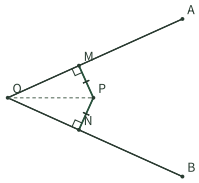
角平分線：逆命題與應用 — 教師解答

八上・正文 27–28 頁・基訓第 14 課時

示範以 OP 為斜邊的 HL，再讓學生把已知與待證分開標記。每個證明均清楚保留角內及垂直條件。

教師示範 1

P 在 ∠AOB 內，PM⊥OA、PN⊥OB，且 PM=PN。證明 OP 平分 ∠AOB。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

兩個直角三角形由 HL 全等，故頂點兩角相等，OP 為內角平分線。

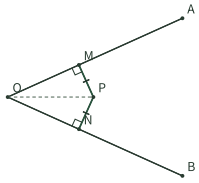
1. 由兩個垂直條件，△OPM 和 △OPN 均為直角三角形。
2. OP=OP 為公共斜邊，而 PM=PN 是已知。
3. 所以 △OPM≅△OPN（HL）。
4. 由對應角相等，得 ∠MOP=∠PON。
5. 因為 P 在角內，所以 OP 是該角的內角平分線。

- 寫出兩個直角三角形並指出公共斜邊。
- 使用已知等直角邊及 HL。
- 推出頂點等角，並保留角內條件。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

帶做 2

P 在 ∠AOB 內，PM⊥OA、PN⊥OB，且 PM=PN。完成 HL 證明，不可先假設 O 點兩角相等。

1. 兩個直角分別在___和___。
2. 斜邊 ___=___；直角邊 ___=___ 是已知。
3. △OPM≅△OPN（___），所以 ∠___=∠___。
4. 因為 P 在___，所以 OP 為___角平分線。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

OP 是公共斜邊；PM=PN 是等直角邊；由 HL 得 ∠MOP=∠PON，所以 OP 為內角平分線。

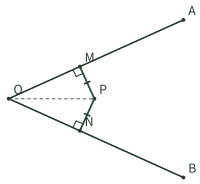
1. 由兩個垂直條件，△OPM 和 △OPN 均為直角三角形。
2. OP=OP 為公共斜邊，而 PM=PN 是已知。
3. 所以 △OPM≅△OPN（HL）。
4. 由對應角相等，得 ∠MOP=∠PON。
5. 因為 P 在角內，所以 OP 是該角的內角平分線。

- 寫出兩個直角三角形並指出公共斜邊。
- 使用已知等直角邊及 HL。
- 推出頂點等角，並保留角內條件。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

先備 3

PM⊥OA，且 M 在 OA 上。△OPM 的斜邊是哪一條？

A. OM
B. 任何一邊都可叫斜邊。
C. OP
D. PM



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

OP，因為它是 M 點直角的對邊。

1. PM⊥OM，所以直角在 M。
2. M 的對邊是 OP。

- 由直角對邊的位置指出 OP。

先備 4

「內角平分線上的點到兩邊垂直距離相等」的逆命題是哪一句？

A. 每個角內點到兩邊的距離都相等。
B. 角邊上的點都是頂點。
C. 兩個等角的邊長一定相等。
D. 角內點到兩邊的垂直距離相等，則在內角平分線上。

參考答案

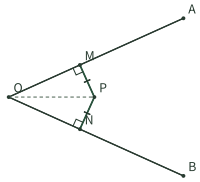
第一句，並保留角內及垂直距離條件。

1. 把原命題的前提與結論交換。
2. 保留適用範圍：P 必須在角內。

- 交換推論方向而沒有刪去必要條件。

獨立練習 5

P 在 ∠AOB=86° 內，PM⊥OA、PN⊥OB，且 PM=PN=4 cm。求 ∠AOP，並說明為何可把角度除以二。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

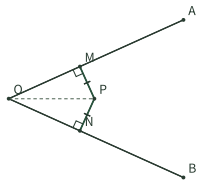
43°；先由逆命題得到 OP 平分該角。

1. 由垂直等距及角內條件，得 OP 是內角平分線。
2. 因此 ∠AOP=86°÷2=43°。

- 先寫逆命題的理由，再計算半角。

獨立練習 6

P 在 ∠AOB 內，PM⊥OA、PN⊥OB，且 PM=PN。若 ∠MOP=28°，求 ∠AOB。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

∠AOB=56°。

1. 由逆命題得 ∠MOP=∠PON。
2. 整角為 28°+28°=56°。

- 說明兩角相等，再正確求和。

獨立練習 7

P 到 OA、OB 所在兩相交直線的距離相等，但未說明 P 在 ∠AOB 內。能否推出 P 在這個角的內角平分線上？

A. 可以，因為相交直線一定垂直。
B. 沒有點可有兩個相等距離。
C. 不一定；這個結論需要角內條件。
D. 可以，不需任何位置條件。

參考答案

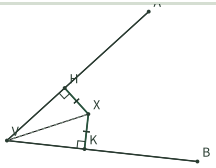
不一定；到兩條完整直線等距的點，也可能在另一條平分線上。

1. 所求結論涉及指定的內角。
2. 角外的等距點未必在該角的內角平分線上。

- 說明角內限制的作用。

獨立練習 8

X 在 ∠AVB 內，XH⊥VA、XK⊥VB，且 XH=XK。證明 VX 是內角平分線。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

△VXH≅△VXK（HL），由 V 點對應等角得 VX 是內角平分線。

1. 由兩個垂直條件，△VXH 和 △VXK 均為直角三角形。
2. VX=VX 為公共斜邊，而 XH=XK 是已知。
3. 所以 △VXH≅△VXK（HL）。
4. 由對應角相等，得 ∠HVX=∠XVK。
5. 因為 X 在角內，所以 VX 是該角的內角平分線。

- 寫出兩個直角三角形並指出公共斜邊。
- 使用已知等直角邊及 HL。
- 推出頂點等角，並保留角內條件。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

離堂題 9

P 在 ∠AOB 內，M 在 OA 上，N 在 OB 上，且 PM=PN，但沒有垂直條件。這是否足以證明 OP 是平分線？

參考答案

不足夠；PM、PN 未必表示到兩邊的垂直距離。

1. 逆命題比較的是距離，即垂線段長。
2. 任意連到兩邊的等長線段，並不保證這個前提。

- 指出不能推出，並說明欠缺兩個垂直條件。

離堂題 10

P 在角內，且到兩邊的垂直距離相等。哪個結果直接告訴我們 P 位於哪裡？

A. 只用三組等角，毋須邊長資料。
B. 角平分線性質的逆命題。
C. 先假設 OP 平分該角，再用正向性質。
D. 只用三角形周長公式。

參考答案

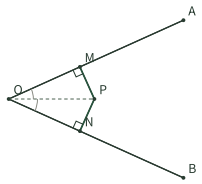
由逆命題得 P 在內角平分線上。

1. 垂直等距是已知。
2. 所求是平分線位置，因此使用逆命題。

- 選取與已知資料相配的推論方向。

補練／家課 11

P 在內角平分線上，PM⊥OA、PN⊥OB。PM=3 cm，△OPM 周長為 12 cm。求 OP+ON。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

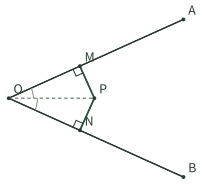
OP+ON=9 cm。

1. 兩個直角三角形全等，故 OM=ON。
2. OP+ON=OP+OM=12−3=9 cm。

- 使用 OM=ON，並減去已知直角邊。

補練／家課 12

P 在內角平分線上，PM⊥OA、PN⊥OB。PM=9 cm，△OPM 周長為 36 cm。求 OP+ON。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

OP+ON=27 cm。

1. 由全等得 OM=ON。
2. 所求兩邊和為 36−9=27 cm。

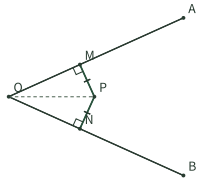
- 找對對應邊並求正確總和。

補練／家課 13

P 在角內，PM⊥OA、PN⊥OB，且 PM=PN=5 cm。哪個結論可直接推出？

A. OP 平分該角；單憑 5 cm 不能決定 OP 的長。　B. OP=5 cm。

C. 整個角一定為 90°。　D. M=N。



幾何示意圖；除作圖任務外，圖形不按比例。

參考答案

第一項；逆命題決定方向，但單一距離不能決定 OP 的長。

1. 垂直等距符合逆命題。
2. 不同角度可有相同垂直距離，卻有不同 OP 長度。

- 指出平分線結論，不憑空加上長度或角度。

補練／家課 14

完成兩句：正向「已知___，證明垂直距離相等」；逆向「已知___，證明內角平分線」。須包括位置及垂直條件。

參考答案

正向：角內點在平分線上，並作兩邊垂足；逆向：角內點到兩邊垂直距離相等。

1. 正向證明用平分線給出頂點等角。
2. 逆向證明用等直角邊及公共斜邊作 HL。
3. 逆向須保留「角內」及「垂直距離」。

- 寫出兩個方向，沒有循環假設。

進階 15

I 在 △ABC 內，並在 A、B 的內角平分線上。D、E、F 分別是 I 到 AB、AC、BC 的垂足。證明 I 亦在 C 的內角平分線上。

參考答案

ID=IE、ID=IF，故 IE=IF；由 C 角內的逆命題，I 在 C 的平分線上。

1. A 角的平分線性質給出 ID=IE。
2. B 角的平分線性質給出 ID=IF。
3. 所以 IE=IF，這是到 CA、CB 的垂直距離。
4. I 在 ∠ACB 內，因此由逆命題得第三條平分線。

- 使用兩次正向性質，再配合角內條件使用逆命題。
- 其他證法若條件完整、推論有據，亦接受。

進階 16

有人令 P=O，得到兩個零距離，便想用 HL 定義射線 OP 為角平分線。說明這個證明設定為何不成立。

參考答案

O、P 不是兩個不同的點，不能這樣確定射線 OP；兩個所謂三角形亦退化。定理的角內點設定不包括頂點。

1. 射線 OP 要求 P≠O。
2. P=O 時沒有可用 HL 的非退化直角三角形。
3. 須按題目保留角內點的假設。

- 指出射線不能如此確定，以及三角形退化兩個問題。