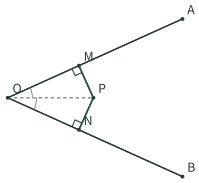
角平分線：垂直距離與正向證明 — 教師解答

八上・正文 25–26 頁・基訓第 13 課時

投影作短觀察，再示範完整 AAS 證明及帶做填空，之後才獨立作答。正向證明不可把 PM=PN 當已知；其他有據的完整證法亦接受。

教師示範 1

OP 平分 ∠AOB，P 在角內，PM⊥OA、PN⊥OB。用全等三角形證明 PM=PN。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

△OPM≅△OPN（AAS），所以 PM=PN。

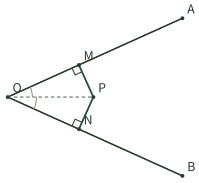
1. ∠OMP=∠ONP=90°，因為兩線段分別垂直於角的兩邊。
2. ∠MOP=∠PON，由角平分線的定義。
3. OP=OP，為公共邊，且在兩個三角形中均為直角的對邊。
4. 所以 △OPM≅△OPN（AAS）。
5. 因此 PM=PN，因為全等三角形的對應邊相等。

- 寫出兩個直角及垂直的理由。
- 寫出頂點等角及公共邊。
- 使用有效全等判定，沒有先假設待證結論。
- 全等式頂點對應正確，並推出距離相等。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

帶做 2

OP 平分 ∠AOB，P 在角內，PM⊥OA、PN⊥OB。完成證明表，不可把 PM=PN 當作證明的已知。

1. ∠OMP=∠___=90°，因為___。
2. ∠MOP=∠___，因為___。
3. ___=___ 為公共邊，所以 △OPM≅△OPN（___）。
4. 所以 ___=___，理由是___。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

∠OMP、∠ONP 是直角；∠MOP=∠PON；OP=OP；AAS；PM=PN。

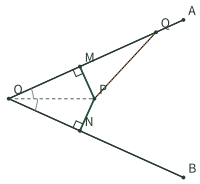
1. ∠OMP=∠ONP=90°，因為兩線段分別垂直於角的兩邊。
2. ∠MOP=∠PON，由角平分線的定義。
3. OP=OP，為公共邊，且在兩個三角形中均為直角的對邊。
4. 所以 △OPM≅△OPN（AAS）。
5. 因此 PM=PN，因為全等三角形的對應邊相等。

- 寫出兩個直角及垂直的理由。
- 寫出頂點等角及公共邊。
- 使用有效全等判定，沒有先假設待證結論。
- 全等式頂點對應正確，並推出距離相等。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

先備 3

M、Q 在 OA 上，PM⊥OA，而 PQ 是斜線段。哪條線段表示 P 到 OA 的距離？

A. PQ　　B. OM
C. PM　　D. OP



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

PM：由該點到這一邊的垂線段。

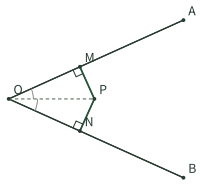
1. 點到直線的距離是垂線段長。
2. PM 垂直 OA；OP 連到頂點，PQ 則是斜線段。

- 選 PM，並說明垂直條件。

先備 4

OP 平分 ∠AOB=64°。求 ∠AOP。

A. 64°　　B. 90°
C. 128°　　D. 32°



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

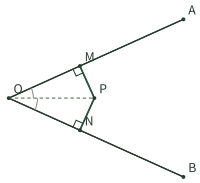
32°。

1. 平分後兩個角相等。
2. 64°÷2=32°。

- 把整角除以二，並保留度數單位。

獨立練習 5

P 在 ∠AOB 的內角平分線上，PM⊥OA、PN⊥OB。若 PM=6.4 cm，求 PN 並寫出所用性質。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

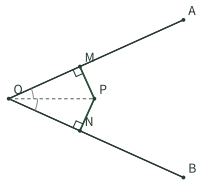
PN=6.4 cm，由角平分線的性質。

1. 兩者是同一點到兩邊的垂直距離。
2. 該點在平分線上，所以 PN=PM=6.4 cm。

- 使用垂線段長，沒有混用斜線段或到頂點的距離。
- 寫出數值、題目單位及所用性質。

獨立練習 6

OP 是 ∠AOB=74° 的內角平分線。求 ∠PON。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

∠PON=37°。

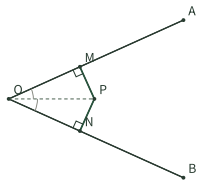
1. ∠AOP=∠PON，由平分線定義。
2. 每個角為 74°÷2=37°。

- 寫 37° 及平分的理由。

獨立練習 7

P 在內角平分線上，PM⊥OA、PN⊥OB。PM=2x+1 cm，PN=3x−2 cm。求 x，並檢查兩個長度均為正。

$$2x+1=3x-2$$



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

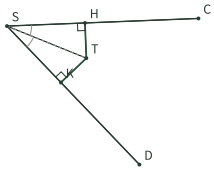
x=3；兩條線段均長 7 cm。

1. 由性質得 PM=PN，即 2x+1=3x−2。
2. 兩邊減 2x，再加 2，得 x=3。
3. 代入得 2×3+1=3×3−2=7>0。

- 以垂直距離相等說明方程。
- 解得 x=3，並核對兩長度均為 7 cm。

獨立練習 8

ST 平分 ∠CSD，T 在角內，TH⊥SC、TK⊥SD。自行選取三角形，證明 TH=TK。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

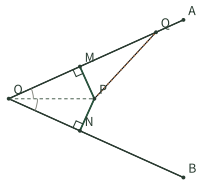
△STH≅△STK（AAS），所以 TH=TK。

1. ∠SHT=∠SKT=90°，因為兩線段分別垂直於角的兩邊。
2. ∠HST=∠TSK，由角平分線的定義。
3. ST=ST，為公共邊，且在兩個三角形中均為直角的對邊。
4. 所以 △STH≅△STK（AAS）。
5. 因此 TH=TK，因為全等三角形的對應邊相等。

- 寫出兩個直角及垂直的理由。
- 寫出頂點等角及公共邊。
- 使用有效全等判定，沒有先假設待證結論。
- 全等式頂點對應正確，並推出距離相等。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

離堂題 9

P 在角平分線上，PN⊥OB。有人給出 PQ=3 cm，Q 在 OA 上，但 PQ 不垂直 OA。是否必有 PN=3 cm？說明理由。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

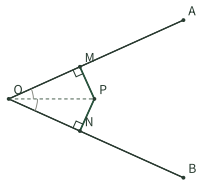
不一定。PQ 是斜線段，不表示到 OA 的距離；性質只比較垂直距離。

1. 應用性質前，先核對給出的長度代表甚麼。
2. PQ 不是垂直距離，所以不能用它的長度這樣決定 PN。

- 指出不能推出，並說明欠缺垂直條件。

離堂題 10

燈 P 在兩條直路所成角的內部，並位於內角平分線上。它到第一條路的最短距離為 9 m。求到第二條路的最短距離。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

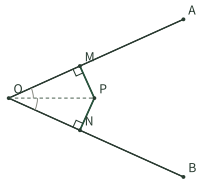
9 m；最短距離是垂直距離，而該點位於平分線上。

1. 把最短距離理解為垂線段長。
2. 用角平分線性質得第二條路的距離亦為 9 m。

- 使用垂線段長，沒有混用斜線段或到頂點的距離。
- 寫出數值、題目單位及所用性質。

補練／家課 11

P 在內角平分線上，PM⊥OA、PN⊥OB。PM=3.75 cm，求 PN。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

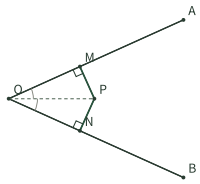
PN=3.75 cm。

1. PM、PN 是由 P 作出的垂直距離。
2. 因此 PN=PM=3.75 cm。

- 使用垂線段長，沒有混用斜線段或到頂點的距離。
- 寫出數值、題目單位及所用性質。

補練／家課 12

P 在內角平分線上，PM⊥OA、PN⊥OB。PM=3x−1 cm、PN=8 cm，求 x。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

x=3；兩條垂線段均長 8 cm。

1. 列方程 3x−1=8。
2. 得 3x=9，所以 x=3。
3. 檢查 3×3−1=8>0。

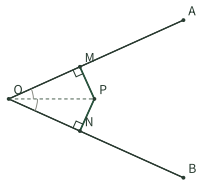
- 以性質說明方程，並解得 x=3。

補練／家課 13

已知 OP 平分該角及兩個垂直條件，要證明 PM=PN。哪組資料可作證明起點？

A. 兩個直角、O 點等角及公共邊 OP。　B. 先用 PM=PN，立即套 HL。

C. 三組等角，以 AAA 判定全等。　D. 不加理由地假設 OM=ON。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

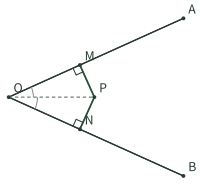
使用直角、平分所得等角及公共邊 OP，以 AAS 證明結論。

1. 垂直及平分條件給出兩組等角。
2. OP 為公共邊；PM=PN 是待證結論，並非前提。

- 只使用已知或已獨立證明的事實。
- 說明先假設 PM=PN 是循環論證。

補練／家課 14

P 在內角平分線上，PM⊥OA、PN⊥OB。PM=6 cm，△OPM 的周長是 24 cm。求 OP+ON。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

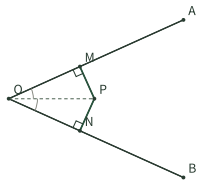
OP+ON=18 cm。

1. AAS 全等亦給出 OM=ON。
2. OP+OM=24−6=18 cm。
3. 以 ON 代替 OM，得 OP+ON=18 cm。

- 說明 OM=ON，並從周長減去正確邊長。

進階 15

三次實驗中，PM、PN 顯示相同的近似值。說明這支持甚麼，以及要保證平分線上每一點都成立還欠甚麼。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

實驗支持猜想；要說明所有這類點，仍需一般全等證明，不能只靠重複量度或近似值。

1. 有限次實驗只涵蓋那些設定。
2. 近似值相同亦可能掩蓋細小差異。
3. AAS 證明對任一符合條件的點使用同一組理由。

- 分清支持猜想的證據與一般證明。

進階 16

同學說：角內每一點到兩邊的距離都相等。角內點 Q 到兩邊的垂直距離是 2 cm、4 cm。這是否反例？應補上甚麼條件？

參考答案

是，因為 $2 \neq 4$；應限制該點在內角平分線上。

1. Q 在角內，符合原命題的前提。
2. 它的垂直距離不等，所以原結論不成立。
3. 正向性質要求該點在平分線上。

- 核對反例的前提與結論，並補上平分線條件。