實數：分類、界與近似 — 教師解答

七下・正文 35–38 頁・正文第 18–19 課時

按需要選示範與帶做。八題學生核心為先備、獨立及離堂題；補練與延伸按程度選用。

普通班：先備4、短探究5、示範帶做8、獨立15、訂正5、離堂3分鐘。進階班：探究18、整理4、精選練習13、離堂5分鐘。

先備：分清算術平方根與兩個平方根，能比較非負平方及取小數近似。

普通班取首個指定例作5分鐘概念示範；進階班完成整個探究。

探究與討論：18 分鐘 roots 探究，目標面積為 2：預測 1.4 是否精確值（3 分）。目標不變，只把細分由 0 位改為 1、2 位；試邊長 1.4、1.41、1.42，平方並記錄精確上下界比較（8 分）。只把目標改為 9，解釋為何兩界合成一個精確值（3 分）。寫 $\sqrt{2}$ 的嚴格界，說明窄區間或有限顯示都不能證明整個小數展開或無理性（4 分）。

教師示範 1

用 $\frac{7}{5}$、$\frac{3}{2}$ 為 $\sqrt{2}$ 寫嚴格上下界，以平方核對。

參考答案

$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$。

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

1. 兩界非負，平方保持大小次序。
2. 平方分別是 $\frac{49}{25}$、$\frac{9}{4}$，且 $\frac{49}{25} < 2 < \frac{9}{4}$。
3. 所以算術平方根嚴格介乎兩界之間。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

帶做 2

已知 $\sqrt{5} \approx 2.2361$，估算 $4 - \sqrt{5}$ 至小數點後兩位。

1. 代入所給小數：$4 - \sqrt{5} \approx 4 - 2.2361$。
2. 取近似前先算 $4 - 2.2361 = \square$。
3. 小數第三位是 ____，取兩位小數的估計為 ____。

參考答案

1.76。

$$4 - \sqrt{5} \approx 1.76$$

1. 用所給近似值：4−2.2361＝1.7639。
2. 取兩位小數得約 1.76，不能稱精確等號。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

先備 3

把 $\sqrt{9}$ 分類。

A. 有理數。　　B. 無理數。

參考答案

有理數。

1. $\sqrt{9}=3$，是整數。
2. 依精確值或循環／不循環定義判斷，不能只看有限計算機顯示。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

先備 4

把 0.125 分類。

A. 無理數。　　B. 有理數。

參考答案

有理數。

1. $0.125=1/8$，是整數之比。
2. 依精確值或循環／不循環定義判斷，不能只看有限計算機顯示。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

獨立練習 5

把 $0.\overline{12}$ 分類。上劃線表示該部分無限循環。

A. 有理數。　　B. 無理數。

參考答案

有理數。

1. 12 無限重複，值為 $12/99=4/33$。
2. 依精確值或循環／不循環定義判斷，不能只看有限計算機顯示。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

獨立練習 6

比較 $-\sqrt{5}$、$-\sqrt{6}$，解釋負號的作用。

參考答案

$-\sqrt{5}>-\sqrt{6}$。

$$-\sqrt{5}>-\sqrt{6}$$

1. $5<6$，所以非負算術平方根有 $\sqrt{5}<\sqrt{6}$。
2. 取相反數後大小次序反轉。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

獨立練習 7

求 $|-\sqrt{7}|$ 及 $-\sqrt{7}$ 的相反數。

參考答案

兩者都是 $\sqrt{7}$。

$$|-\sqrt{7}|=\sqrt{7}$$

1. $-\sqrt{7}$ 是負數，到零的距離是 $\sqrt{7}$。
2. 取相反數改變符號，也得 $\sqrt{7}$。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

獨立練習 8

用 $\frac{173}{100}$、$\frac{174}{100}$ 為 $\sqrt{3}$ 寫嚴格上下界，以平方核對。

參考答案

$\frac{173}{100}<\sqrt{3}<\frac{174}{100}$。

$$\frac{173}{100}<\sqrt{3}<\frac{174}{100}$$

1. 兩界非負，平方保持大小次序。
2. 平方分別是 $\frac{29929}{10000}$、$\frac{30276}{10000}$，且 $\frac{29929}{10000}<3<\frac{30276}{10000}$。
3. 所以算術平方根嚴格介乎兩界之間。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

離堂題 9

由 $1.41^2<2<1.42^2$ 能支持哪項？

A. $\sqrt{2}=1.41$　　B. 這兩次計算已證明 $\sqrt{2}$ 的每個數位。

C. $1.41<\sqrt{2}<1.42$

參考答案

$1.41<\sqrt{2}<1.42$

1. 兩端為正，平方把 2 夾在中間。
2. 這證明界，不是精確等號或整個小數展開。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

離堂題 10

把 $\sqrt{2}$ 分類。

A. 有理數。　　B. 無理數。

參考答案

無理數。

1. 2 不是完全平方數，使用已學的 $\sqrt{2}$ 無理性結論。
2. 依精確值或循環／不循環定義判斷，不能只看有限計算機顯示。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

補練／家課 11

把 $-\sqrt{16}$ 分類。

A. 有理數。　　B. 無理數。

參考答案

有理數。

1. $-\sqrt{16}=-4$。
2. 依精確值或循環／不循環定義判斷，不能只看有限計算機顯示。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

補練／家課 12

把 $\sqrt[3]{27}$ 分類。

A. 無理數。　　B. 有理數。

參考答案

有理數。

1. 27 的立方根是 3。
2. 依精確值或循環／不循環定義判斷，不能只看有限計算機顯示。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

補練／家課 13

精確化簡 $3\sqrt{2}-\sqrt{2}$，不要以小數代替 $\sqrt{2}$。

$$3\sqrt{2}-\sqrt{2}$$

參考答案

$2\sqrt{2}$。

$$2\sqrt{2}$$

1. 提出共同實數 $\sqrt{2}$：$(3-1)\sqrt{2}$。
2. 精確結果為 $2\sqrt{2}$。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

補練／家課 14

用 2、3 為 $\sqrt{5}$ 寫嚴格上下界，以平方核對。

參考答案

$2<\sqrt{5}<3$。

$$2<\sqrt{5}<3$$

1. 兩界非負，平方保持大小次序。
2. 平方分別是 $\frac{4}{1}$、$\frac{9}{1}$，且 $\frac{4}{1}<5<\frac{9}{1}$。
3. 所以算術平方根嚴格介乎兩界之間。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

進階 15

螢幕顯示 0.333333。單靠此有限顯示，能否判斷原數是 1/3 還是有限小數？說明。

參考答案

不能。1/3 與 333333/1000000 都可能顯示成這樣，須知道原數定義。

1. 四捨五入顯示省略了之後數位。
2. 分類前要有精確表示或指定循環規則。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。

進階 16

用 $\frac{223}{100}$、$\frac{224}{100}$ 為 $\sqrt{5}$ 寫嚴格上下界，以平方核對。

參考答案

$\frac{223}{100} < \sqrt{5} < \frac{224}{100}$。

$$\frac{223}{100} < \sqrt{5} < \frac{224}{100}$$

1. 兩界非負，平方保持大小次序。
2. 平方分別是 $\frac{49729}{10000}$、$\frac{50176}{10000}$，且 $\frac{49729}{10000} < 5 < \frac{50176}{10000}$。
3. 所以算術平方根嚴格介乎兩界之間。

- 使用已知條件，寫出有根據的中間步驟。
- 準確寫出所求，並核對結果。