比較精確數值	表格	保留數值、單位、排名及門檻。
觀察趨勢或形狀	折線圖／散點圖	顯示方向、曲率、群集及偏離。
比較類別	已排序的點圖／棒形圖	由共同基準線比較大小。
理解一項程序	流程圖或狀態圖	顯示次序、依賴關係、狀態或資訊流。
理解地理／網絡	地圖或網絡圖	保留位置、連通性與路線結構。
檢視不確定性	區間圖、分布圖、扇形圖	顯示範圍、變異或概率，而非單一估計。
追蹤演算法	偽代碼或編號步驟	在不暴露實作細節下，讓邏輯可供審核。

方法：呈現方式測試

製作視覺呈現前，請完成以下四句：

1. 讀者需要比較／定位／理解／決定_____。
2. 證據包括_____。
3. _____ 比純文字合適，因為_____。

4. 看過之後，讀者應得出_____這項結論。

若無法完成第 4 句，這項呈現便沒有清楚的分析目的。

例題 1：表格還是圖？

假設我們以總距離、最長乘車時間、運算時間及違反約束次數，比較五種路線規劃方法。

- 若讀者必須查閱四項精確指標，並判斷每種方法是否符合門檻，應使用表格。
- 若論點集中於一項權衡，例如總距離與最長乘車時間之間的關係，應使用圖。
- 只有兩者功能不同時才同時使用：圖揭示權衡，精簡表格則記錄所選方法的確切數值。把同一組資料重複兩次，只會消耗頁數預算。

檢查點：檢查點：作出選擇，不作裝飾

為每項情況選擇一種呈現方式，並說明理由。

1. 四個模型，各有 MAE、RMSE 及訓練時間。
 2. 連續四小時、每分鐘記錄一次的隊列長度。
 3. 一項包含六個階段的模擬程序。
 4. 18 個學校站點之間的路線連接。
 5. 需求超過 240 人時會改變的建議。
- 答案可以不只一個，但必須明確指出讀者任務。

3 設計方便掃讀與核查的頁面

競賽讀者會在兩種模式之間切換。在掃讀模式中，他們尋找核心答案、章節目的、關鍵視覺呈現及圖說；在核查模式中，他們檢視定義、方程式、數值細節及限制。好的頁面應同時支援兩種模式。

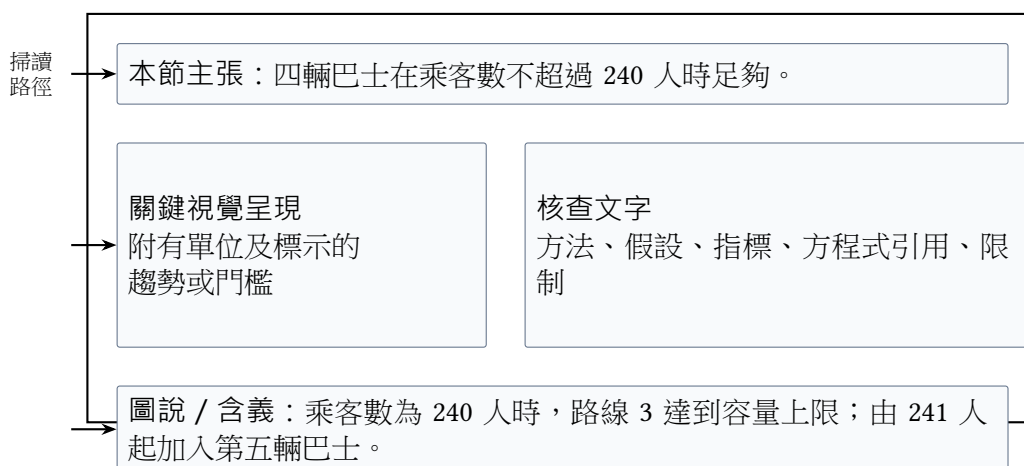


圖 2: 同時支援兩種閱讀模式的頁面層次。本節主張與圖說構成掃讀路徑；視覺呈現與解釋文字則支援深入核查。

方法：頁面層次

以意義建立層次，而非依靠裝飾。

1. 在合適時採用以主張為本的標題：“Demand uncertainty changes the fleet decision” 比 “Sensitivity Analysis” 提供更多資訊。
2. 把關鍵視覺呈現放近首次引入它的段落，避免圖表與正文相隔數頁。
3. 只把少數對決策關鍵的結果加粗，不要把整段文字都設為粗體。
4. 統一標題層級；一篇論文很少需要超過三層標題。
5. 在章節及視覺呈現周圍保留留白，不要以文字填滿每一厘米。
6. 全文採用一致的視覺語法：字體、線寬、圖說格式、小數精度及符號。

模型檢視：不要把頁面密度當作數學深度

縮小頁邊、字體、圖說或統計圖，不會令解答更有力，反而會增加尋找資訊的成本，甚至違反規則。應透過刪除重複內容、壓縮推導及優先保留決策證據來控制頁數，而不是把論文變得難以閱讀。

4 方程式必須在句子中發揮作用

方程式不會自行解釋。正文應說明為何引入它、定義當中符號，並解釋它代表真實系統的哪項特徵。

方法：目的-方程式-定義-解釋

可靠的方程式段落包含四部分：

1. 目的：正在為哪個量或機制建模？
2. 方程式：展示關係；若稍後會引用，便為它編號。
3. 定義：在首次使用附近定義所有新變量、參數、索引及單位。
4. 解釋：說明方程式捕捉了甚麼；合適時亦交代它省略了甚麼。

例題 2：可讀的模型方程式

為評估一套路線規劃，我們把總距離與違反容量限制的懲罰結合：

$$J(\mathcal{R}) = \sum_{r \in \mathcal{R}} d_r + \alpha \sum_{r \in \mathcal{R}} \max\{0, n_r - C\}, \quad (1)$$

其中 $\mathcal{R}$ 是巴士路線集合， d_r 是路線 r 的距離（公里）， n_r 是獲分配的乘客數， $C = 60$ 是巴士容量，而 α 是以「公里／超額乘客」為單位的懲罰係數。第一項鼓勵較短路線；第二項令違反容量限制的代價提高。由於 α 是建模選擇而非量得的物理常數，我們會在敏感度分析中檢驗其影響。

方程式與符號規則

- 只為稍後會引用或構成推導一部分的方程式編號。
- 採用 `eq:route-objective` 等穩定標籤，不要手動輸入編號。

- 引用 `equation (1)`，不要寫「上面的方程式」。
- 不要以同一符號表示不同概念。若 r 表示路線索引，稍後便不要再用 r 表示增長率。
- 一個量首次出現時應說明單位，並保持量綱一致。
- 把展示方程式視為句子的一部分，妥善加入標點。
- 若正文只需模型設定與結果，便把冗長的代數運算移至附錄。

Listing 1: 穩定的方程式與交叉引用寫法。

```
To penalize infeasible routes, we define
\begin{equation}
J(\mathcal{R}) = D(\mathcal{R}) + \alpha V(\mathcal{R}),
\label{eq:objective}
\end{equation}
where  $D$  is total distance and  $V$  is the number of
capacity violations. As shown in \cref{eq:objective}, ...
```

檢查點：檢查點：修正方程式段落

“We use the following formula: $Q = ab/c$. Here are the results.”

請改寫，使讀者知道 Q 的用途、 a, b, c 的含義與單位、此形式的來源，以及計算值的含義。

5 表格應揭示比較與門檻

當精確數值很重要時，表格最能發揮作用。設計應直接顯示預定的比較，毋須讀者先破解格式。

方法：表格設計檢核表

1. 在表說中提出比較問題。
2. 把單位放在欄標題，並定義評估資料集或情境。
3. 數值應一致對齊；小數位應有意義，而非越多越好。
4. 若決策取決於比較，便加入基準、目標、容忍度或標竿。
5. 若數值是估計量而非精確常數，應顯示不確定性。
6. 按分析意義排列各列，例如時間次序、排名、模型複雜度或影響程度。
7. 以註腳交代例外，不要在儲存格內放入沒有解釋的符號。
8. 不要重現所有原始輸出；只選取支持主張所需的證據。

例題 3：決策表

表 1: 不同乘客數情境所需的車隊規模。四輛巴士在乘客數不超過 240 人時仍然可行；超過該門檻後，建議改用五輛巴士。

乘客數	所需巴士	最大載客量	決策解讀
220	4	54	四輛巴士可行，尚餘六個座位。
230	4	57	可行，但後備容量有限。
240	4	60	容量邊界；須監察報讀人數。
250	5	51	須加入第五輛巴士以恢復容量餘裕。
260	5	54	五輛巴士方案仍然可行。

這張表支持附有條件的建議，而非「四輛巴士很穩健」這種含糊說法。

精度是主張的一部分

只報告資料與方法所能支持的精度。

- 若輸入的行車時間只記錄至最接近的整分鐘，把通勤時間估計寫成 28.37 min 便暗示虛假精度。
- 說明比較基準與樣本後，2.1% 的相對誤差才容易解讀。
- 只有平均值而沒有離散程度，可能掩蓋不穩定性；可考慮報告範圍、標準差、置信區間或情境數目。
- 百分比需要比較基準：應寫「比基準的四路線方案低 12%」，而非只寫「低 12%」。

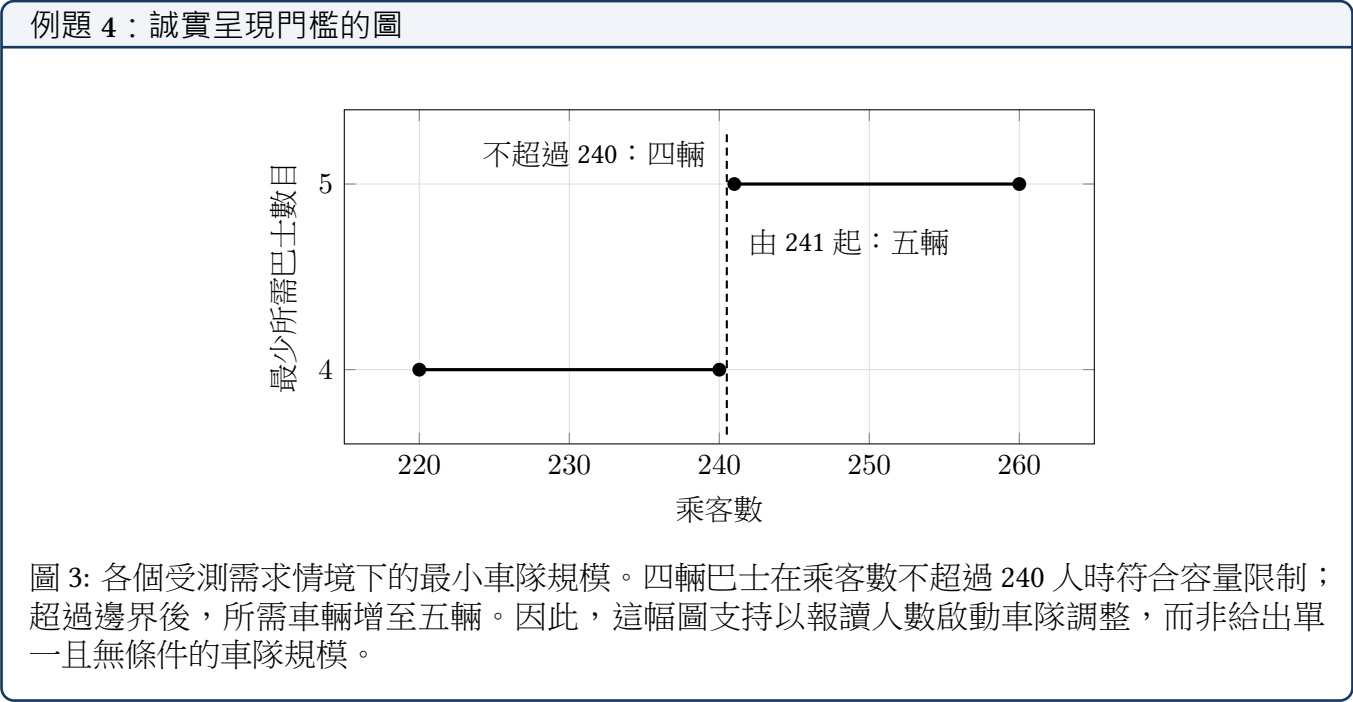
模型檢視：表格常見失敗

避免垂直線、迷宮式合併儲存格、過小字體、未解釋縮寫、每格重複單位、小數位不一致，以及每列都加粗。這些做法令表格顯得繁雜，卻沒有改善比較。

6 每幅圖只回答一個分析問題

圖能有效呈現模式、關係、不確定性及空間結構。若團隊先看過結果，才選出最能令結果顯得亮眼的編碼方式，圖便可能誤導讀者。

按分析問題選擇統計圖		
問題	首選呈現方式	應顯示的內容
一個量如何隨時間改變？	折線圖	時間單位、介入標記；若數值是估計量，亦應顯示不確定性。
兩個變量是否相關？	散點圖	個別觀測值、擬合關係、殘差／不確定性資訊。
哪個類別較大？	已排序的點圖／棒形圖	若主張涉及大小，應採用共同的零基準線。
決策門檻在哪裏？	附門檻的折線圖／階梯圖	邊界值、可行與不可行範圍、建議改變方向。
輸出有多大變異？	直方圖、密度圖、區間圖、箱形圖	樣本量、中心、離散程度、尾部及相關目標。
兩個參數如何互動？	等高線圖／熱圖	圖例、尺度、可行範圍、所選運作點。
系統如何連接？	網絡圖或狀態圖	節點／邊的含義、方向、權重及所選路徑／狀態。



- 方法：圖像誠信審核
- 匯出圖檔前，請回答六個問題：
1. 坐標軸、單位、類別、符號及樣本量是否已有定義？
 2. 尺度能否顯示模式，又不誇大差異？
 3. 若線或點是估計值，是否已顯示不確定性？
 4. 曲線或類別在灰階下是否仍可區分？
 5. 重要比較是否直接可見，抑或讀者要自行心算相減？
 6. 圖說有否陳述主要發現及其決策含義？

模型檢視：常見的誤導選擇

- 截短棒形圖坐標軸，以放大微小差異。
- 採用雙 y 軸，透過任意縮放製造表面相關。
- 以線連接沒有次序的觀測值。
- 只顯示擬合曲線，隱藏原始觀測值。
- 以圓形圖呈現很多數值接近、實際上需要精確比較的類別。
- 採用灰階下次序不明的彩虹色階。
- 把單一模擬路徑當成所有可能結果的分布。

檢查點：檢查點：圖說手術

改寫“Figure 5. Results of the simulation.” 完整圖說應回答：

1. 展示了甚麼，屬於哪個情境？
2. 線、點、陰影或分面分別編碼甚麼？
3. 主要數值或結構發現是甚麼？
4. 它帶出哪項模型或決策含義？
5. 讀者應記住哪項條件或限制？

7 建立可重現的文件，而非脆弱的成品

文件應能由原始檔重新生成。手動複製、未命名的螢幕截圖，以及在最後階段直接修改 PDF，都會破壞可追溯性並造成不一致。

方法：可靠的專案結構

```
project/
|-- main.tex
|-- references.bib
|-- sections/
|   |-- 01_introduction.tex
|   |-- 02_model.tex
|   |-- 03_results.tex
|   '-- 04_validation.tex
|-- figures/
|   |-- fleet_threshold.pdf
|   '-- route_map.pdf
|-- data/
|   '-- processed_routes.csv
|-- code/
|   |-- build_tables.py
|   '-- make_figures.py
'-- submission/
    '-- CONTROLNUMBER.pdf
```

每張最終表格或圖都應有明確來源。原始資料應與經處理資料分開，而提交用 PDF 亦應與工作檔分開。

可重現的製圖流程

1. 保存已清理資料或有文件說明的輸入。
2. 以有明確名稱的程式或穩定的 TikZ 區塊生成圖。
3. 線條圖應盡可能匯出成向量 PDF；只有本質上屬於像素影像的內容，才使用高解像度點陣圖。
4. 以受控寬度插入匯出的檔案。
5. 記錄生成圖檔的程式、參數、日期或 commit。
6. 數值改變後重新生成所有視覺呈現；不要事後手動修改標籤。

Listing 2: 簡短而穩定的插圖寫法。

```
\begin{figure}[tbp]
  \centering
  \includegraphics[width=0.78\textwidth]{figures/fleet_threshold.pdf}
  \caption{Minimum fleet size across tested demand scenarios. ...}
  \label{fig:fleet-threshold}
\end{figure}
```

As shown in \cref{fig:fleet-threshold}, the decision changes ...

模型檢視：TikZ 與競賽可靠性

TikZ 很適合製作小型數學示意圖，尤其當圖中文字需要與論文字體一致時；但它不會自動成為所有地圖、網絡圖或數據圖的最佳工具。複雜 TikZ 會拖慢編譯，亦難以在限時環境下修復。建議：

- 只以 TikZ 製作簡單、節點位置固定的示意圖；
- 由程式生成資料圖，再匯出為 PDF；
- 若圖例或外置標註更清楚，不要靠反覆試位把標籤疊在曲線上；
- 每次大幅修改視覺元素後，都應檢查實際渲染頁面。

能夠編譯的圖，不一定能有效傳達資訊。

交叉引用與參考文獻

- 為每個被引用的方程式、表格、圖及章節加上標籤。
- 使用 \cref 或同類命令，不要直接輸入編號。
- 把文獻引用放在它所支持的主張附近，不要在段落末堆放一系列無直接關係的引用。
- 按需要記錄作者、標題、年份、出版社／期刊、DOI或穩定來源，以及查閱日期。
- 全文只採用一種引用格式；一致性比選擇 APA 還是 IEEE 更重要。
- 檢查每項引用均出現在參考文獻，而每項參考文獻亦確實在正文被引用。

來源與 AI 使用披露

提交材料應清楚交代資料、程式碼、圖像、外部文字及 AI 輔助工作的來源。競賽規則會改變，團隊必須閱讀指定年份及輪次的官方指引。例如，2026 年 HiMCM 指引要求使用 LLM 或其他 AI 工具的團隊說明模型及用途，在報告正文與參考文獻引用該項使用，並另附 AI 使用

報告。提交披露報告不等於完成核查；團隊仍須逐項核對生成的陳述、引用、計算及程式結果。

8 提交工程在競賽開始前已經展開

提交失敗往往源於流程，而非數學。團隊應在建立樣板前，先把官方規則整理成一頁規則卡。

方法：建立競賽規則卡

只記錄當年、當輪官方指引列出的資料：

- 紙張大小、最低字體大小、最小頁邊、語言及匿名要求；
- 必須放在最前的頁面、信件、圖像或摘要表；
- 頁數限制，以及目錄、參考文獻、附錄及 AI 報告是否計入；
- 指定頁首／頁尾、隊號及頁碼；
- 接受的檔案格式、大小限制、檔名及上傳數目；
- 停止工作時間、提交期限、時區，以及誰可以提交；
- AI 使用、資料、程式碼及外部資源的披露規則。

不要抄用另一項競賽或另一年的規則卡。例如，2026 年 HiMCM 把 Summary Sheet、解答、參考文獻及附錄合計限制為 25 頁，而規定提交的 AI 使用報告則附在該限制以外。IM²C 的要求可能隨輪次及題目而異，因此亦必須查閱官方題目說明。

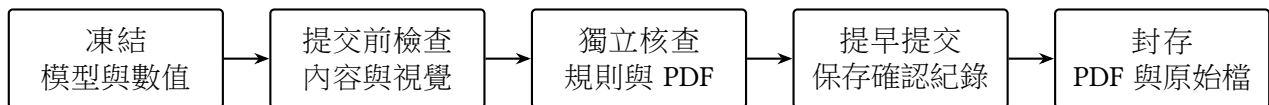


圖 4: 提交工程是一條受控流程。除非為修復關鍵錯誤，凍結後不應再加入新分析。

方法：六方面提交前檢查

1. 內容：已回答所有任務；核心結果在摘要、正文、表格與結論中一致。
2. 數學：已定義符號、統一單位，並交叉核對方程式、程式輸出與表格。
3. 視覺：圖說完整；標籤以最終頁面大小顯示時仍可讀；沒有重疊、裁切或未解釋編碼。
4. 技術：編譯紀錄乾淨；沒有未解析交叉引用；頁數正確；PDF 可在另一裝置開啟。
5. 合規：符合匿名、頁首、檔名、AI 披露及最新規則卡要求。
6. 提交：使用正確平台及檔案；在期限前確認上傳；保存確認紀錄。

模型檢視：最後一小時應避免的做法

不要加入新模型、在沒有重新編譯下全域更換符號、從聊天截圖貼上圖像、手動重建參考文獻、在沒有檢查字形下壓縮 PDF，或留待最後數分鐘才上傳。團隊應提交已核查的最佳版本，而非最新但未核查的版本。

9 綜合工作坊：製作一頁可供競賽使用的結果

沿用 W2-W4 的校巴證據組合：

- 基準平均乘車時間：43.00 min；最佳化後平均時間：28.00 min；
- 四輛巴士及每日 87.00 km 路線；
- 乘客數不超過 240 人時四輛巴士可行；超過 240 人則需要五輛；
- 留出資料的路線時間 MAE：2.40 min；
- 接近門檻時，路線 3 是達到限制的路線。

工作坊任務：頁面藍圖

製作一頁藍圖，包含：

1. 以主張為本的小節標題；
2. 運用 W4 段落弧、由兩至四句構成的結果段落；
3. 一條方程式或一項精簡方法陳述，以解釋車隊決策；
4. 一項視覺呈現：table 1 或 figure 3；
5. 說明門檻及決策含義的圖說；
6. 一項限制或條件；
7. 一項指向模型效度驗證或敏感度證據的交叉引用。

成果應在掃讀模式下容易理解，在核查模式下經得起檢視。

例題 5：結果頁正文

Four buses remain sufficient through 240 riders, with an early review at 236. The optimized plan uses four buses and 87.00 km of daily routes, reducing mean ride time from 43.00 min to 28.00 min. Capacity tests show that the plan remains feasible through 240 riders but requires a fifth bus above this level (figure 3). Because route 3 reaches 60 passengers at the boundary, we recommend four buses for current demand and an early fleet review at 236 projected riders and a mandatory fifth bus from 241 riders.

The threshold is supported by capacity constraints rather than by the route-time prediction alone. Held-out route-time MAE is 2.40 min, but clustered changes in stop-level demand could move the boundary; the school should therefore update the assignment after major enrollment or residential-pattern changes.

這段英文先以標題式主張交代決策，再依次提供效率改善、容量門檻、早期檢視條件與限制。圖表、模型效度驗證指標及建議各自承擔不同功能，而沒有把同一證據重複鋪陳。

檢查點：同儕審核：90 秒

交換頁面藍圖。在不詢問作者下，記錄：

1. 建議；
2. 數值證據；
3. 決策門檻；
4. 主要限制；
5. 讀者可在哪裏核查方法。

若同伴在 90 秒內找不到某項資料，需要的是重新設計，而不只是校對。

10 分層寫作與製作工作坊

核心路線：修復薄弱的視覺證據組合

你獲得一張沒有標示的折線圖截圖，以及一張沒有單位的表格。請提供以下內容，重新建立這組視覺證據：

1. 一個分析問題；
2. 一種合適的呈現方式；
3. 標籤及單位；
4. 完整圖說；
5. 兩句解讀；
6. 重現它所需的資料來源或程式。

挑戰路線：在兩種呈現方式之間選擇

對一項包含五個參數及二元建議的敏感度分析，設計兩種方案：

1. 以龍捲風圖形式排列各參數的局部影響；
2. 顯示建議何時改變的門檻／情境表。

說明哪一項應放在正文，以及哪一項（如有）應放在附錄。判斷必須根據論文主張，而非視覺偏好。

延伸路線：設計可重現的製作流程

制定由原始資料產生最終 PDF 的專案計劃，交代：

- 輸入檔案及模型效度驗證／資料檢查；
- 生成表格與圖的程式；
- 命名規則與輸出資料夾；
- 數值更新如何傳至摘要及結論；
- 版本控制、備份與最終封存程序；
- 由誰獨立檢查 PDF 與規則。

更改一項輸入值，再重新生成所有受影響輸出，以測試流程。

練習 W5.1：圖說實驗室

為每項內容撰寫完整圖說：

1. 12 個留出日的觀測與預測通勤時間；
2. 建議在 $\lambda/\mu = 1$ 附近改變的敏感度熱圖；
3. 顯示三條候選走廊及一條選定路線的路線圖；
4. 比較歐拉法、Heun法與 RK4 的收斂圖；

5. 顯示擬合值較大時變異增加的殘差圖。

每段圖說都須辨認呈現內容、陳述主要發現，並交代建模含義。

練習 W5.2：頁數預算審核

取一篇以往練習論文，把每半頁分類為：

- 回答任務；
- 建立模型；
- 證據／結果；
- 模型效度驗證／敏感度分析；
- 建議／溝通；
- 重複或低優先資料。

在不縮小字體或頁邊下，刪除或移走至少一頁重複內容，並記錄有否因此損失證據。

練習 W5.3：模擬提交

進行一節 45 分鐘演練，由一個可正常編譯的專案開始：

1. 改變一項結果，重新生成受影響的表格與圖；
2. 更新摘要及結論；
3. 編譯並逐頁檢查；
4. 套用規則卡及提交前檢核表；
5. 以模擬控制編號重新命名最終 PDF；
6. 在第二部裝置開啟，並放入提交資料夾；
7. 記錄每個階段所需時間。

任何未能可靠完成的階段，都應成為後續訓練重點。

11 總結寫作系列

W1-W5 證據架構

1. **W1** – 架構：協助讀者找到問題、模型、證據與結論。
 2. **W2** – 摘要：濃縮任務、策略、發現、可信度證據及決策。
 3. **W3** – 可信度：公開假設，並透過運算／程式核證、模型效度驗證、敏感度及不確定性檢驗模型。
 4. **W4** – 正文：把主張與證據寫成強度恰當、前後連貫的段落。
 5. **W5** – 視覺製作：以可供檢視的呈現方式展示證據，並交付合規且可重現的 PDF。
- 這五課不是互相分離的表面修飾，而是共同組成一套證據系統。

W5 重點整理

1. 每項視覺呈現都應由讀者問題開始，以決策含義結束。
2. 以表格作精確比較；以圖呈現模式、關係、不確定性、程序或空間。
3. 在同一頁同時照顧掃讀模式與核查模式。
4. 交代目的、定義及解釋，才引入方程式。
5. 精度、單位、基準、不確定性及門檻都是主張的一部分。
6. 圖說是精簡的證據段落，不只是標籤。
7. 可重現流程及交叉引用能減少最後階段的錯誤。
8. 競賽規則會改變；規則卡必須由最新官方指引整理。
9. 編譯、渲染、逐頁檢查，並由另一人獨立核查最終 PDF。
10. 提早提交已核查的最佳版本，再一併封存 PDF 及原始檔。

附錄 A：可獨立使用的競賽論文起始樣板

```

\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage[margin=2.5cm]{geometry} % replace only if rules require
\usepackage{iftex}
\ifPDFTeX\errmessage{Compile with XeLaTeX}\fi
\usepackage{fontspec,xeCJK}
\setmainfont{TeX Gyre Termes}
\setCJKmainfont{Noto Serif CJK TC}
\usepackage{amsmath,amssymb,graphicx,booktabs,array}
\usepackage{caption,subcaption,float,hyperref,cleveref}
\usepackage{siunitx}
\hypersetup{colorlinks=false,pdfborder={0 0 0}}

\begin{document}
% Insert the official current-year Summary Sheet or required first page.
% Do not include names or institution if anonymity is required.

\section{Introduction and Task Interpretation}
\section{Assumptions and Notation}
\section{Model Development}
\section{Results and Recommendation}
\section{Verification and Validation}
\section{Sensitivity and Limitations}
\section{Conclusion}

% Bibliography and appendices must follow the current contest rules.
\end{document}

```

附錄 B：圖說與視覺呈現檢核表

- ☐ 視覺呈現回答一個清楚可辨的分析問題。

- ☐ 每個坐標軸、單位、類別、符號、分面、線條及陰影編碼均有定義。
- ☐ 尺度與資料選擇均誠實呈現差異。
- ☐ 估計量顯示合適的不確定性或情境範圍。
- ☐ 文字以最終頁面大小及灰階顯示時仍可閱讀。
- ☐ 正文以編號引用視覺呈現，並交代引入原因。
- ☐ 圖說辨認呈現對象及情境。
- ☐ 圖說陳述主要發現，而非只重複坐標軸內容。
- ☐ 圖說把發現連接至模型選擇或決策。
- ☐ 視覺呈現可由已知來源重新生成。

附錄 C：最終 PDF 與提交檢核表

- ☐ 題目要求的每項任務均已回答，而且容易找到。
- ☐ 摘要、正文、表格、圖及結論採用同一組最終數值。
- ☐ 單位及符號一致；重要方程式已由另一人核查。
- ☐ 沒有未解析的文獻引用或交叉引用。
- ☐ 沒有文字、表格、圖、圖說或標籤被裁切或互相重疊。
- ☐ 字體已嵌入，中英文字形均正確顯示。
- ☐ 頁數及該年度所有最新規則均已符合。
- ☐ 隊號、頁碼、匿名要求及指定首頁均正確。
- ☐ 參考文獻、資料來源、程式碼、圖及 AI 使用已按要求披露。
- ☐ 檔案格式、大小及檔名符合官方指引。
- ☐ PDF 可在第二部裝置正常開啟及渲染。
- ☐ 非作者已完成規則卡及視覺檢查。
- ☐ 正確檔案已提早提交，確認紀錄亦已保存。
- ☐ 最終 PDF、原始檔、資料、程式碼及確認紀錄已一併封存。

附錄 D：最新規則來源註記

本課 2026 年 HiMCM 例子以 COMAP 官方 HiMCM / MidMCM 指引為依據。2026 年 IM²C 國際輪官方頁面亦指出，團隊仍須遵從當期題目的特定要求。參加任何競賽時，團隊均應同時查閱最新規則與最新題目說明，因為指定文件組成可能按輪次及題目而不同。每次競賽開始前都應重新核查規則。

References

- [1] COMAP, “2026 HiMCM/MidMCM Instructions,” checked 20 August 2026.
- [2] IM²C, “Challenge Overview,” checked 20 August 2026, <https://immchallenge.org/immc-challenge/>.

模型審核卡

在信任或傳達模型之前先作審核

目的	模型要回答甚麼問題或支援甚麼決策？	資料	哪些輸入屬觀測、推導或模擬資料？
假設	哪些簡化可能改變答案？	單位	量綱與尺度是否一致？
運算 / 程式核證	方程、程式、限制與極限情況是否已核對？	模型效度驗證	是否用獨立證據檢驗預定用途下的表現？
不確定性	測量、參數、求解器及模型結構誤差如何影響結論？	倫理	誰受益、誰承擔風險，公平準則是甚麼？
可重現性	是否記錄資料來源、版本、種子與轉換？	溝通	主張是否有條件、可追溯且與決策相關？

延伸閱讀

- HiMCM / MidMCM 競賽指引 (COMAP)
- IM²C 挑戰概覽與建模要求 (International Mathematical Modeling Challenge)
- 製作研究文章圖像 (IEEE Author Center)
- LaTeX 官方文件 (The LaTeX Project)

來源、資料脈絡與授權

本講義依循 SIAM / COMAP GAIMME 報告對反覆建模與評核的觀點。競賽相關說明於 2026 年 8 月 20 日依據官方 COMAP HiMCM 規則核對；提交前仍須查閱當時最新規則。除非另有明確來源，課堂資料與數值情境均屬合成或模擬教學例子，不構成任何真實機構的實證主張。第三方參考資料沿用各自條款。Kenneth Sok Kin Cheng 的原創教材採用 CC BY-NC-SA 4.0 授權。

學生作答指引與檢核準則

封閉式計算題請列出定義、代入、單位及至少一項獨立檢查；本課的完整例題可作方法提示，但須自行完成數值。開放建模題按五項檢核：目的與輸出是否明確、資料與來源是否交代、假設與適用範圍是否合理、運算／程式核證與模型效度驗證是否可追蹤，以及不確定性、限制與建議是否互相一致。每項須附具體證據，而非只寫「已完成」。