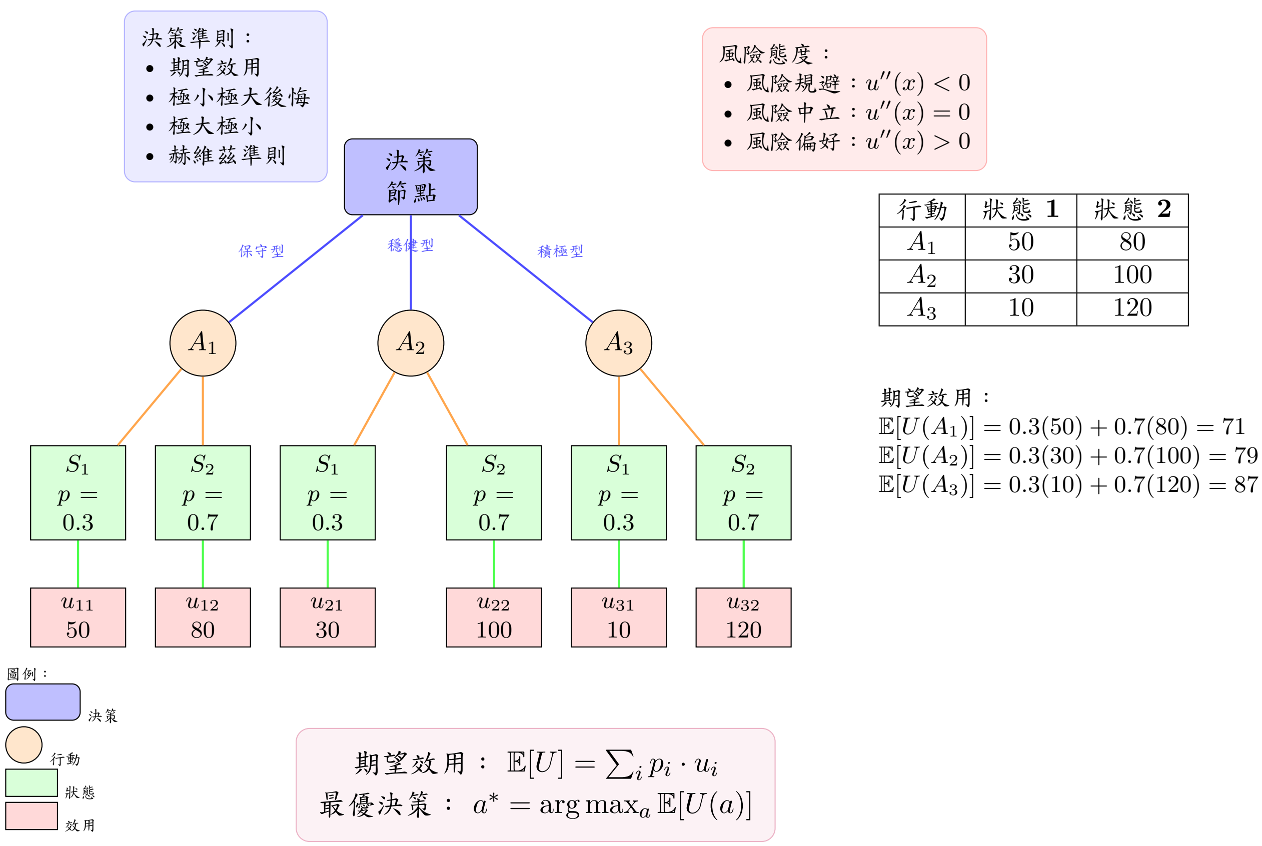
數學建模補充教材

決策理論

理論與應用



Kenneth 程淑鍵

最後更新：July 8, 2025

在不確定性下做出最優決策

Contents

Chapter 1

決策理論基礎

1.1 決策理論導論

決策理論為在不確定性下做出最優選擇提供了數學框架。它結合了機率理論、效用理論和最佳化理論，幫助決策者在面對多種替代方案和不確定結果時選擇最佳行動方案。

定義 1.1 (決策問題)**.** 一個決策問題包含：

- 可能行動的集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- 可能自然狀態的集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$
- 效用函數 $u : A \times S \to \mathbb{R}$，為每個行動-狀態對指派效用值
- 狀態上的機率分佈 $p(s)$（如果已知）

決策問題

投資組合範例：投資者必須在三種投資策略中選擇：

- a_1：保守型投資組合（60% 債券，40% 股票）
- a_2：平衡型投資組合（40% 債券，60% 股票）
- a_3：積極型投資組合（20% 債券，80% 股票）

經濟狀況（狀態）可能是：

- s_1：經濟衰退
- s_2：經濟穩定
- s_3：經濟繁榮

1.2 效用理論

定義 1.2 (效用函數)**.** 效用函數 $u(x)$ 表示決策者從結果 x 中獲得的滿足或價值。它捕捉決策者的偏好和風險態度。

定理

馮・諾伊曼-摩根斯頓期望效用定理：如果決策者的偏好滿足完備性、遞移性、連續性和獨立性公理，則存在效用函數 u，使得決策者的選擇最大化期望效用：

$$\mathbb{E}[U(a)] = \sum_{i=1}^{m} p(s_i) \cdot u(a, s_i)$$

1.2.1 風險態度和效用函數

效用函數的曲率決定風險態度：

- 風險規避： $u''(x) < 0$（凹效用函數）
- 風險中立： $u''(x) = 0$（線性效用函數）
- 風險偏好： $u''(x) > 0$（凸效用函數）

範例 1.1 (風險規避說明)**.** 考慮兩個投資選項：

- 選項 **A**：保證獲得 50,000 元
- 選項 **B**： 50% 機會獲得 100,000 元，50% 機會獲得 0 元

兩個選項具有相同的期望值：$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B] = 50,000$ 元。
對於風險規避的投資者，其效用函數為 $u(x) = \sqrt{x}$：

$$u(A) = \sqrt{50,000} = 223.6 \tag{1.1}$$

$$\mathbb{E}[u(B)] = 0.5 \cdot \sqrt{100,000} + 0.5 \cdot \sqrt{0} = 0.5 \cdot 316.2 + 0 = 158.1 \tag{1.2}$$

由於 $u(A) > \mathbb{E}[u(B)]$，風險規避的投資者偏好保證選項。

1.2.2 風險規避係數

定義 1.3 (阿羅-普拉特風險規避係數)**.** 絕對風險規避係數定義為：

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

相對風險規避係數為：

$$r_R(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$$

範例 1.2 (計算風險規避係數)**.** 對於對數效用函數 $u(x) = \ln(x)$：

$$u'(x) = \frac{1}{x} \tag{1.3}$$

$$u''(x) = -\frac{1}{x^2} \tag{1.4}$$

因此：

$$r_A(x) = -\frac{-1/x^2}{1/x} = \frac{1}{x} \tag{1.5}$$

$$r_R(x) = -\frac{x \cdot (-1/x^2)}{1/x} = 1 \tag{1.6}$$

對數效用表現出遞減絕對風險規避和恆定相對風險規避。

1.3 不確定性下的決策準則

1.3.1 期望效用準則

當機率已知時，最優決策最大化期望效用：

$$a^* = \text{argmax}_{a\in A}\mathbb{E}[U(a)] = \text{argmax}_{a\in A}\sum_{i=1}^{m} p(s_i)\cdot u(a, s_i)$$

範例 1.3 (期望效用計算). 考慮以下收益矩陣的投資問題（單位：千元）:

	衰退 (s_1)	穩定 (s_2)	繁榮 (s_3)
保守型 (a_1)	30	50	60
平衡型 (a_2)	10	60	90
積極型 (a_3)	-20	80	150

假設機率：$p(s_1) = 0.2$，$p(s_2) = 0.5$，$p(s_3) = 0.3$。
對於風險中立的投資者（線性效用 $u(x) = x$）:

$$\mathbb{E}[U(a_1)] = 0.2(30) + 0.5(50) + 0.3(60) = 49 \tag{1.7}$$
$$\mathbb{E}[U(a_2)] = 0.2(10) + 0.5(60) + 0.3(90) = 59 \tag{1.8}$$
$$\mathbb{E}[U(a_3)] = 0.2(-20) + 0.5(80) + 0.3(150) = 81 \tag{1.9}$$

最優選擇是 a_3（積極型投資組合）。

1.3.2 完全不確定性下的準則

當機率未知時，可以應用幾種準則：

極大極小準則（沃爾德準則）

選擇最大化最小可能收益的行動：

$$a^* = \text{argmax}_{a\in A}\min_{s\in S} u(a, s)$$

極大極大準則

選擇最大化最大可能收益的行動：

$$a^* = \text{argmax}_{a\in A}\max_{s\in S} u(a, s)$$

極小極大後悔準則（薩維奇準則）

首先，計算後悔矩陣，其中後悔是機會損失：

$$R(a, s) = \max_{a'\in A} u(a', s) - u(a, s)$$

然後選擇最小化最大後悔的行動：

$$a^* = \text{argmin}_{a\in A}\max_{s\in S} R(a, s)$$

詳細解答

投資範例的完整解答：
使用前一個範例的收益矩陣：
第 **1** 步：極大極小準則

$$\min_s u(a_1, s) = \min\{30, 50, 60\} = 30 \tag{1.10}$$
$$\min_s u(a_2, s) = \min\{10, 60, 90\} = 10 \tag{1.11}$$
$$\min_s u(a_3, s) = \min\{-20, 80, 150\} = -20 \tag{1.12}$$

最優選擇：a_1（保守型），$\max\{30, 10, -20\} = 30$。
第 **2** 步：極大極大準則

$$\max_s u(a_1, s) = \max\{30, 50, 60\} = 60 \tag{1.13}$$
$$\max_s u(a_2, s) = \max\{10, 60, 90\} = 90 \tag{1.14}$$
$$\max_s u(a_3, s) = \max\{-20, 80, 150\} = 150 \tag{1.15}$$

最優選擇：a_3（積極型），$\max\{60, 90, 150\} = 150$。
第 **3** 步：極小極大後悔準則
首先，計算每個狀態的最大收益：

$$\max_a u(a, s_1) = 30 \quad \text{（來自}a_1\text{）} \tag{1.16}$$
$$\max_a u(a, s_2) = 80 \quad \text{（來自}a_3\text{）} \tag{1.17}$$
$$\max_a u(a, s_3) = 150 \quad \text{（來自}a_3\text{）} \tag{1.18}$$

後悔矩陣：

	s_1	s_2	s_3
a_1	$30 - 30 = 0$	$80 - 50 = 30$	$150 - 60 = 90$
a_2	$30 - 10 = 20$	$80 - 60 = 20$	$150 - 90 = 60$
a_3	$30 - (-20) = 50$	$80 - 80 = 0$	$150 - 150 = 0$

最大後悔：$\max_s R(a_1, s) = 90$，$\max_s R(a_2, s) = 60$，$\max_s R(a_3, s) = 50$。
最優選擇：a_3（積極型），$\min\{90, 60, 50\} = 50$。

赫維茨準則

結合樂觀和悲觀方法，使用係數 $\alpha \in [0, 1]$：

$$a^* = \text{argmax}_{a \in A} \left[\alpha \max_{s \in S} u(a, s) + (1 - \alpha) \min_{s \in S} u(a, s) \right]$$

當 $\alpha = 1$ 時，這簡化為極大極大；當 $\alpha = 0$ 時，簡化為極大極小。

練習 **1.1.** 對於投資範例，使用 $\alpha = 0.6$ 的赫維茨準則計算最優決策。解釋此係數的經濟意義。

1.4 資訊的價值

定義 1.4 (完美資訊的期望價值（EVPI）). EVPI 表示決策者應該願意為關於自然狀態的完美資訊支付的最大金額：

$$\text{EVPI} = \mathbb{E}[U^*] - \max_a \mathbb{E}[U(a)]$$

其中 $\mathbb{E}[U^*] = \sum_{i=1}^m p(s_i) \max_a u(a, s_i)$ 是具有完美資訊的期望效用。

範例 1.4 (計算 EVPI)**.** 使用我們的投資範例：

第 **1** 步：具有完美資訊的期望效用

$$\mathbb{E}[U^*] = p(s_1) \max_a u(a, s_1) + p(s_2) \max_a u(a, s_2) + p(s_3) \max_a u(a, s_3) \tag{1.19}$$

$$= 0.2(30) + 0.5(80) + 0.3(150) \tag{1.20}$$

$$= 6 + 40 + 45 = 91 \tag{1.21}$$

第 **2** 步：無資訊時的最大期望效用從我們之前的計算：$\max_a \mathbb{E}[U(a)] = 81$（由 a_3 實現）。

第 **3** 步： EVPI 計算 $\text{EVPI} = 91 - 81 = 10$ 千元。

這意味著投資者應該願意為關於未來經濟狀況的完美資訊支付最多 10,000 元。

Chapter 2

賽局理論與策略決策

2.1 賽局理論導論

賽局理論將決策理論擴展到策略情況，在這些情況下，結果不僅取決於你的決策，還取決於其他理性參與者的決策。

定義 2.1 (策略形式賽局)**.** 策略形式賽局包含：

- 有限的參與者集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- 每個參與者 $i \in N$ 的純策略集合 S_i
- 每個參與者 i 的收益函數 $u_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$

2.2 納許均衡

定義 2.2 (納許均衡)**.** 策略組合 $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ 是納許均衡，如果對每個參與者 i：

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*)$$

對所有 $s_i \in S_i$ 成立。

換句話說，任何參與者都無法通過單方面偏離來改善其收益。

定理

納許存在定理：每個有限策略形式賽局都至少有一個納許均衡（可能是混合策略）。

2.2.1 計算 2×2 賽局中的納許均衡

範例 2.1 (尋找純策略納許均衡)**.** 考慮以下協調賽局：

	左	右
上	(2,1)	(0,0)
下	(0,0)	(1,2)

分析：

- 如果參與者 1 選擇上，參與者 2 的最佳回應是左（收益 1 vs 0）

- 如果參與者 1 選擇下，參與者 2 的最佳回應是右（收益 2 vs 0）
- 如果參與者 2 選擇左，參與者 1 的最佳回應是上（收益 2 vs 0）
- 如果參與者 2 選擇右，參與者 1 的最佳回應是下（收益 1 vs 0）

納許均衡：(上，左）和（下，右）
兩者都是協調均衡，參與者協調相同的選擇。

2.2.2 混合策略納許均衡

定義 2.3 (混合策略)**.** 參與者 i 的混合策略是 S_i 中純策略的機率分佈 σ_i。

範例 2.2 (計算混合策略均衡)**.** 考慮性別戰爭賽局：

	歌劇	足球
歌劇	(2,1)	(0,0)
足球	(0,0)	(1,2)

設 $p =$ 參與者 1 選擇歌劇的機率，$q =$ 參與者 2 選擇歌劇的機率。
第 **1** 步：參與者 1 的期望收益

$$EU_1(\text{歌劇}) = 2q + 0(1-q) = 2q \tag{2.1}$$
$$EU_1(\text{足球}) = 0q + 1(1-q) = 1-q \tag{2.2}$$

對於混合策略均衡：$2q = 1 - q \Rightarrow q^* = 1/3$
第 **2** 步：參與者 2 的期望收益

$$EU_2(\text{歌劇}) = 1p + 0(1-p) = p \tag{2.3}$$
$$EU_2(\text{足球}) = 0p + 2(1-p) = 2-2p \tag{2.4}$$

對於混合策略均衡：$p = 2 - 2p \Rightarrow p^* = 2/3$
混合策略納許均衡： $(p^*, q^*) = (2/3, 1/3)$

2.3 優勢策略

定義 2.4 (優勢策略)**.**

- 如果對所有 s_{-i}，$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$，則策略 s_i 嚴格優於 s_i'
- 如果對所有 s_{-i}，$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$，且對某些 s_{-i} 嚴格不等式成立，則策略 s_i 弱優於 s_i'

範例 2.3 (具有優勢策略的囚徒困境)**.**

	合作	背叛
合作	(3,3)	(0,5)
背叛	(5,0)	(1,1)

參與者 **1** 的分析：

- 如果參與者 2 合作：背叛給出 $5 > 3$（合作）
- 如果參與者 2 背叛：背叛給出 $1 > 0$（合作）

對兩個參與者來說，背叛都嚴格優於合作。
通過反覆消除的解：(背叛，背叛）是唯一的納許均衡。
這說明了合作的悲劇：理性的個人行為導致社會次優結果。

2.4 經濟學和商業中的應用

2.4.1 古諾競爭

實際應用

古諾雙頭壟斷模型：兩家企業通過同時選擇產量進行競爭。
設定：

- 市場需求：$P(Q) = a - bQ$，其中 $Q = q_1 + q_2$
- 企業 i 的成本：$C_i(q_i) = c_i q_i$
- 企業 i 的利潤：$\pi_i(q_1, q_2) = q_i[a - b(q_1 + q_2)] - c_i q_i$

解：企業 1 的一階條件：

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - b(q_1 + q_2) - bq_1 - c_1 = 0$$

這給出反應函數：

$$q_1^*(q_2) = \frac{a - c_1 - bq_2}{2b}$$

類似地，對企業 2：

$$q_2^*(q_1) = \frac{a - c_2 - bq_1}{2b}$$

納許均衡產量：

$$q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b} \tag{2.5}$$

$$q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b} \tag{2.6}$$

2.4.2 拍賣理論

案例研究

第一價格密封拍賣：
設定：n 個投標者競爭單一物品。每個投標者 i 的私人評價 v_i 從 $[0, 1]$ 的均勻分佈中抽取。
策略：每個投標者提交密封投標 b_i。最高投標者獲勝並支付其投標。
對稱納許均衡：在均衡中，每個投標者使用相同的投標函數 $b(v)$。
最優投標策略是：

$$b^*(v) = \frac{n-1}{n} \cdot v$$

關鍵見解：

- 投標者的投標低於其真實評價
- 更多競爭（更高的 n）導致更高的投標
- 當 $n \to \infty$ 時，$b^*(v) \to v$（投標接近評價）

期望收入：

$$R = \mathbb{E}[\max\{b_1, \ldots, b_n\}] = \frac{n-1}{n+1}$$

練習 **2.1.** 考慮一個生產差異化產品的兩家企業市場。需求函數為：

$$q_1 = a - p_1 + \theta p_2 \tag{2.7}$$

$$q_2 = a - p_2 + \theta p_1 \tag{2.8}$$

其中 $\theta \in [0, 1]$ 衡量替代性程度。

當企業在價格上同時競爭（柏川競爭）時，找出納許均衡價格。分析當 θ 從 0（獨立產品）變化到 1（完全替代品）時均衡如何變化。

Chapter 3

多準則決策分析

3.1 MCDA 導論

多準則決策分析（MCDA）處理涉及多個、往往相衝突目標的決策。與單目標最佳化不同，MCDA 尋求代表競爭準則間最佳權衡的解決方案。

定義 **3.1** (多準則決策問題)**.** 多準則決策問題包含：

- 替代方案集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- 準則集合 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$
- 效能矩陣 X，其中 x_{ij} 表示替代方案 a_i 在準則 c_j 上的效能
- 權重集合 $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$，其中 $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$

3.2 帕雷圖最優性

定義 **3.2** (帕雷圖優勢)**.** 替代方案 a_i 帕雷圖優於替代方案 a_j（記為 $a_i \succ a_j$），如果：

- 對所有準則 k，$x_{ik} \geq x_{jk}$（在所有準則上至少一樣好）
- 對至少一個準則 k，$x_{ik} > x_{jk}$（在至少一個準則上嚴格更好）

定義 **3.3** (帕雷圖最優解)**.** 如果沒有其他替代方案帕雷圖優於替代方案 a_i，則 a_i 是帕雷圖最優（或帕雷圖有效）的。

範例 **3.1** (帕雷圖前沿分析)**.** 考慮在兩個準則上評估的三個投資選項：

替代方案	期望報酬（%）	風險（標準差%）
A	8	15
B	12	20
C	10	25
D	6	18

優勢分析：

- A vs B：B 有更高報酬和更高風險（無優勢）
- A vs C：A 有較低報酬但更低風險（無優勢）

- A vs D：A 有更高報酬和更低風險（A 優於 D）
- B vs C：B 有更高報酬和更低風險（B 優於 C）
- B vs D：B 有更高報酬但更高風險（無優勢）
- C vs D：C 有更高報酬但更高風險（無優勢）

帕雷圖最優集合： $\{A, B\}$（C 和 D 被優勢）

3.3 MCDA 方法

3.3.1 簡單加權法（SAW）

加權和方法將所有準則合併為單一分數：

$$S(a_i) = \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot \bar{x}_{ij}$$

其中 $\bar{x}_{ij}$ 是替代方案 i 在準則 j 上的標準化效能。

範例 3.2 (完整 SAW 分析)**.** 考慮筆記型電腦選擇，資料如下：

筆記型電腦	價格（元）	效能	電池（小時）	重量（公斤）
A	800	85	8	2.1
B	1200	95	6	1.8
C	1000	90	10	2.3

權重：價格（30%），效能（40%），電池（20%），重量（10%）
第 **1** 步：標準化矩陣
對效益準則（效能、電池）- 越高越好：

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_i x_{ij}}$$

對成本準則（價格、重量）- 越低越好：

$$\bar{x}_{ij} = \frac{\min_i x_{ij}}{x_{ij}}$$

標準化矩陣：

筆記型電腦	價格	效能	電池	重量
A	1.00	0.89	0.80	0.86
B	0.67	1.00	0.60	1.00
C	0.80	0.95	1.00	0.78

第 **2** 步：計算加權分數

$$S(A) = 0.30(1.00) + 0.40(0.89) + 0.20(0.80) + 0.10(0.86) = 0.902 \tag{3.1}$$
$$S(B) = 0.30(0.67) + 0.40(1.00) + 0.20(0.60) + 0.10(1.00) = 0.821 \tag{3.2}$$
$$S(C) = 0.30(0.80) + 0.40(0.95) + 0.20(1.00) + 0.10(0.78) = 0.898 \tag{3.3}$$

排名： A (0.902) $>$ C (0.898) $>$ B (0.821)

3.3.2 TOPSIS 方法

TOPSIS（理想解相似性偏好排序技術）根據替代方案與理想解和反理想解的距離對其進行排名。

1: 標準化決策矩陣
2: 計算加權標準化矩陣
3: 確定正理想解（PIS）和負理想解（NIS）
4: 計算與 PIS 和 NIS 的分離度量
5: 計算與理想解的相對接近度
6: 按接近度指數排名替代方案

詳細解答

筆記型電腦範例的完整 **TOPSIS** 解答：
第 **1** 和 **2** 步：使用 SAW 的加權標準化矩陣：

筆記型電腦	價格	效能	電池	重量
A	0.30	0.356	0.16	0.086
B	0.20	0.40	0.12	0.10
C	0.24	0.38	0.20	0.078

第 **3** 步：確定理想解

$$A^+ = (\max\{0.30, 0.20, 0.24\}, \max\{0.356, 0.40, 0.38\}, \max\{0.16, 0.12, 0.20\}, \max\{0.086, 0.10, 0.078\}) \tag{3.4}$$

$$= (0.30, 0.40, 0.20, 0.10) \tag{3.5}$$

$$A^- = (0.20, 0.356, 0.12, 0.078) \tag{3.6}$$

第 **4** 步：計算分離度量

$$d_A^+ = \sqrt{(0.30-0.30)^2 + (0.356-0.40)^2 + (0.16-0.20)^2 + (0.086-0.10)^2} = 0.0616 \tag{3.7}$$

$$d_B^+ = \sqrt{(0.20-0.30)^2 + (0.40-0.40)^2 + (0.12-0.20)^2 + (0.10-0.10)^2} = 0.1281 \tag{3.8}$$

$$d_C^+ = \sqrt{(0.24-0.30)^2 + (0.38-0.40)^2 + (0.20-0.20)^2 + (0.078-0.10)^2} = 0.0721 \tag{3.9}$$

$$d_A^- = \sqrt{(0.30-0.20)^2 + (0.356-0.356)^2 + (0.16-0.12)^2 + (0.086-0.078)^2} = 0.1077 \tag{3.10}$$

$$d_B^- = \sqrt{(0.20-0.20)^2 + (0.40-0.356)^2 + (0.12-0.12)^2 + (0.10-0.078)^2} = 0.0494 \tag{3.11}$$

$$d_C^- = \sqrt{(0.24-0.20)^2 + (0.38-0.356)^2 + (0.20-0.12)^2 + (0.078-0.078)^2} = 0.0894 \tag{3.12}$$

第 **5** 步：計算接近度係數

$$CC_A = \frac{d_A^-}{d_A^+ + d_A^-} = \frac{0.1077}{0.0616 + 0.1077} = 0.636 \tag{3.13}$$

$$CC_B = \frac{d_B^-}{d_B^+ + d_B^-} = \frac{0.0494}{0.1281 + 0.0494} = 0.278 \tag{3.14}$$

$$CC_C = \frac{d_C^-}{d_C^+ + d_C^-} = \frac{0.0894}{0.0721 + 0.0894} = 0.554 \tag{3.15}$$

TOPSIS 排名：A (0.636) > C (0.554) > B (0.278)

3.3.3 層次分析法（AHP）

AHP 使用成對比較來確定準則權重和替代方案偏好。

定義 3.4 (成對比較矩陣)**.** 成對比較矩陣 M 是 $n \times n$ 矩陣，其中 m_{ij} 表示準則 i 相對於準則 j 的相對重要性：

- $m_{ij} = 1/m_{ji}$（互惠性）
- $m_{ii} = 1$（對角線元素）
- $m_{ij} > 0$ 對所有 i, j

定義 3.5 (一致性比率)**.** 一致性比率衡量成對比較的一致性：

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

其中 $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$ 是一致性指數，RI 是隨機一致性指數。

$CR < 0.10$ 表示可接受的一致性。

範例 3.3 (AHP 權重計算)**.** 考慮四個準則的成對比較：品質（Q）、成本（C）、交期（D）、服務（S）。

成對比較矩陣：

	Q	C	D	S
Q	1	3	5	7
C	1/3	1	3	5
D	1/5	1/3	1	3
S	1/7	1/5	1/3	1

第 **1** 步：計算列和 $\sum_i m_{i1} = 1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 = 1.676$
第 **2** 步：標準化矩陣並計算權重優先權向量（權重）作為主特徵向量獲得：$w = (0.558, 0.264, 0.129, 0.049)$
第 **3** 步：檢查一致性 $\lambda_{\max} = 4.037$，$CI = 0.012$，$RI = 0.90$，$CR = 0.014 < 0.10$

3.4 MCDA 中的敏感性分析

探索

權重敏感性分析：
方法：

1. 系統性地變化每個權重（例如，±10%，±20%）
2. 重新計算替代方案排名
3. 識別排名變化的關鍵權重範圍
4. 確定解的穩健性

關鍵問題：

- 哪些權重最影響排名？
- 改變頂級替代方案所需的最小權重變化是什麼？

- 是否存在在權重變化中保持最優的主導替代方案？

實際重要性：真實決策者往往有不精確的偏好。敏感性分析有助於識別這些不精確性何時對最終決策重要。

練習 **3.1.** 一家公司基於四個準則選擇供應商：品質（40%）、成本（30%）、交期（20%）和彈性（10%）。

供應商	品質	成本（元）	交期（天）	彈性
A	95	1000	5	8
B	90	800	7	9
C	98	1200	3	7

1. 應用 SAW 和 TOPSIS 方法 2. 比較獲得的排名 3. 通過將品質權重從 20% 變化到 60% 進行敏感性分析 4. 討論任何排名變化的實際意義

Chapter 4

行為決策理論

4.1 行為決策理論導論

傳統決策理論假設決策者是完全理性的，具有穩定偏好、無限認知能力和完整的資訊處理能力。然而，大量實驗證據顯示系統性偏離這些假設。

定義 **4.1** (描述性 vs. 規範性理論). • 規範性理論：規定理性代理人應該如何做出決策

- 描述性理論：描述人們實際上如何做出決策
- 指導性理論：為改善決策制定提供實用指導

4.2 展望理論

定理

展望理論（**Kahneman & Tversky, 1979**）:
展望理論通過兩個階段描述風險下的決策制定：

1. 編輯階段：使用編碼、組合、分離和抵消等操作重構決策問題
2. 評估階段：使用價值函數和機率加權函數評估展望

展望的總體價值是：

$$V = \sum_i w(p_i)v(x_i)$$

其中 $w(p_i)$ 是決策權重，$v(x_i)$ 是結果 x_i 的價值。

4.2.1 價值函數特性

展望理論價值函數有三個關鍵特徵：

定義 **4.2** (價值函數).

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{如果} x \geq 0 \text{（收益）} \\ -\lambda(-x)^\beta & \text{如果} x < 0 \text{（損失）} \end{cases}$$

其中：

- 參考點依賴： $v(0) = 0$（結果相對於參考點評估）
- 損失規避： $\lambda > 1$（損失比收益更突出）
- 敏感性遞減： $\alpha, \beta < 1$（邊際價值遞減）

範例 4.1 (損失規避展示)**.** 考慮兩個展望：

- 展望 **A**：確定獲得 100 元
- 展望 **B**： 50% 機會獲得 200 元，50% 機會獲得 0 元

兩者具有相同的期望值（100 元），但大多數人偏好 A。
現在考慮：

- 展望 **C**：確定損失 100 元
- 展望 **D**： 50% 機會損失 200 元，50% 機會損失 0 元

大多數人偏好 D（面臨損失時的風險尋求選項）。
解釋：價值函數對收益是凹的（風險規避），對損失是凸的（風險尋求）。

4.2.2 機率加權

定義 4.3 (機率加權函數)**.**

$$w(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}}$$

關鍵特性：

- $w(0) = 0$ 且 $w(1) = 1$
- 逆 S 形：小機率過重，中高機率低估
- 典型參數：$\gamma \approx 0.61$

範例 4.2 (機率加權效應)**.** 彩票行為：

- 大收益的小機率（彩票）: $w(0.001) \approx 0.032$ vs. 客觀 0.001
- 人們過度重視微小的獲勝機會，使彩票有吸引力

保險行為：

- 大損失的小機率：$w(0.01) \approx 0.079$ vs. 客觀 0.01
- 人們過度重視小災難機率，使保險有吸引力

這解釋了為什麼同一人可能既買彩票又買保險。

4.3 認知偏誤和啟發式

4.3.1 可得性啟發式

定義 4.4 (可得性啟發式)**.** 人們根據例子在心中浮現的容易程度來估計事件的機率。

實際應用

醫療診斷範例：
急診室醫生可能高估他們最近遇到的戲劇性但罕見疾病的機率，導致：

- 對罕見疾病過度檢測
- 對常見疾病診斷不足
- 機率評估中的系統性偏誤

緩解策略：

- 系統性地使用基準率資訊
- 實施決策支援系統
- 定期校準訓練

4.3.2 錨定與調整

定義 4.5 (錨定偏誤)**.** 人們從初始值（錨點）開始進行估計，但調整不足。

範例 4.3 (談判中的錨定)**.** 情境：市場價值為 80,000 元職位的薪資談判。
情況 **1**：雇主開價 60,000 元

- 求職者可能在 70,000 元左右成交
- 錨點將最終協議拉低

情況 **2**：求職者開價 95,000 元

- 雇主可能反價 85,000 元左右
- 錨點將最終協議拉高

策略意涵：即使雙方都知道市場價值，第一個報價仍顯著影響最終結果。

4.3.3 框架效應

定義 4.6 (框架效應)**.** 邏輯上等同的相同資訊呈現方式導致不同的決策。

範例 4.4 (亞洲疾病問題)**.** 假設美國正在為一種預計將殺死 600 人的不尋常亞洲疾病做準備。提出了兩個方案：
正面框架：

- 方案 A：將拯救 200 人
- 方案 B：1/3 機率拯救 600 人，2/3 機率無人獲救

負面框架：

- 方案 C：400 人將死亡
- 方案 D：1/3 機率無人死亡，2/3 機率 600 人死亡

結果：大多數人選擇 A 勝過 B（對收益風險規避），但選擇 D 勝過 C（對損失風險尋求），儘管 A C 且 B D。

數學分析：設 $v(\cdot)$ 為展望理論價值函數。

對收益（拯救的生命）：

$$v(200) > \frac{1}{3}v(600) + \frac{2}{3}v(0) = \frac{1}{3}v(600)$$

對損失（失去的生命）：

$$\frac{1}{3}v(-0) + \frac{2}{3}v(-600) > v(-400)$$

這展示了相同的決策問題如何根據框架導致相反的偏好。

4.4 有限理性

定義 4.7 (有限理性（Herbert Simon）). 人類決策制定受到以下限制：

- 認知限制：工作記憶、處理速度
- 資訊約束：不完整、昂貴的資訊
- 時間壓力：決策往往在時間約束下做出

4.4.1 滿意化 vs. 最佳化

定義 4.8 (滿意化). 選擇滿足期望水準的第一個替代方案，而不是尋找最優解。

案例研究

房屋狩獵範例：
最佳化策略：

- 搜尋所有可用房屋
- 在所有準則上評估每一間
- 選擇效用最高的房屋
- 結果：最優選擇但搜尋成本高

滿意化策略：

- 定義最低可接受標準（期望水準）
- 循序搜尋
- 選擇第一間滿足所有標準的房屋
- 結果：「足夠好」的選擇，搜尋成本較低

何時滿意化是最優的？

- 相對於結果改善，搜尋成本高
- 時間壓力

- 當存在「足夠好」的解決方案時
- 複雜的決策環境

4.5 行為賽局理論

4.5.1 社會偏好

傳統賽局理論假設參與者只關心自己的收益。行為賽局理論納入社會偏好。

定義 **4.9** (社會偏好類型). • 利他主義：對他人福利的正面關注

- 不公平規避：對不平等結果的厭惡
- 互惠性：傾向於以類似行動回應善意/惡意行動
- 公平性：對程序公平結果的偏好

4.5.2 實驗賽局

範例 **4.5** (最後通牒賽局詳細分析). 設定：

- 參與者 1（提議者）建議如何分配 10 元
- 參與者 2（回應者）接受或拒絕
- 如果拒絕，雙方都得到 0 元

賽局理論預測：

- 參與者 1 向參與者 2 提議 0.01 元
- 參與者 2 接受（任何正數都比 0 元好）
- 結果：(9.99 元，0.01 元）

實驗結果：

- 眾數提議：4-5 元（總額的 40-50
- 低於 2 元的提議被拒絕 50-80
- 平均接受的提議：3-4 元

行為解釋：

- 提議者：預期低提議會被拒絕（策略性公平）
- 回應者：願意付出代價懲罰不公平行為
- 文化變異：跨文化研究顯示「公平」份額的變異

對經濟學的意涵：

- 工資談判：工人可能拒絕「不公平」的工資提議

- 合約設計：需要考慮公平感知
- 市場結果：競爭可能無法消除公平考慮

範例 **4.6** (公共財賽局)**.** 設定：

- n 個參與者各自獲得稟賦 e
- 決定對公共財的貢獻量：$c_i \in [0, e]$
- 總貢獻乘以 $m > 1$
- 總回報在所有參與者間平均分配
- 參與者 i 的收益：$(e - c_i) + \frac{m}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j$

納許均衡：對所有 i，$c_i = 0$（搭便車）
社會最優：對所有 i，$c_i = e$（如果 $m > 1$）
實驗結果：

- 初始貢獻：稟賦的 40-60
- 隨時間衰減趨向納許預測
- 溝通增加合作
- 懲罰機制維持合作

4.6 管理和政策應用

實際應用

推力和選擇架構：
概念：設計決策環境來幫助人們做出更好的選擇，而不消除選項。
範例：

1. 預設選項： 401(k) 計劃的自動註冊將參與率從 20% 提高到 90%
2. 框架 :「90% 無脂肪」vs「10% 脂肪」- 相同資訊，不同吸引力
3. 社會規範 :「大多數客人重複使用毛巾」比環境呼籲更能提高遵從性
4. 損失框架 :「不換電信商每月損失 50 元」vs「換電信商每月節省 50 元」

倫理考量：

- 透明度：人們應該知道他們被推力了嗎？
- 自主性：推力是否尊重個人選擇？
- 有效性：推力是否長期有效？

練習 **4.1.** 為以下情境之一設計行為干預：

1. ** 節能：** 增加家庭節能 2. ** 健康行為：** 鼓勵在餐廳選擇更健康的食物 3. ** 財務規劃：** 增加年輕工作者的退休儲蓄

對於您選擇的情境：

1. 識別相關的認知偏誤
2. 基於行為洞察設計具體干預措施
3. 預測潛在挑戰和限制
4. 建議評估有效性的方法

Chapter 5

序列決策制定和動態規劃

5.1 序列決策導論

許多現實世界的決策涉及時間序列上的選擇序列，其中：

- 當前決策影響未來選項
- 資訊可能隨時間揭示
- 未來獎勵應該被折現
- 學習和適應發生

定義 5.1 (序列決策問題)**.** 序列決策問題包含：

- 時間期間 $t = 0, 1, 2, \ldots, T$（有限或無限時間視野）
- 描述可能情況的狀態空間 S
- 在每個狀態 s 中可用的行動空間 $A(s)$
- 轉移機率 $P(s'|s, a)$
- 獎勵函數 $r(s, a)$ 或 $r(s, a, s')$
- 折現因子 $\delta \in [0, 1]$

5.2 動態規劃

定理

貝爾曼最優性原理：最優政策具有這樣的性質：無論初始狀態和初始決策是什麼，剩餘的決策必須構成關於第一個決策產生的狀態的最優政策。

5.2.1 有限視野動態規劃

對於具有 T 期的有限視野問題，價值函數滿足：

定義 **5.2** (貝爾曼方程 - 有限視野).

$$V_t(s) = \max_{a \in A(s)} \left[r(s,a) + \delta \sum_{s'} P(s'|s,a) V_{t+1}(s') \right]$$

邊界條件為對所有 s，$V_{T+1}(s) = 0$。

最優政策為：

$$\pi_t^*(s) = \text{argmax}_{a \in A(s)} \left[r(s,a) + \delta \sum_{s'} P(s'|s,a) V_{t+1}(s') \right]$$

範例 **5.1** (庫存管理問題). 問題設定：

- 狀態 s_t：期間 t 開始時的庫存水準
- 行動 a_t：訂貨量
- 需求 d_t 是已知分佈的隨機變數
- 成本：訂貨成本 $c \cdot a_t$，持有成本 $h \cdot \max(s_t + a_t - d_t, 0)$，缺貨成本 $p \cdot \max(d_t - s_t - a_t, 0)$

貝爾曼方程：

$$V_t(s) = \min_{a \geq 0} [ca + \mathbb{E}_d[h \max(s+a-d, 0) + p \max(d-s-a, 0)] + \delta \mathbb{E}_d[V_{t+1}(s+a-d)]]$$

最優政策結構：在某些條件下，最優政策具有基本庫存形式：如果當前庫存低於 s_t^*，則訂貨至水準 S_t^*，否則不訂貨。

5.2.2 無限視野動態規劃

對於無限視野問題，價值函數滿足：

定義 **5.3** (貝爾曼方程 - 無限視野).

$$V(s) = \max_{a \in A(s)} \left[r(s,a) + \delta \sum_{s'} P(s'|s,a) V(s') \right]$$

在適當條件下，存在唯一解 V^* 和穩態最優政策 π^*。

5.2.3 價值迭代演算法

```
初始化所有 s ∈ S 的 V_0(s)
while 未收斂 do
    for 每個狀態 s ∈ S do
        V_{k+1}(s) ← max_{a∈A(s)} [r(s,a) + δ Σ_{s'} P(s'|s,a) V_k(s')]
    end for
    k ← k + 1
end while
提取政策：π*(s) = argmax_{a∈A(s)} [r(s,a) + δ Σ_{s'} P(s'|s,a) V*(s')]
```

範例 **5.2** (機器更換問題). 設定：

- 機器年齡：$s \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (5 = 故障)

- 行動：保留（$a = 0$）或更換（$a = 1$）
- 運營成本：$c(s) = s^2$
- 更換成本：$R = 10$
- 轉移機率：機器以 0.7 的機率老化 1 年，以 0.3 的機率故障

價值迭代解：
迭代 **1**：對所有 s，$V_0(s) = 0$

$$V_1(1) = \max\{-1 + 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0, -10 + 0.8 \cdot 0\} = \max\{-1, -10\} = -1 \tag{5.1}$$
$$V_1(2) = \max\{-4 + 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0, -10 + 0.8 \cdot 0\} = \max\{-4, -10\} = -4 \tag{5.2}$$
$$\vdots \tag{5.3}$$

收斂解：

- $V^*(1) = -22.5$，$\pi^*(1) =$ 保留
- $V^*(2) = -25.2$，$\pi^*(2) =$ 保留
- $V^*(3) = -27.8$，$\pi^*(3) =$ 保留
- $V^*(4) = -29.1$，$\pi^*(4) =$ 更換
- $V^*(5) = -30.5$，$\pi^*(5) =$ 更換

最優政策：當機器達到 4 歲或故障時更換。

5.3 決策樹

決策樹為分析不確定性下的序列決策提供圖形方法。

定義 5.4 (決策樹組件)**.**
- 決策節點（方形）: 決策者選擇的點
- 機會節點（圓形）: 自然/不確定性解決的點
- 終端節點：具有最終收益的終點
- 分支：表示決策或機會結果

5.3.1 逆向歸納

從已知收益的終端節點開始
向後工作到機會節點
在每個機會節點，計算期望值
繼續向後到決策節點
在每個決策節點，選擇具有最高期望值的行動
繼續直到到達根節點

範例 5.3 (新產品開發決策)**.** 公司考慮開發新產品，結構如下：
階段 **1**：決定是否進行市場研究（成本 5 萬元）階段 **2**：決定是否開發產品（成本 20 萬元）階段 **3**：市場結果（成功/失敗）
無研究：

- P(成功) $= 0.6$，成功時利潤 = 80 萬元
- P(失敗) $= 0.4$，失敗時利潤 = -10 萬元

有研究：

- P(正面信號) $= 0.7$
- 若正面信號：P(成功|正面) $= 0.8$
- 若負面信號：P(成功|負面) $= 0.2$

逆向歸納解：
第 **1** 步：計算無研究的期望值

$$EV(\text{開發}) = 0.6 \times 80 + 0.4 \times (-10) - 20 = 24$$

$$EV(\text{不開發}) = 0$$

選擇：開發（EV = 24 萬元）
第 **2** 步：計算有研究的期望值
若正面信號：

$$EV(\text{開發}|\text{正面}) = 0.8 \times 80 + 0.2 \times (-10) - 20 = 42$$

若負面信號：

$$EV(\text{開發}|\text{負面}) = 0.2 \times 80 + 0.8 \times (-10) - 20 = -6$$

研究策略的期望值：

$$EV(\text{研究}) = 0.7 \times 42 + 0.3 \times 0 - 5 = 24.4$$

最優決策：進行研究（24.4 萬元 > 24 萬元）
資訊價值： 24.4 萬元 - 24 萬元 = 0.4 萬元

5.4 馬可夫決策過程

定義 5.5 (馬可夫決策過程（MDP）). MDP 滿足馬可夫性質：未來狀態的機率只依賴於當前狀態和行動，而不依賴於歷史。
形式上：$P(S_{t+1} = s'|S_t = s, A_t = a, S_{t-1}, A_{t-1}, \ldots) = P(S_{t+1} = s'|S_t = s, A_t = a)$

5.4.1 政策類型

定義 5.6 (政策分類).

- **確定性 vs. 隨機性**： $\pi(s) \in A$ vs. $\pi(a|s) \in [0,1]$
- **穩態 vs. 非穩態**：時間無關 vs. 時間相關
- **馬可夫 vs. 歷史相關**：只依賴當前狀態 vs. 整個歷史

定理 5.1 (最優穩態政策的存在性). 對於具有有限狀態和行動空間的無限視野折現 *MDP*，存在最優政策，該政策是：

- 穩態的（時間無關）
- 馬可夫的（只依賴當前狀態）
- 確定性的（純策略）

案例研究

最優停止問題 - 求職：
設定：

- 工作機會以從分佈 $F(w)$ 抽取的工資 w 到達
- 每期搜尋成本：c
- 折現因子：δ
- 每期決策：接受當前機會或繼續搜尋

狀態：當前工資機會 w 行動：接受或拒絕
貝爾曼方程：

$$V(w) = \max\left\{\frac{w}{1-\delta}, -c + \delta \int V(w')dF(w')\right\}$$

最優政策結構：存在保留工資 w^* 使得：

- 如果 $w \geq w^*$ 則接受
- 如果 $w < w^*$ 則拒絕

保留工資滿足：

$$\frac{w^*}{1-\delta} = -c + \delta \int V(w')dF(w')$$

比較靜態：

- 更高的搜尋成本 $c \to$ 更低的保留工資
- 更高的折現因子 $\delta \to$ 更高的保留工資
- 更好的機會分佈 $\to$ 更高的保留工資

練習 **5.1.** 考慮飛機引擎維護的簡化模型。引擎可以處於三種狀態之一：

- 狀態 1：良好狀態
- 狀態 2：一般狀態
- 狀態 3：不良狀態

在每期，您可以選擇：

- 繼續運營（成本 = 0, 5, 15，分別對應狀態 1, 2, 3）
- 執行維護（成本 = 10，使引擎回到狀態 1）
- 更換引擎（成本 = 100，使引擎回到狀態 1）

「繼續運營」的轉移機率：

- 從狀態 1：停留在 1（0.7），移動到 2（0.3）
- 從狀態 2：停留在 2（0.6），移動到 3（0.4）

- 從狀態 3：引擎故障（無限成本）

使用折現因子 $\delta = 0.9$ 的價值迭代找出最優維護政策。

Chapter 6

決策制定中的資訊理論

6.1 資訊的價值

當資訊能夠改變決策或改善結果時，資訊就有價值。我們區分不同類型的資訊價值。

定義 6.1 (完美資訊的期望價值（EVPI）)**.** EVPI 表示決策者應該願意為完美資訊支付的最大金額：

$$\text{EVPI} = \mathbb{E}[V^*] - V^*_{\text{無資訊}}$$

其中 $\mathbb{E}[V^*]$ 是具有完美資訊的期望價值，$V^*_{\text{無資訊}}$ 是沒有額外資訊的最優價值。

定義 6.2 (樣本資訊的期望價值（EVSI）)**.** EVSI 表示來自樣本或信號的不完美資訊的價值：

$$\text{EVSI} = V^*_{\text{有樣本}} - V^*_{\text{無資訊}}$$

範例 6.1 (醫療測試決策)**.** 患者面臨關於在 30% 類似病例中出現的疾病手術決策。

不手術：

- 如果疾病存在：效用 = 0.4
- 如果疾病不存在：效用 = 0.9

手術：

- 如果疾病存在：效用 = 0.8
- 如果疾病不存在：效用 = 0.7

第 **1** 步：無額外資訊的決策

$$EU(\text{不手術}) = 0.3(0.4) + 0.7(0.9) = 0.75 \tag{6.1}$$
$$EU(\text{手術}) = 0.3(0.8) + 0.7(0.7) = 0.73 \tag{6.2}$$

最優決策：不手術（EU = 0.75）
第 **2** 步：具有完美資訊的價值

$$\mathbb{E}[V^*] = 0.3 \cdot \max\{0.4, 0.8\} + 0.7 \cdot \max\{0.9, 0.7\} \tag{6.3}$$
$$= 0.3(0.8) + 0.7(0.9) = 0.87 \tag{6.4}$$

第 **3** 步：**EVPI** 計算 $\text{EVPI} = 0.87 - 0.75 = 0.12$
這意味著患者應該願意為完美診斷測試支付最多 0.12 效用單位。

6.1.1 不完美資訊的診斷測試

範例 6.2 (不完美測試分析). 考慮具有以下特性的診斷測試：

- 敏感性 $= 0.9$（給定疾病時正面測試的機率）
- 特異性 $= 0.8$（給定無疾病時負面測試的機率）

第 **1** 步：計算測試結果機率

$$P(\text{正面}) = P(+|D)P(D) + P(+|\neg D)P(\neg D) \tag{6.5}$$
$$= 0.9(0.3) + 0.2(0.7) = 0.41 \tag{6.6}$$

第 **2** 步：使用貝葉斯法則更新機率

$$P(D|\text{正面}) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(\text{正面})} = \frac{0.9 \times 0.3}{0.41} = 0.659 \tag{6.7}$$
$$P(D|\text{負面}) = \frac{P(-|D)P(D)}{P(\text{負面})} = \frac{0.1 \times 0.3}{0.59} = 0.051 \tag{6.8}$$

第 **3** 步：基於測試結果的最優決策
如果測試正面：

$$EU(\text{手術}|+) = 0.659(0.8) + 0.341(0.7) = 0.766 \tag{6.9}$$
$$EU(\text{不手術}|+) = 0.659(0.4) + 0.341(0.9) = 0.571 \tag{6.10}$$

選擇手術。
如果測試負面：

$$EU(\text{手術}|-) = 0.051(0.8) + 0.949(0.7) = 0.705 \tag{6.11}$$
$$EU(\text{不手術}|-) = 0.051(0.4) + 0.949(0.9) = 0.874 \tag{6.12}$$

選擇不手術。
第 **4** 步：有測試的期望值

$$V^*_{\text{有測試}} = P(+) \cdot EU(\text{手術}|+) + P(-) \cdot EU(\text{不手術}|-) \tag{6.13}$$
$$= 0.41(0.766) + 0.59(0.874) = 0.830 \tag{6.14}$$

第 **5** 步：**EVSI** 計算 EVSI $= 0.830 - 0.75 = 0.08$
不完美測試的價值為 0.08，這是完美資訊價值的 67%。

6.2 熵和資訊內容

定義 6.3 (香農熵). 對於具有機率分佈 $p(x)$ 的離散隨機變數 X，熵為：

$$H(X) = -\sum_x p(x) \log_2 p(x)$$

熵衡量隨機變數的不確定性或資訊內容。

定義 6.4 (條件熵). 給定 X 的 Y 的條件熵為：

$$H(Y|X) = -\sum_{x,y} p(x,y) \log_2 p(y|x)$$

定義 6.5 (互資訊). X 和 Y 之間的互資訊衡量一個變數提供關於另一個變數的資訊量：

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y)$$

範例 6.3 (硬幣翻轉的資訊內容). 公平硬幣： $P(H) = P(T) = 0.5$

$$H = -0.5 \log_2(0.5) - 0.5 \log_2(0.5) = 1 \text{ 位元}$$

偏斜硬幣： $P(H) = 0.9, P(T) = 0.1$

$$H = -0.9 \log_2(0.9) - 0.1 \log_2(0.1) = 0.469 \text{ 位元}$$

公平硬幣比偏斜硬幣具有更高的熵（更多不確定性）。

6.3 學習和適應性決策制定

6.3.1 貝葉斯學習

定義 6.6 (貝葉斯更新). 給定先驗信念 $p(\theta)$ 和觀察 x 及似然性 $p(x|\theta)$：

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)}$$

其中 $p(x) = \int p(x|\theta)p(\theta)d\theta$ 是邊際似然性。

範例 6.4 (學習市場需求). 公司推出新產品並想學習需求參數 θ。
先驗： $\theta \sim \mathrm{Beta}(\alpha_0, \beta_0)$，其中 $\alpha_0 = 2, \beta_0 = 8$ 觀察： n 次試驗有 s 次成功，遵循 $\mathrm{Binomial}(n, \theta)$
後驗： $\theta|s \sim \mathrm{Beta}(\alpha_0 + s, \beta_0 + n - s)$
觀察 20 次試驗有 8 次成功後：

$$\text{先驗均值：} \quad \frac{2}{2+8} = 0.2 \tag{6.15}$$

$$\text{後驗均值：} \quad \frac{2+8}{2+8+8+12} = \frac{10}{30} = 0.33 \tag{6.16}$$

後驗均值向觀察到的成功率 $8/20 = 0.4$ 移動。

6.4 多臂賭博機問題

定義 6.7 (多臂賭博機). 一個序列決策問題，其中：

- K 個臂（行動）具有未知獎勵分佈
- 每次拉動臂 i 從分佈 F_i 產生獎勵 r_i
- 目標：在時間視野內最大化累積獎勵
- 權衡：探索（學習）vs. 利用（賺取）

範例 **6.5** (Beta-Bernoulli 模型的雙臂賭博機). 設定：

- 兩個臂具有成功機率 θ_1, θ_2
- 先驗：$\theta_i \sim \mathrm{Beta}(\alpha_i, \beta_i)$
- 獎勵：成功 $= 1$，失敗 $= 0$

吉廷斯指數方法：對每個臂 i，計算吉廷斯指數 $G_i(\alpha_i, \beta_i)$，它表示永遠最優地玩該臂與接受恆定收益的價值。

湯普森採樣策略：

for 每個時間期間 t **do**
  for 每個臂 i **do**
    採樣 $\tilde{\theta}_i \sim \mathrm{Beta}(\alpha_i, \beta_i)$
  end for
  選擇臂 $i^* = \mathrm{argmax}_i \tilde{\theta}_i$
  觀察獎勵 r 並更新：$(\alpha_{i^*}, \beta_{i^*}) \leftarrow (\alpha_{i^*} + r, \beta_{i^*} + 1 - r)$
end for

上置信界（**UCB**）策略：選擇具有最高上置信界的臂：

$$i^* = \mathrm{argmax}_i \left[\hat{\mu}_i + c\sqrt{\frac{\log t}{n_i}} \right]$$

其中 $\hat{\mu}_i$ 是經驗均值，n_i 是臂 i 被拉動的次數，c 是置信參數。

6.5 資訊經濟學

6.5.1 機制設計

定義 **6.8** (機制設計問題). 當參與者擁有私人資訊時，設計規則/程序以實現期望結果：

- 參與者具有私人類型 θ_i
- 設計者想要實施社會選擇函數 $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$
- 必須提供真實揭示的激勵

範例 **6.6** (第二價格拍賣). 機制：

- 每個投標者提交密封投標
- 最高投標者獲勝
- 贏家支付第二高投標

激勵分析：假設投標者 i 有評價 v_i，其他人的最高投標是 b_{-i}。

如果 $b_i > b_{-i}$（投標者 i 獲勝）:

- 收益 $= v_i - b_{-i}$
- 與 b_i 無關（只要 $b_i > b_{-i}$）

如果 $b_i < b_{-i}$（投標者 i 失敗）:

- 收益 $= 0$
- 與 b_i 無關

結論：投標 $b_i = v_i$（真實地）是優勢策略。
收入等價：在某些條件下，所有標準拍賣格式產生相同的期望收入。

6.5.2 信號賽局

定義 6.9 (信號賽局). 兩階段賽局，其中：

1. 知情參與者（發送者）觀察私人類型並選擇信號
2. 無知參與者（接收者）觀察信號並選擇行動
3. 收益取決於類型、信號和行動

案例研究

就業市場信號（**Spence** 模型）:
參與者：

- 工人具有生產力 $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$（私人資訊）
- 雇主觀察教育水準 e 並設定工資

成本：

- 類型 θ 的教育成本：$c(e, \theta)$，其中 $c_e > 0, c_{e\theta} < 0$
- 高能力工人發現教育相對成本較低

分離均衡：不同類型選擇不同教育水準：

- $e_H > e_L$（高類型獲得更多教育）
- $w(e_H) = \theta_H, w(e_L) = \theta_L$（工資等於生產力）

激勵相容：

$$\theta_H - c(e_H, \theta_H) \geq \theta_L - c(e_L, \theta_H) \quad \text{（高類型不模仿低類型）} \tag{6.17}$$
$$\theta_L - c(e_L, \theta_L) \geq \theta_H - c(e_H, \theta_L) \quad \text{（低類型不模仿高類型）} \tag{6.18}$$

福利含義：

- 教育可能純粹是信號（無生產力效應）
- 社會浪費：資源花在信號而不是生產上
- 但信號可以改善匹配效率

練習 6.1. 考慮一個可能是高品質（θ_H）或低品質（θ_L）的企業，機率相等。企業可以選擇廣告水準 $a \geq 0$，成本為 $c(a, \theta) = a^2/(2\theta)$。

消費者觀察廣告並選擇購買或不購買。他們對品質 θ 的支付意願為 θ，否則為 0。

1. 找出分離均衡廣告水準 2. 計算由於信號造成的福利損失 3. 與兩種類型選擇相同廣告水準的合併均衡比較

Chapter 7

深度不確定性下的穩健決策制定

7.1 深度不確定性導論

傳統決策分析假設在不確定事件上有良好定義的機率分佈。然而，許多現實世界問題涉及深度不確定性，其中：

定義 7.1 (深度不確定性)**.** 當決策者不知道或無法就以下問題達成一致時，存在深度不確定性：

- 描述系統變數間相互作用的適當模型
- 表示關鍵參數不確定性的機率分佈
- 如何評價替代結果的可欲性

實際應用

氣候變化政策：關於溫室氣體減排的決策涉及：

- 模型不確定性：經濟和氣候系統如何相互作用？
- 參數不確定性：對 CO 的氣候敏感性是什麼？
- 價值不確定性：我們應該如何權衡今天的成本與未來的效益？
- 深度不確定性：我們的模型是否根本正確？

7.2 穩健決策制定框架

定義 7.2 (穩健決策制定（RDM）)**.** RDM 是深度不確定性下決策制定的方法，它：

1. 在許多可能的未來中評估策略
2. 識別在各種情境中表現良好的穩健策略
3. 使用基於電腦的情境發現來理解脆弱性
4. 採用迭代過程進行策略改進

7.2.1 RDM 過程

1: 結構化：定義決策替代方案、不確定性和性能指標
2: 評估：在大量情境集合中運行模型
3: 評定：使用穩健性標準識別穩健策略
4: 探索：使用情境發現理解策略脆弱性
5: 改進：設計在各種情境中表現良好的適應性策略

範例 **7.1** (氣候不確定性下的供水規劃). 決策問題：城市規劃供水基礎設施擴建
策略：

- S_1：建造新水庫
- S_2：實施節水計劃
- S_3：開發地下水
- S_4：混合方法

不確定性：

- 氣候變化幅度
- 人口增長率
- 經濟發展模式
- 技術成本

性能指標：

- 供應可靠性
- 財務成本
- 環境影響

穩健性分析：在結合不同不確定性實現的 10,000 個情境中評估每個策略。

7.3 穩健性標準

7.3.1 基於後悔的測量

定義 **7.3** (最大後悔). 對於跨情境集 Θ 的策略 s：

$$\text{MaxRegret}(s) = \max_{\theta\in\Theta}\left[\max_{s'} V(s',\theta) - V(s,\theta)\right]$$

如果策略最小化最大後悔，則該策略是穩健的。

定義 **7.4** (百分位後悔).

$$\text{Regret}_p(s) = \text{跨情境後悔分佈的第}p\text{ 百分位}$$

比最大後悔保守程度低；關注典型而非最壞情況的性能。

7.3.2 滿意化測量

定義 7.5 (滿意化穩健性)**.** 對於性能閾值 τ：

$$\text{Robustness}(s) = V(s,\theta) \geq \tau \text{ 的情境比例}$$

如果策略在高比例的情境中達到滿意的性能，則該策略是穩健的。

範例 7.2 (比較穩健性測量)**.** 考慮在 1000 個情境中評估的三個策略：

策略	平均回報	標準差	最大後悔	% 滿意（$\tau = 50$）
A	60	15	80	85%
B	55	8	40	95%
C	70	25	120	70%

分析：

- 期望效用最大化者：偏好 C（最高均值）
- 極小極大後悔：偏好 B（最低最大後悔）
- 滿意化：偏好 B（最高可靠性）

選擇取決於決策者對風險和不確定性的態度。

7.4 情境發現

定義 7.6 (情境發現)**.** 識別導致策略失敗或成功的不確定因子組合的計算方法。
目標：找到「當 $X_1 \in [a,b]$ 且 $X_2 > c$ 時策略 s 失敗」形式的可解釋規則

7.4.1 患者規則歸納法（PRIM）

PRIM 在不確定性空間中找到包含高濃度興趣情境的盒子。

從所有情境開始
重複：
找到最大化目標情境密度的維度和閾值
通過限制該維度創建盒子
移除盒子外的情境
直到：滿足停止標準（例如，最小盒子大小）
剝離：移除限制以改善覆蓋率，同時保持密度

詳細解答

PRIM 範例 - 基礎設施脆弱性：
情境：識別洪水防護失敗的條件
變數：

- 海平面上升：0-100 公分
- 風暴強度：1-5 級
- 開發密度：低/中/高

- 投資水準：0-5 億元

PRIM 結果 :「洪水防護在 85% 的情境中失敗，當：

- 海平面上升 $>$ 40 公分且
- 風暴強度 $>$ 3 且
- 投資 $<$ 2 億元」

覆蓋率：此規則捕獲 60% 的所有失敗情境
政策含義：

- 2 億元的投資閾值顯得關鍵
- 系統易受因子組合而非個別極端的影響
- 可以指導適應性管理觸發器

7.5 適應性決策策略

定義 **7.7** (適應性策略)**.** 決策策略：

- 隨時間監控關鍵指標
- 包括策略調整的預先計劃決策規則
- 在不確定性解決時保持改變方向的靈活性

7.5.1 實物選擇權方法

定義 **7.8** (實物選擇權)**.** 給予權利但非義務採取未來行動的投資。選擇權有價值，因為它們在不確定性下提供靈活性。

範例 **7.3** (分階段基礎設施開發)**.** 問題：需求增長不確定下的機場擴建
傳統方法：立即建造完整容量

- 成本：預先 5 億元
- 風險：如果需求低則產能過剩

實物選擇權方法：分階段擴建

- 第一階段：2 億元，處理當前需求 +50%
- 擴建選擇權：如果需求實現則 3.5 億元
- 監控需求 5 年後決定

選擇權價值計算：假設需求增長以相等機率為 5%（低）或 10%（高）年增長率。
傳統方法期望 **NPV**：

$$NPV_{\text{傳統}} = 0.5 \times \text{NPV}_{\text{低需求}} + 0.5 \times \text{NPV}_{\text{高需求}}$$

選擇權方法期望 **NPV**：

$$NPV_{\text{選擇權}} = \text{NPV}_{\text{第一階段}} + 0.5 \times \max(0, \text{NPV}_{\text{擴建}} - 350)$$

選擇權通過在低需求情境中避免擴建成本的能力提供價值。

7.5.2 動態適應性政策路徑

定義 7.9 (適應性路徑)**.** 規劃方法：

- 映射朝向目標的多種可能路線
- 識別決策點和監控觸發器
- 為不同未來準備應急行動
- 啟用學習和路線修正

案例研究

海岸適應路徑：
目標：保護海岸社區免受海平面上升
路徑要素：

- 行動：海灘養護、海堤、管理式撤退
- 觸發器：海平面閾值、風暴損害頻率
- 決策點：每 10 年或觸發器啟動時

路徑圖：

1. 現在**-2030**：海灘養護 + 監控
2. **2030** 決策點：
   - 如果 SLR $<$ 20 公分：繼續養護
   - 如果 SLR 20-40 公分：增加海堤
   - 如果 SLR $>$ 40 公分：開始管理式撤退規劃
3. **2040** 決策點：基於觀察條件的進一步適應

優勢：

- 避免過早承諾昂貴選項
- 隨著不確定性解決保持靈活性
- 建立利害關係人對長期選擇的理解

練習 7.1. 考慮關於以下不確定性的可再生能源投資決策：

- 未來電價
- 技術成本

- 政策支持（碳定價、補貼）
- 需求增長

設計包含以下內容的穩健決策制定分析：

1. 替代投資策略的定義
2. 關鍵不確定性及其範圍的規格
3. 適當穩健性標準的選擇
4. 具有決策觸發器的適應性策略設計
5. 情境發現如何為分析提供資訊的描述

討論此方法與傳統財務分析的不同以及何時可能更可取。

7.6 多目標穩健最佳化

定義 **7.10** (穩健帕雷圖最優性)**.** 如果在不確定性空間的顯著部分中不存在其他解能夠支配它，則該解是穩健帕雷圖最優的。

範例 **7.4** (模型不確定性下的多目標投資組合選擇)**.** 問題：考慮收益和風險選擇投資組合，但對以下方面不確定：

- 真實收益分佈
- 相關結構
- 模型規格

穩健方法：

1. 定義包含合理模型的不確定性集合 $\mathcal{U}$
2. 對每個候選投資組合 x：
   - 計算 $\mathcal{U}$ 中所有模型的表現
   - 計算穩健性措施（例如，最壞情況收益、後悔）
3. 找出穩健帕雷圖最優的投資組合

數學公式：

$$\min_x \max_{u \in \mathcal{U}} \left[-\mu(u)^T x, \quad x^T \Sigma(u) x\right]$$

其中 $\mu(u)$ 和 $\Sigma(u)$ 表示模型 u 下的收益和協方差。

練習 **7.2.** 考慮關於以下不確定性的可再生能源投資決策：

- 未來電價
- 技術成本
- 政策支持（碳定價、補貼）

- 需求增長

設計包含以下內容的穩健決策制定分析：

1. 替代投資策略的定義
2. 關鍵不確定性及其範圍的規格
3. 適當穩健性標準的選擇
4. 具有決策觸發器的適應性策略設計
5. 情境發現如何為分析提供資訊的描述

討論此方法與傳統財務分析的不同以及何時可能更可取。

Chapter 8

高級主題和應用

8.1 決策制定中的網路效應

定義 8.1 (網路外部性)**.** 產品或決策對一個使用者的價值取決於做出相同選擇的其他使用者數量。
類型：

- 直接：價值隨網路規模增加（例如，電話、社交媒體）
- 間接：價值通過互補產品增加（例如，作業系統、遊戲機）

8.1.1 網路效應下的採用決策

範例 8.1 (技術採用賽局)**.** 設定：n 個消費者決定是否採用新技術

- 採用成本：c
- 如果 k 個其他人採用的效益：$b(k)$，其中 $b'(k) > 0$
- 採用的淨收益：$b(k) - c$
- 不採用的收益：0

均衡條件：如果 $b(k) \geq c$，消費者採用，其中 k 是其他採用者的期望數量。
關鍵量：使得 $b(k^*) = c$ 的最小採用者數量 k^*
多重均衡：

- 無採用：如果少於 k^* 採用，剩餘消費者偏好不採用
- 完全採用：如果多於 k^* 採用，剩餘消費者偏好採用
- 協調問題：可能存在多個穩定均衡

政策含義：

- 臨時補貼可以克服採用障礙
- 早期採用者激勵可以觸發廣泛採用
- 標準設定可以解決協調失敗

8.2 演算法決策制定

8.2.1 決策系統中的機器學習

定義 8.2 (演算法決策制定). 使用資料和演算法來制定或推薦影響個人或組織的決策的自動化系統。

範例：

- 信用評分和貸款審批
- 履歷篩選和招聘
- 醫療診斷輔助
- 刑事司法風險評估

探索

演算法決策中的偏見和公平性：
偏見來源：

- 訓練資料中的歷史偏見
- 特徵選擇中的測量偏見
- 模型設計中的演算法偏見
- 性能指標中的評估偏見

公平性標準：

- 個體公平性：相似個體得到相似待遇
- 群體公平性：各群體間結果平等
- 反事實公平性：在沒有敏感屬性的反事實世界中決策不變

權衡：不同公平性標準往往彼此衝突，也與準確性衝突。

8.3 集體決策制定

8.3.1 社會選擇理論

定義 8.3 (社會選擇函數). 從個人偏好到社會排名或選擇的映射。

理想性質：

- 一致性：如果每個人都偏好 x 勝過 y，社會也如此
- 獨立性：x vs y 的社會排名只依賴於 x vs y 的個人排名
- 非獨裁：沒有單一個人決定所有社會選擇

定理

阿羅不可能定理：當至少有 3 個替代方案和 2 個個人時，沒有社會選擇函數同時滿足一致性、獨立性和非獨裁。

範例 8.2 (投票悖論)**.** 三個選民對三個替代方案排名：

	選民 1	選民 2	選民 3
第 1 選擇	A	B	C
第 2 選擇	B	C	A
第 3 選擇	C	A	B

成對比較：

- A vs B：A 獲勝（選民 1,3 偏好 A）
- B vs C：B 獲勝（選民 1,2 偏好 B）
- C vs A：C 獲勝（選民 2,3 偏好 C）

結果：非傳遞社會偏好：A B C A
這證明了將個人偏好聚合為連貫社會排名的不可能性。

8.4 實驗決策理論

8.4.1 實驗室實驗

案例研究

測試期望效用理論：
阿萊悖論實驗：
選擇集 **1**：

- 選項 A：確定 100 萬元
- 選項 B：機率 0.1 得 500 萬元，機率 0.89 得 100 萬元，機率 0.01 得 0 元

選擇集 **2**：

- 選項 C：機率 0.11 得 100 萬元，機率 0.89 得 0 元
- 選項 D：機率 0.1 得 500 萬元，機率 0.9 得 0 元

典型結果：

- 大多數人選擇 A 勝過 B
- 大多數人選擇 D 勝過 C

期望效用預測：如果 A B，則 EU 理論要求 C D（根據獨立性公理）
解釋：獨立性公理的系統性違反支持展望理論而非期望效用理論。

8.4.2 田野實驗

實際應用

推力退休儲蓄：
實驗設計：

- 處理組：401(k) 自動註冊並可選擇退出
- 控制組：標準選擇加入註冊
- 結果：1 年後參與率

結果：

- 控制組：20% 參與
- 處理組：85% 參與
- 效果隨時間持續（有限退出）

行為機制：

- 現狀偏見：人們堅持預設
- 拖延：選擇加入需要主動決策
- 隱含認可：預設暗示推薦行動

政策應用：

- 自動註冊的廣泛採用
- 擴展到供款率和投資選擇
- 應用於健康保險、器官捐贈

8.5 未來方向

8.5.1 人工智慧和決策理論

探索

AI 決策系統：
新興挑戰：

- 具有策略互動的多代理 AI 系統
- 學習和適應決策規則的 AI 系統
- 演算法決策的人類監督
- 決策支援的可解釋 AI

研究前沿：

- AI 代理的機制設計
- 分佈移位下的穩健 AI 決策制定
- AI 安全性和與人類價值的對齊
- 符號和神經方法的整合

8.5.2 行為洞察和技術

定義 8.4 (數位推力)**.** 使用使用者介面設計元素在數位環境中引導行為。
範例：

- 預設隱私設定
- 線上選擇的框架
- 社會比較資訊
- 通知時機

練習 8.1. 綜合決策分析項目：
選擇現實世界決策問題（例如，城市規劃、醫療政策、商業策略）並開發包含以下內容的綜合分析：

1. 問題結構化：
    - 定義決策替代方案
    - 識別關鍵不確定性
    - 指定利害關係人及其目標
2. 多種決策框架：
    - 傳統期望效用分析
    - 行為考量（偏見、框架效應）
    - 如相關的賽局理論互動
    - 多目標的多準則分析
3. 不確定性處理：
    - 機率評估方法
    - 深度不確定性的穩健決策制定
    - 資訊價值分析
4. 實施考量：
    - 動態和適應性策略
    - 利害關係人參與過程
    - 監控和評估框架

準備包含數學分析、行為洞察和實用建議的報告。討論不同理論框架如何導致不同結論以及如何在實踐中調和這些差異。