分式方程：驗根與應用 — 教師解答

八上・正文 97–104 頁・基訓第 49–52 課時

按需要使用示範及帶做，再完成八題核心；補練及進階按程度選用。要求學生交代理由，並驗算原方程或展開核對。

教師示範 1

解方程，寫出限制，並把每個候選值代回原方程檢驗。

$$\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}$$

參考答案

無解。

1. 原方程要求x≠2。
2. 兩邊乘x−2，得x=2。
3. 該候選值令兩個原分母均為零，必須捨去。
4. 所以原方程無解。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

帶做 2

解方程，寫出限制，並把每個候選值代回原方程檢驗。

$$\frac{3}{x-1}=2$$

1. 限制x≠___；去分母得3=___。
2. 候選值x=___；原分母=___，所以___。

參考答案

x=5/2。

1. 限制為x≠1。
2. 每項乘x−1：3=2(x−1)。
3. 3=2x−2，所以x=5/2。
4. 驗算：3/(5/2−1)=3/(3/2)=2，且5/2≠1。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

先備 3

解任何含1/(x−3)的方程前，先寫其禁值。

$$\frac{1}{x-3}$$

參考答案

(1)/(x-3)；x≠3。

$$\frac{1}{x-3}$$

1. 先由原分母及除式記錄 x≠3。
2. 分母x−3不可為零。
3. (1)/(x-3) = (1)/(x-3)。
4. 所以為 (1)/(x-3)，仍須保留 x≠3。

- 使用因式約分或正確通分。
- 保留所有原限制，包括除式不為零。

先備 4

工程隊以固定效率6天完成一項工程。每天完成全工程的幾分之幾？

參考答案

1/6。

$$\frac{1}{6}$$

1. 把全工程看作1。
2. 每天效率=全工程÷天數=1/6。

- 使用題目所述關係並列出計算。
- 按題意寫出答案及單位。

獨立練習 5

解方程，寫出限制，並把每個候選值代回原方程檢驗。

$$\frac{2}{x-1}=1$$

參考答案

x=3。

1. 先記x≠1。
2. 2=x−1得x=3。
3. 驗算2/(3−1)=1，分母2不為零。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

獨立練習 6

解方程，寫出限制，並把每個候選值代回原方程檢驗。

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{x-2}$$

參考答案

無解。

1. 原限制為x≠2。
2. 去分母得x+1=3，候選值為x=2。
3. 候選值屬禁值，所以原方程無解。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

獨立練習 7

甲隊單獨需12天，甲乙合作需4天。設乙隊單獨需x天，列效率方程並求x。

參考答案

x=6 天；為正且符合原模型。

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$$

1. 甲效率1/12，乙效率1/x；要求x>0。
2. 效率相加：1/12+1/x=1/4。
3. 得1/x=1/6，所以x=6天。
4. 驗算1/12+1/6=1/4；6為正且不為零。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

獨立練習 8

兩人所用時間相同。一人以x km/h走90 km，另一人以(x+10) km/h走120 km。求x。

參考答案

x=30 km/h；為正且符合原模型。

$$\frac{90}{x}=\frac{120}{x+10}$$

1. 時間為90/x及120/(x+10)，要求x>0。
2. 時間相等，去分母得90(x+10)=120x。
3. 900=30x，所以x=30 km/h。
4. 驗算90/30=120/40=3小時；兩速度均為正。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

離堂題 9

解方程，寫出限制，並把每個候選值代回原方程檢驗。

$$\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$$

參考答案

無解。

1. 原式要求x≠1。
2. 去共同分母得1=2，不可能。
3. 所以無解；不可用禁值x=1逃避矛盾。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

離堂題 10

解方程，寫出限制，並把每個候選值代回原方程檢驗。

$$\frac{4}{x}=2$$

參考答案

x=2。

1. 先記x≠0，再得4=2x。
2. x=2；代回原方程4/2=2。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

補練／家課 11

解方程，寫出限制，並把每個候選值代回原方程檢驗。

$$\frac{3}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}$$

參考答案

x=1。

1. 分解$x^2-4=(x-2)(x+2)$，所以x≠−2、2。
2. 乘完整分母，得3=x+2。
3. x=1；驗算3/(1−4)=−1=1/(1−2)。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

補練／家課 12

解方程，寫出限制，並把每個候選值代回原方程檢驗。

$$\frac{1}{2x}=\frac{2}{x+3}$$

參考答案

x=1。

1. 限制為x≠0、−3。
2. 乘2x(x+3)，得x+3=4x，所以x=1。
3. 驗算1/(2×1)=2/(1+3)=1/2。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

補練／家課 13

甲單獨需6天，乙單獨需3天。設合作需x天，列工作量方程並求解。

參考答案

x=2 天；為正且符合原模型。

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}=1$$

1. x天內完成的工作量分別為x/6、x/3。
2. x/6+x/3=1得x+2x=6，所以x=2。
3. 驗算2/6+2/3=1；2天為正。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

補練／家課 14

兩段旅程用時相同：180 km的速度為x km/h，240 km的速度為(x+20) km/h。求x。

參考答案

x=60 km/h；為正且符合原模型。

$$\frac{180}{x}=\frac{240}{x+20}$$

1. 用時間=路程/速度，要求x>0。
2. 180(x+20)=240x得3600=60x，所以x=60。
3. 驗算180/60=240/80=3小時。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

進階 15

甲單獨需8天，甲乙合作需3天。設乙單獨需x天，求x。

參考答案

x=24/5 天；為正且符合原模型。

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$$

1. 要求x>0，效率相加：1/8+1/x=1/3。
2. 1/x=1/3−1/8=5/24，所以x=24/5天。
3. 驗算1/8+5/24=3/24+5/24=1/3；非整數天數仍可成立。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。

進階 16

單車以x km/h走12 km。巴士速度為2x km/h，遲1/2小時出發但同時到達。求x。

參考答案

x=12 km/h；為正且符合原模型。

$$\frac{12}{x}=\frac{12}{2x}+\frac{1}{2}$$

1. 單車時間比巴士多1/2小時，要求x>0。
2. 12/x=6/x+1/2得6/x=1/2，所以x=12。
3. 驗算單車需1小時，巴士需1/2小時，加上遲出發的1/2小時，同時到達。

- 寫出完整的去分母方程。
- 檢查原分母及原等式。