二次根式：意義、化簡與取值範圍 — 教師解答

八下・正文 1–4 頁・正文第 1–2 課時

以兩題先備判斷支援需要；投影示範及帶做，再收集八題紙筆核心作答。補練及進階按需要選用，接受其他完整正確方法；本頁不保存學生紙筆答案。

普通班：先備4、短探究5、示範帶做8、獨立15、訂正5、離堂3分鐘。進階班：探究18、整理4、精選練習13、離堂5分鐘。

先備：平方、非負數及一次不等式。

普通班取首個指定例作5分鐘概念示範；進階班完成整個探究。

1. 3′ 預測 x＝3、−3、0 時 $\sqrt{x^2}$ 的值；原來的符號會保留嗎？先寫理由。
2. 8′ 紙上列表記錄 x、x的平方及該平方的算術平方根，再用 x＝1、3、7 檢查 $\sqrt{}$(x−3)，標記哪些輸入在實數範圍有意義。
3. 5′ 解釋 $\sqrt{x^2}=|x|$ 及條件 $x-3\ge 0$。例子只協助猜想，須用非負算術平方根的定義說明。
4. 2′ 獨立化簡 $\sqrt{(-5)^2}$，並分辨它與解 $x^2=25$ 的要求。

教師示範 1

精確化簡，並寫出所需限制。

$$\sqrt{(-7)^2}$$

參考答案

7

$$7$$

1. 根號表示非負的算術平方根；實數範圍的被開方數須非負。
2. 中間一步為 $\sqrt{49}=7$。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

帶做 2

精確化簡，並寫出所需限制。

$$\sqrt{50}$$

1. 補上完全平方因數分拆：$50=25\times\square$。
2. 然後 $\sqrt{50}=\sqrt{25}\sqrt{\square}=\square\sqrt{2}$。
3. 檢查係數非負，且結果平方後為 50。

參考答案

$5\sqrt{2}$

$$5\sqrt{2}$$

1. 先提出完全平方因數；根號表示非負的算術平方根。
2. 中間一步為 $\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}$。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

先備 3

精確化簡，並寫出所需限制。

$$\sqrt{49}$$

參考答案

7

$$7$$

1. 根號表示非負的算術平方根；實數範圍的被開方數須非負。
2. 化簡式為 7。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

先備 4

這個式子在實數範圍有意義嗎？說明理由。

$$\sqrt{-4}$$

參考答案

沒有實數值；常數被開方數 −4 為負。

$$\varnothing$$

1. 每個被開方數須非負；位於分母的根式更須嚴格大於零。
2. 解所得的一次不等式，再取共同部分。
3. 全部允許取值為 ∅。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

獨立練習 5

求使式子在實數範圍有意義的全部 x 值。

$$\sqrt{x-3}$$

參考答案

$x \geq 3$

$$x \geq 3$$

1. 每個被開方數須非負；位於分母的根式更須嚴格大於零。
2. 解所得的一次不等式，再取共同部分。
3. 全部允許取值為 $x \geq 3$。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

獨立練習 6

求使式子在實數範圍有意義的全部 x 值。

$$\sqrt{5-2x}$$

參考答案

$x \leq \frac{5}{2}$

$$x \leq \frac{5}{2}$$

1. 每個被開方數須非負；位於分母的根式更須嚴格大於零。
2. 解所得的一次不等式，再取共同部分。
3. 全部允許取值為 $x \leq \frac{5}{2}$。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

獨立練習 7

精確化簡，並寫出所需限制。

$$\sqrt{x^2}$$

參考答案

$|x|$

$$|x|$$

1. 即使 x 為負數，算術平方根也不能為負。
2. 化簡式為 $|x|$。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

獨立練習 8

求使式子在實數範圍有意義的全部 x 值。

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

參考答案

$x > -2$

$$x > -2$$

1. 每個被開方數須非負；位於分母的根式更須嚴格大於零。
2. 解所得的一次不等式，再取共同部分。
3. 全部允許取值為 $x > -2$。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

離堂題 9

精確化簡，並寫出所需限制。

$$\sqrt{0}$$

參考答案

0

$$0$$

1. 根號表示非負的算術平方根；實數範圍的被開方數須非負。
2. 化簡式為 0。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

離堂題 10

學生寫 $\sqrt{25}=\pm5$。寫正確值並說明錯誤。

$$\sqrt{25}$$

參考答案

5

$$5$$

1. $x^2=25$ 有兩個解，但算術平方根的符號本身只表示 5。
2. 化簡式為 5。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

補練／家課 11

精確化簡，並寫出所需限制。

$$\sqrt{\frac{1}{4}}$$

參考答案

$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}$$

1. 根號表示非負的算術平方根；實數範圍的被開方數須非負。
2. 化簡式為 $\frac{1}{2}$。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

補練／家課 12

求使式子在實數範圍有意義的全部 x 值。

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$$

參考答案

$1\le x\le 4$

$$1\le x\le 4$$

1. 每個被開方數須非負；位於分母的根式更須嚴格大於零。
2. 解所得的一次不等式，再取共同部分。
3. 全部允許取值為 $1\le x\le 4$。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

補練／家課 13

精確化簡，並寫出所需限制。

$$\sqrt{(0-2)^2}$$

參考答案

2

$$2$$

1. 根號表示非負的算術平方根；實數範圍的被開方數須非負。
2. 中間一步為 $|0-2|=2$。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

補練／家課 14

精確化簡，並寫出所需限制。

$$(\sqrt{11})^2$$

參考答案

11

$$11$$

1. 把非負的算術平方根平方，可還原非負被開方數。
2. 化簡式為 11。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

進階 15

求使式子在實數範圍有意義的全部 x 值。

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3-x}}$$

參考答案

$-\frac{1}{2}\le x<3$

$$-\frac{1}{2}\le x<3$$

1. 每個被開方數須非負；位於分母的根式更須嚴格大於零。
2. 解所得的一次不等式，再取共同部分。
3. 全部允許取值為 $-\frac{1}{2}\le x<3$。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。

進階 16

用這個值反駁「對所有實數 x，$\sqrt{x^2} = x$」。

$$\sqrt{(-2)^2}$$

參考答案

2

$$2$$

1. x＝−2 時根式為 2，但 x 為 −2；正確恆等式須用絕對值。
2. 化簡式為 2。
3. 核對原式及算術平方根的正負號。

- 先使用所述條件，交代關係後才計算。
- 盡量寫精確答案，附上單位及取值限制。