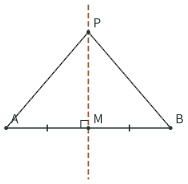
垂直平分線：性質與 SSS 逆命題 — 教師解答

八上・正文 31–32 頁・基訓第 16 課時

正向以 SAS 證明，不可先假設待證的斜邊相等再用 HL。SSS 逆向在推出相鄰等角均為90°前，不先標直角。其他有據的證法亦接受。

教師示範 1

M 是 AB 的中點，P 不在 AB 上，且 PM⊥AB。證明 PA=PB。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

△PMA≅△PMB（SAS），所以 PA=PB。

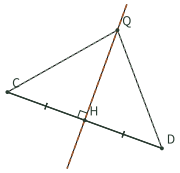
1. AM=BM，因為 M 是 AB 的中點。
2. ∠PMA=∠PMB=90°，因為 PM⊥AB。
3. PM=PM 為公共邊，所以 △PMA≅△PMB（SAS）。
4. 故 PA=PB，由全等三角形對應邊相等。

- 分別使用中點及垂直兩個條件。
- 寫出公共邊並說明全等判定。
- 推出目標，沒有先假設到兩端距離相等。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

帶做 2

H 是 CD 的中點，Q 不在 CD 上，QH⊥CD。完成 QC=QD 的證明。

1. CH=___，因為 H 是___。
2. ∠QHC=∠___=___，因為___。
3. ___ 是公共邊；判定為___。
4. 因此 QC=QD，理由是___。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

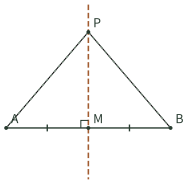
CH=DH、H 點兩個夾角均為90°，且 QH 公共；由 SAS 得 QC=QD。

1. CH=DH，因為 H 是 CD 的中點。
2. ∠QHC=∠QHD=90°，因為 QH⊥CD。
3. QH=QH 為公共邊，所以 △QHC≅△QHD（SAS）。
4. 故 QC=QD，由全等三角形對應邊相等。

- 分別使用中點及垂直兩個條件。
- 寫出公共邊並說明全等判定。
- 推出目標，沒有先假設到兩端距離相等。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

先備 3

M 是 AB 的中點，AB=10 cm。求 AM。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

AM=5 cm。

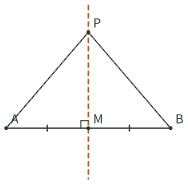
1. 中點把 AB 分成兩條等長線段。
2. 10÷2=5，所以 AM=5 cm。

- 使用正確的中點或垂直平分線性質，並保留 cm。

先備 4

A、M、B 共線，P 不在 AB 上，且 PM⊥AB。∠PMA 是多少？

A. 45°　　B. 180°
C. 它必須等於 AM 的長。　　D. 90°



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

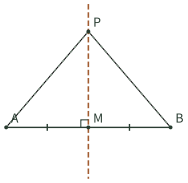
90°，由垂直的定義。

1. MA 位於直線 AB 上。
2. PM⊥AB，因此 ∠PMA 是直角。

- 回答角度90°，沒有混用長度。

獨立練習 5

M 是 AB 的中點，AB=18 cm。求 AM。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

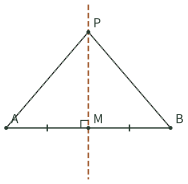
AM=9 cm。

1. 中點把 AB 分成兩條等長線段。
2. 18÷2=9，所以 AM=9 cm。

- 使用正確的中點或垂直平分線性質，並保留 cm。

獨立練習 6

P 在 AB 的垂直平分線上。若 PA=8 cm，求 PB 並寫出所用性質。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

PB=8 cm；垂直平分線上的點到兩端距離相等。

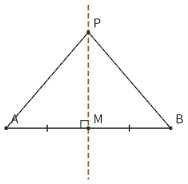
1. 該點在垂直平分線上，所以 PA=PB。
2. 代入 PA=8 cm，得 PB=8 cm。

- 使用正確的中點或垂直平分線性質，並保留 cm。

獨立練習 7

P 在 AB 的垂直平分線上。PA=3x+1 cm、PB=2x+5 cm。求 x 並核對兩個距離。

$$3x+1=2x+5$$



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

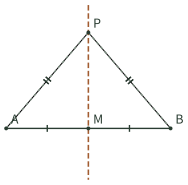
x=4；PA=PB=13 cm。

1. 由垂直平分線性質得 PA=PB，即 3x+1=2x+5。
2. 兩邊減 2x，再減 1，得 x=4。
3. 核對：3×4+1=13、2×4+5=13，兩者均為正。

- 說明端點等距，解得 x=4，並核對13 cm。

獨立練習 8

P 不在 AB 上，且 PA=PB。M 是 AB 的中點。證明 PM⊥AB，並推出 P 在 AB 的垂直平分線上。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

△PMA≅△PMB（SSS）；M 點兩個相鄰等角合共180°，因此各為90°。

1. PA=PB 是已知，AM=BM 因 M 是中點，且 PM 公共。
2. 所以 △PMA≅△PMB（SSS）。
3. 對應角相等，得 ∠PMA=∠PMB。
4. A、M、B 共線，兩鄰角和為180°，故各為90°。
5. 因此 PM 經 AB 中點並與它垂直，P 在垂直平分線上。

- 列出完整三組 SSS 等邊。
- 同時使用兩角相等及平角和。
- 推出經中點的垂直關係。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

離堂題 9

一直線經 AB 的中點，但未給出它垂直 AB。線上每一點是否必定到 A、B 等距？

A. 不一定，還需要垂直條件。
B. 一定，只有中點資料已足夠。
C. 一定，經同一點的直線都重合。
D. 沒有直線能垂直 AB。

參考答案

不一定；垂直平分線同時需要中點及垂直。

1. 經中點只給出「平分」部分。
2. 欠缺垂直，便不能對線上每點套用等距性質。

- 指出欠缺垂直要求。

離堂題 10

一直線垂直 AB，但交點不是 AB 中點。它能否是 AB 的垂直平分線？

A. 不能，因為垂直直線不相交。
B. 不能，因為不符合中點要求。
C. 可以，只有垂直已足夠。
D. 可以，一條線段有很多不同中點。

參考答案

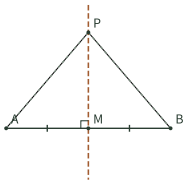
不能；它還必須經過唯一的中點。

1. 垂直只符合定義的一項要求。
2. 交點亦須把 AB 分成兩個相等部分。

- 說明中點條件不可省略。

補練／家課 11

M 是 AB 的中點，AB=7.6 cm。求 AM。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

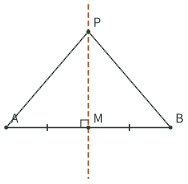
AM=3.8 cm。

1. 中點把 AB 分成兩條等長線段。
2. 7.6÷2=3.8，所以 AM=3.8 cm。

- 使用正確的中點或垂直平分線性質，並保留 cm。

補練／家課 12

P 在 AB 的垂直平分線上。若 PA=11.5 cm，求 PB 並寫出所用性質。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

PB=11.5 cm；垂直平分線上的點到兩端距離相等。

1. 該點在垂直平分線上，所以 PA=PB。
2. 代入 PA=11.5 cm，得 PB=11.5 cm。

- 使用正確的中點或垂直平分線性質，並保留 cm。

補練／家課 13

若 A≠B 且 PA=PB，使用垂直平分線逆命題前，是否要 P 位於某個指定角內？與角平分線逆命題比較。

參考答案

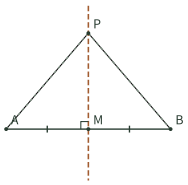
線段的垂直平分線逆命題不需要指定角內條件；所述內角平分線逆命題則要求 P 在該角內。

1. PA、PB 是到線段兩個端點的距離。
2. 兩者相等使 P 位於完整垂直平分線上，可在 AB 任一側。
3. 到角邊的距離涉及另一個定理及其角內限制。

- 分清兩個幾何情境及適用範圍。

補練／家課 14

已知 M 是中點且 PM⊥AB，要證 PA=PB。同學寫「PA=PB，所以由 HL 得全等」。指出循環的一步及有效判定。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

PA=PB 原是待證，並非已知。應用 AM=BM、公共邊 PM 及夾直角作 SAS。

1. 同學先假設了待證的斜邊相等。
2. 已知實際給出兩半線段相等及兩個夾直角。
3. 配合公共 PM 作 SAS，之後才推出 PA=PB。

- 指出先假設結論，並換成有據的 SAS 條件。

進階 15

A、B、C 不共線。P 在 AB 及 BC 的垂直平分線上。證明 P 亦在 AC 的垂直平分線上。

參考答案

PA=PB、PB=PC，故 PA=PC；由逆命題得 P 在 AC 的垂直平分線上。

1. AB 的垂直平分線性質給出 PA=PB。
2. BC 的垂直平分線性質給出 PB=PC。
3. 因此 PA=PC，且三點不共線保證 A≠C。
4. 對 AC 使用端點等距的逆命題。

- 使用兩次正向性質，再用正確逆命題。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

進階 16

M 是 AB 的中點。若 P=M，平常的 SAS 三角形會退化。PA=PB 是否仍成立？不用全等三角形說明。

參考答案

仍成立；PA=MA、PB=MB，而由中點定義 MA=MB。

1. 在兩個長度中以 M 代替 P。
2. 中點定義已給出 MA=MB。
3. 此特殊情況不需使用全等判定。

- 直接處理退化情況，沒有對退化三角形套 SAS。