三元方程組：消元、求解與驗算 — 教師解答

七下・正文 67–70 頁・正文第 34–35 課時

按需要選示範與帶做。八題學生核心為先備、獨立及離堂題；補練與延伸按程度選用。

普通班：先備4、短探究5、示範帶做8、獨立15、訂正5、離堂3分鐘。進階班：探究18、整理4、精選練習13、離堂5分鐘。

先備：能用代入或消元解二元方程組，並在全部原方程驗解。

普通班取首個指定例作5分鐘概念示範；進階班完成整個探究。

探究與討論：18 分鐘紙筆：用 x+y+z=9、x−y=−1、y−z=−1，先預測三值次序（3 分）。兩組各選不同未知數，但在各自過程一致地消去它，形成二元方程組再求完整三元解（7 分）。比較並驗算三原式（4 分）。只把第一式總和由 9 改為 12，先預測再核對各值如何改變（3 分）。說明只求兩值為何未完成三元求解（1 分）。不聲稱已有三元互動引擎。

教師示範 1

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=9 \\ (1)x+(-1)y+(0)z=-1 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=-1 \end{cases}$$

參考答案

$x=2,\quad y=3,\quad z=4$。

$$x=2,\quad y=3,\quad z=4$$

1. 第 2 式減去第 1 式的 1 倍，得 $(0)x+(-2)y+(-1)z=-10$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 $\frac{-1}{2}$ 倍，得 $(0)x+(0)y+(\frac{-3}{2})z=-6$。
3. 回代得 $z=4$。
4. 回代得 $y=3$。
5. 回代得 $x=2$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

帶做 2

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=6 \\ (1)x+(-1)y+(0)z=0 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=0 \end{cases}$$

1. 由 $x-y=0$ 寫 $y=\square$。
2. 由 $y-z=0$ 寫 $z=y=\square$。
3. 代入第一式：$x+x+x=6$，所以 $x=\square$；求 y、z，驗算三式。

參考答案

$x=2,\quad y=2,\quad z=2$。

$$x=2,\quad y=2,\quad z=2$$

1. 第 2 式減去第 1 式的 1 倍，得 $(0)x+(-2)y+(-1)z=-6$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 $\frac{-1}{2}$ 倍，得 $(0)x+(0)y+(\frac{-3}{2})z=-3$。
3. 回代得 $z=2$。
4. 回代得 $y=2$。
5. 回代得 $x=2$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

先備 3

檢查 $x=1, y=2, z=3$ 是否為所示方程組的解，須核對每條方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=6 \\ (1)x+(-1)y+(0)z=-1 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=-1 \end{cases}$$

A. 是，每條原方程都成立。

B. 不是，只核對一條就足以否定。

參考答案

是，每條原方程都成立。

1. 第 1 式左邊為 6，右邊為 6。
2. 第 2 式左邊為 -1，右邊為 -1。
3. 第 3 式左邊為 -1，右邊為 -1。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

先備 4

要把三條 x、y、z 方程化成二元方程組，兩條新方程應有甚麼共同特點？

A. 都消去同一未知數，留下相同另外兩個。

B. 一條消 x，另一條只消 y，合起來仍有三個未知數。

C. 兩個右邊都必須為零。

參考答案

都消去同一未知數，留下相同另外兩個。

1. 新的一對須只含同樣兩個未知數。
2. 否則尚未化為二元方程組。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

獨立練習 5

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=12 \\ (1)x+(-1)y+(0)z=2 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=-1 \end{cases}$$

參考答案

$x=5,\quad y=3,\quad z=4$。

$$x=5,\quad y=3,\quad z=4$$

1. 第 2 式減去第 1 式的 1 倍，得 $(0)x+(-2)y+(-1)z=-10$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 $\frac{-1}{2}$ 倍，得 $(0)x+(0)y+(\frac{-3}{2})z=-6$。
3. 回代得 $z=4$。
4. 回代得 $y=3$。
5. 回代得 $x=5$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

獨立練習 6

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=10 \\ (2)x+(-1)y+(0)z=-1 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=2 \end{cases}$$

參考答案

$x=2,\quad y=5,\quad z=3$。

$$x=2,\quad y=5,\quad z=3$$

1. 第 2 式減去第 1 式的 2 倍，得 $(0)x+(-3)y+(-2)z=-21$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 $\frac{-1}{3}$ 倍，得 $(0)x+(0)y+(\frac{-5}{3})z=-5$。
3. 回代得 $z=3$。
4. 回代得 $y=5$。
5. 回代得 $x=2$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

獨立練習 7

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(0)z=5 \\ (0)x+(1)y+(1)z=7 \\ (1)x+(0)y+(1)z=6 \end{cases}$$

參考答案

$x=2,\quad y=3,\quad z=4$。

$$x=2,\quad y=3,\quad z=4$$

1. 第 3 式減去第 1 式的 1 倍，得 $(0)x+(-1)y+(1)z=1$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 -1 倍，得 $(0)x+(0)y+(2)z=8$。
3. 回代得 $z=4$。
4. 回代得 $y=3$。
5. 回代得 $x=2$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

獨立練習 8

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=3 \\ (1)x+(-1)y+(0)z=1 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=1 \end{cases}$$

參考答案

$x=2,\quad y=1,\quad z=0$。

$$x=2,\quad y=1,\quad z=0$$

1. 第 2 式減去第 1 式的 1 倍，得 $(0)x+(-2)y+(-1)z=-2$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 $\frac{-1}{2}$ 倍，得 $(0)x+(0)y+(\frac{-3}{2})z=0$。
3. 回代得 $z=0$。
4. 回代得 $y=1$。
5. 回代得 $x=2$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

離堂題 9

檢查 $x=2, y=3, z=4$ 是否為所示方程組的解，須核對每條方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=9 \\ (1)x+(-1)y+(0)z=-1 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=-1 \end{cases}$$

A. 是，每條原方程都成立。　　B. 不是，只核對一條就足以否定。

參考答案

是，每條原方程都成立。

1. 第 1 式左邊為 9，右邊為 9。
2. 第 2 式左邊為 -1，右邊為 -1。
3. 第 3 式左邊為 -1，右邊為 -1。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

離堂題 10

消元已得 y＝3、z＝4，原第一式為 x＋y＋z＝9。完成求解還要做甚麼？

A. 求 x＝2，再驗算三條原方程。　　B. 停止；兩個值已足夠。
C. 任選 x，不需檢查。

參考答案

求 x＝2，再驗算三條原方程。

1. 把 3、4 代入 x＋y＋z＝9。
2. x＝9−3−4＝2，再驗算完整三元解。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

補練／家課 11

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=7 \\ (1)x+(-1)y+(0)z=2 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=1 \end{cases}$$

參考答案

$x=4,\quad y=2,\quad z=1$。

$$x=4,\quad y=2,\quad z=1$$

1. 第 2 式減去第 1 式的 1 倍，得 $(0)x+(-2)y+(-1)z=-5$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 $\frac{-1}{2}$ 倍，得 $(0)x+(0)y+(\frac{-3}{2})z=\frac{-3}{2}$。
3. 回代得 $z=1$。
4. 回代得 $y=2$。
5. 回代得 $x=4$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

補練／家課 12

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(1)y+(1)z=3 \\ (2)x+(-1)y+(0)z=0 \\ (0)x+(1)y+(-1)z=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

參考答案

$x=\frac{1}{2},\quad y=1,\quad z=\frac{3}{2}$。

$$x=\frac{1}{2},\quad y=1,\quad z=\frac{3}{2}$$

1. 第 2 式減去第 1 式的 2 倍，得 $(0)x+(-3)y+(-2)z=-6$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 $\frac{-1}{3}$ 倍，得 $(0)x+(0)y+(\frac{-5}{3})z=\frac{-5}{2}$。
3. 回代得 $z=\frac{3}{2}$。
4. 回代得 $y=1$。
5. 回代得 $x=\frac{1}{2}$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

補練／家課 13

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (2)x+(1)y+(-1)z=1 \\ (1)x+(-1)y+(1)z=2 \\ (1)x+(1)y+(1)z=6 \end{cases}$$

參考答案

$x=1,\quad y=2,\quad z=3$。

$$x=1,\quad y=2,\quad z=3$$

1. 第 2 式減去第 1 式的 $\frac{1}{2}$ 倍，得 $(0)x+(\frac{-3}{2})y+(\frac{3}{2})z=\frac{3}{2}$。
2. 第 3 式減去第 1 式的 $\frac{1}{2}$ 倍，得 $(0)x+(\frac{1}{2})y+(\frac{3}{2})z=\frac{11}{2}$。
3. 第 3 式減去第 2 式的 $\frac{-1}{3}$ 倍，得 $(0)x+(0)y+(2)z=6$。
4. 回代得 $z=3$。
5. 回代得 $y=2$。
6. 回代得 $x=1$。
7. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

補練／家課 14

解方程組，寫出消元過程，並驗算每條原方程。

$$\begin{cases} (1)x+(-2)y+(0)z=0 \\ (0)x+(1)y+(-2)z=0 \\ (1)x+(1)y+(1)z=21 \end{cases}$$

參考答案

$x=12,\quad y=6,\quad z=3$。

$$x=12,\quad y=6,\quad z=3$$

1. 第 3 式減去第 1 式的 1 倍，得 $(0)x+(3)y+(1)z=21$。
2. 第 3 式減去第 2 式的 3 倍，得 $(0)x+(0)y+(7)z=21$。
3. 回代得 $z=3$。
4. 回代得 $y=6$。
5. 回代得 $x=12$。
6. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

進階 15

三種票單價為 2、3、5 元，張數分別 x、y、z。共 9 張、收入 33 元，前兩種合共 5 張。列三元方程組求解並核對整數張數。

參考答案

$x = 2,\quad y = 3,\quad z = 4$。

$$x = 2,\quad y = 3,\quad z = 4$$

1. 張數給 $x + y + z = 9$，收入給 $2x + 3y + 5z = 33$，另有 $x + y = 5$。
2. 第 2 式減去第 1 式的 2 倍，得 $(0)x + (1)y + (3)z = 15$。
3. 第 3 式減去第 1 式的 1 倍，得 $(0)x + (0)y + (-1)z = -4$。
4. 回代得 $z = 4$。
5. 回代得 $y = 3$。
6. 回代得 $x = 2$。
7. 把完整解代回每條原方程，各左邊都等於原右邊。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

進階 16

寫了三條方程，是否必定唯一確定三個值？描述此方程組的實數解。

$$\begin{cases} (1)x + (1)y + (1)z = 6 \\ (2)x + (2)y + (2)z = 12 \\ (1)x + (-1)y + (0)z = 0 \end{cases}$$

參考答案

$x = t,\ y = t,\ z = 6 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$；無限多解。

$$x = t,\ y = t,\ z = 6 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$$

1. 第二式是第一式兩倍，第三式給 x=y。
2. 令 x=y=t，得 z=6−2t，各原式均成立。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。